

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

И.Э. Келлер

# МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

*Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета  
2022

УДК 539.3  
К34

Рецензенты:

д-р техн. наук *Ф.Д. Сорокин*

(Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет));

д-р физ.-мат. наук *Э.И. Старовойтов*

(Белорусский государственный университет транспорта)

**Келлер, И.Э.**

К34 Механика сплошной среды: учеб. пособие / И.Э. Келлер. – Пермь:  
Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 260 с.

ISBN 978-5-398-00079-5

Излагаются общие разделы статики и кинематики сплошной среды в рамках различных подходов к описанию движения в геометрически нелинейном приближении. Записываются балансовые уравнения и следующие из них соотношения на границах разрыва. Рассматриваются уравнения и постановки задач механики классических сред. Даются некоторые частные разделы механики сплошной среды.

Предназначено студентам и аспирантам механикам инженерных вузов и классических университетов.

УДК 539.3

ISBN 978-5-398-00079-5

© ПНИПУ, 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Сплошная среда и ее деформации.....	6
2. Кинематика сплошной среды.....	12
3. Напряжения в сплошной среде.....	18
4. Термодинамика сплошной среды.....	23
5. Соотношения на поверхностях разрыва.....	33
6. Классические среды. Жидкости и газы.....	43
7. Классические среды. Упругое твердое тело.....	48
8. Классические среды. Пластические среды.....	64
9.     70	
Список литературы.....	74
Предметный указатель.....	76

## **ВВЕДЕНИЕ**

В

# 1. Континуум и его деформации

**Материальный континуум.** Математическое описание процессов деформирования или течения сред требует некоторых, хотя бы грубых, представлений об их строении. Вероятно, можно принять, что все среды состоят из неких частиц. Если среда — это песок, то ее частицами можно считать песчинки, если вода — то молекулы воды, если металлический поликристалл — то атомы металла либо зерна поликристалла. Тогда деформирование или течение среды можно представить как изменение относительного расположения составляющих ее частиц. Детализируя закон взаимодействия частиц среды и записывая для них законы динамики, можно прийти к достаточно содержательному описанию процесса. Для среды-песка в качестве закона взаимодействия песчинок можно выбрать закон трения Кулона, для атомов кристаллической решетки металла — какой-либо атомный потенциал. Если частицу воспринимать как жесткое тело, то для нее в качестве законов динамики необходимо записать законы сохранения импульса и момента импульса, если же достаточно считать ее материальной точкой, то потребуется только закон сохранения импульса. Также необходимо принять гипотезы, определяющие, как детально будет рассматриваться кинематика относительного движения частиц. От выбора частиц, закона взаимодействия, законов динамики и кинематических гипотез существенным образом зависит поведение, описываемое моделью исследуемой среды. Чтобы приблизить это поведение к реальному, необходимо представлять себе строение среды, физические механизмы, управляющие ее поведением, масштаб, на котором эти механизмы функционируют, влияние условий испытания (температура, скорость нагружения и история термомеханического нагружения). Для этого требуется опыт и интуиция.

Если точно следовать намеченному выше алгоритму, мы получим модель движения среды в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, количество которых равно произведению числа степеней свободы частицы на число частиц. Последних в изучаемом объеме среды оказывается довольно много и разумным будет сгладить, “размазать” дискретные поля по объему, занимаемому средой. Механические величины, заданные на дискретном множестве точек, интерполируются непрерывными функциями требуемой гладкости. При этом уравнения, описывающие движение среды, превращаются из обыкновенных дифференциальных уравнений в уравнения в частных производных. Такую непрерывную модель среды называют *сплошной средой* или *континуумом* (от латинского “continuum” - непрерывный).

При континуализации мы переходим от систем с конечным или счетным числом степеней свободы к системам с несчетным числом степеней свободы, материальным континуумом. Однако, когда механики говорят о точке среды, они чаще всего подразумевают малый, но конечный ее объем, названный нами ранее частицей. Точнее, они говорят о механических переменных этой частицы

(скорость, сила), отнесенных к геометрической точке ее центра масс. Континуализация обычно сопровождается переходом от экстенсивных механических характеристик к интенсивным. Точке континуума, например, ставят в соответствие плотность массы, а не массу, силу, отнесенную к объему или площади, а не собственно силу. Переменные, являющиеся интенсивными по определению, например, перемещение, скорость перемещения и т.д., сохраняют собственный смысл.

Каков же итог? Выходит, мы дробили среду на частицы, чтобы потом склеить из них грубую копию этой среды? Это так, и это не плохо, потому что в результате мы смогли выяснить принципиальные моменты и получить уравнения механического поведения деформируемой среды.

Важно понимать, что процессы движения сред не всегда определяются поведением мельчайших составляющих их частиц. Для того, чтобы лучше описать эти процессы, помогут скорее не открытия физиками все более мелких частиц материи, а понимание причинно-следственных связей на некотором масштабе (или ряде масштабов) изучаемой среды. Континуализация сглаживает возможные осцилляции полей на масштабах меньше размера частиц, но чаще всего нас и не интересует тонкая структура полей ниже некоторого масштаба, а только осредненные значения. Или же физический механизм наблюдаемого поведения материала располагается на определенном масштабном уровне. И размер частиц в “корпускулярном” представлении тела оказывается много большим тех масштабов, на которые рассчитана существующая измерительная техника (и определяется не ей). Как заметил Э.А. По, “ошибки в исследованиях обычно проистекают из свойственной человеческому разуму склонности недооценивать или же преувеличивать значение исследуемого предмета из-за неверного определения его удаленности от нас”.

Примерами деформируемых континуумов могут служить нити, ткани, сети, жидкости, газы, гранулированные среды, смолы, стекла, бетон, металлы, горные породы, резины, плазма, звездные системы и многие другие среды. Одни из них заметно и охотно изменяют свою геометрию при внешних воздействиях, другие — нет. Частицы гибкой, но нерастяжимой нити при ее деформировании не изменяют расстояния до ближайших соседей. “Частицы” же автомобильного потока на длинном участке дороги вообще не взаимодействуют между собой (если не сталкиваются).

В двух следующих главах изучается движение континуума без рассмотрения вызвавших его причин. Частицы среды будут отождествляться с *материальными точками*, понимаемыми в смысле теоретической механики.

**Лагранжев закон движения континуума.** Допустим, мы изучаем движение в пространстве довольно большой системы материальных точек. Чтобы различать друг от друга, точки системы можно пронумеровать или дать каждой из них свое неповторимое имя. Наиболее естественным, хотя и необычным, именем материальной точки оказывается место в пространстве, которое она занимала в начальный момент времени, то есть тройка ее начальных пространственных координат. Такие “имена” материальных точек называют *лагранжевыми координатами*. Для континуальных систем, изучаемых в данном пособии, нумерация их элементов невозможна и этот способ идентификации точек вообще оказывается единственным. При движении материальных точек их пространственные координаты изменяются. Лагранжевы координаты — имена наших точек — при этом не меняются, они даются раз и навсегда. И те, и другие — координаты материальных точек, а не точек пространства. Лагранжевы координаты — это и имена материальных точек, и пространственные координаты последних в начальный момент времени. Лагранжева система координат встроена в материальную среду и деформируется вместе с ней, пространственная же является внешней по отношению к движущемуся материальному континууму.

Если все поля движущегося материального континуума рассматриваются как функции лагранжевых координат и времени, то такой *способ описания движения* называется *лагранжевым*.

Запишем сказанное математически. Точку пространства<sup>1</sup> будем задавать координатами (в некоторой произвольной пространственной системе координат  $\bar{\xi}^i$ ) или радиус-вектором  $\mathcal{U}(\bar{\xi}^i)$ . Точка материального континуума тогда именуется лагранжевыми координатами  $\xi^i$  ( $i=1,2,3$ ) ( $\xi^i(t=0) = \bar{\xi}^i$ ) или лагранжевым радиус-вектором  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi^i)$ . Ее место в пространстве в текущий момент времени  $t$  представляется радиус-вектором

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

причем

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}.$$

Если  $\mathbf{x}$  пробегает все точки тела, то (1.1) представляет собой *лагранжев закон движения* этого тела. Для любого фиксированного момента времени  $t$  этот закон определяет в общем случае текущее положение тела в пространстве и, что более важно, взаимное расположение точек тела, то есть его *конфигурацию*. Здесь нам потребуются две конфигурации — в начальный момент времени, называемая *отсчетной* и обозначаемая  $K_0$ , и в текущий момент времени, называемая *текущей* и обозначаемая  $K_t$ . *Деформацией тела* называется изменение его конфигурации. В механике континуума внимание концентрируется на деформационной

---

<sup>1</sup> Имеется в виду трехмерное точечное (аффинное) евклидово пространство, внешнее по отношению к движущемуся континууму.

составляющей его движения. Элементарным примером деформируемого тела является пружина, способная изменять расстояние между концами.

На рис. 1.1 для примера приведены сетки материальных координат в осевом сечении деформированного штамповкой тела, имевшего в начальной конфигурации данного сечения прямоугольную сетку материальных координатных линий.

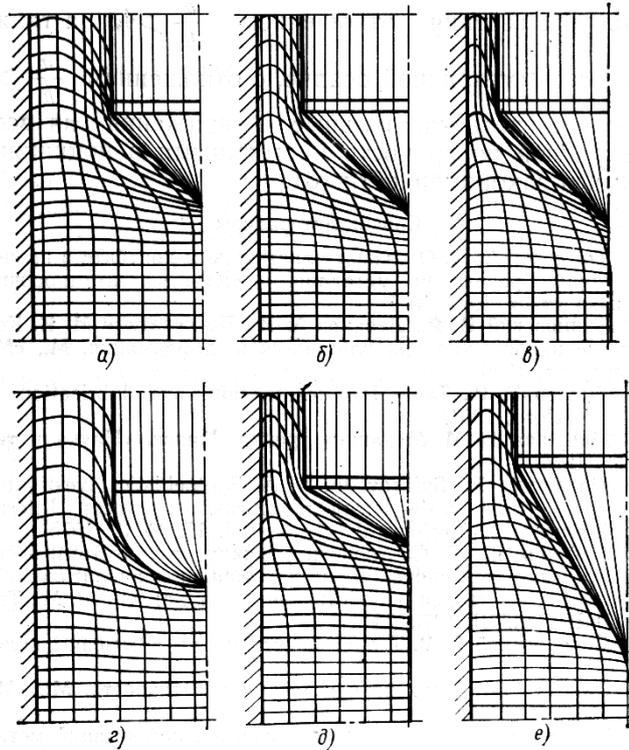


Рис. 1.1. Сетка материальных координат после деформации штамповки

**Основная гипотеза континуума** при лагранжевом способе описания движения состоит в том, что отображение (1.1) по первому аргументу гомеоморфно, то есть непрерывно дифференцируемо и имеет ненулевой якобиан. При этом условии существует обратное отображение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (1.2)$$

также являющееся гомеоморфным. Отображение (1.2) позволяет определить, какая именно материальная точка находится сейчас в данной точке пространства. Поскольку параметр  $t$  здесь может быть произвольным, все материальные системы координат в пространстве, образованные из лагранжевых координатных линий движением континуума, являются равноправными. То есть, при движении континуума две материальные точки не сольются в одну, а из одной не появятся две, векторы, касательные к материальным координатным линиям, проходящим

через точку, не окажутся в одной плоскости и т. д. Данная гипотеза требует, чтобы близкие материальные частицы в процессе движения оставались близкими, т.е. *сохранения локальной топологии*<sup>2</sup>. Эксперименты показывают, что требование не выполняется для некоторых сравнительно малых объемов жидких, пластических и тому подобных сред, где движение может сопровождаться локальным перемешиванием частиц. Однако в некоторых средах — упругих — это требование (даже в сравнительно малых объемах) выполняется хорошо, для других же сред такую гипотезу можно принять для некоторых движений на некоторых масштабах. Такими случаями, вообще-то, ограничено использование и самого лагранжева подхода к описанию движения.

**Аффинные искажения.** Каждой материальной точке можно естественно сопоставить локальный базис

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i}, \quad (1.3)$$

касательный к первоначальным материальным координатным линиям, проходящим через эту точку, и локальный базис

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \xi^i}, \quad (1.4)$$

касательный к материальным координатным линиям, проходящим через эту точку в текущий момент времени. Примем якобиан преобразования (1.1) положительным, тогда базисы  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$  оба правые или оба левые и материальную среду невозможно локально вывернуть наизнанку. Бесконечно малый материальный отрезок

$$d\mathbf{x} = d\xi^i \mathbf{e}_i, \quad (1.5)$$

исходящий из некоторой материальной точки в начальный момент времени, преобразуется в бесконечно малый материальный отрезок

$$d\hat{\mathbf{x}} = d\xi^i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.6)$$

исходящий из той же материальной точки в текущий момент времени. Один бесконечно малый материальный отрезок  $d\mathbf{x}$  взаимно однозначно отображается на другой бесконечно малый материальный отрезок  $d\hat{\mathbf{x}}$ , но оба состоят из одного и

---

<sup>2</sup> Kunin I.A. Kinematics of media with continuously changing topology // Int. J. Theor. Phys. 1990. V.29. N.11. P.1167-1176.

того же набора материальных точек, о чем свидетельствуют равенство бесконечно малых приращений материальных координат  $d\xi^i$  в (1.5) и (1.6) (то есть равенство “поименных списков” точек отрезков). Компоненты  $d\xi^i$  отрезка, оставаясь бесконечно малыми, в остальном могут быть произвольными. Отсюда видно, что линейный оператор, связывающий отрезки  $d\mathbf{x}$  и  $d\hat{\mathbf{x}}$ , связывает и базисы  $\mathbf{e}_i$  и  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Если обозначить его как  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , то из

$$d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.7)$$

вместе с (1.5) и (1.6) следует

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.8)$$

Из (1.8) нетрудно получить запись данного оператора в виде диадика, построенного из векторов обоих локальных базисов:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_i \mathbf{e}^i. \quad (1.9)$$

С использованием символического набла-вектора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \mathbf{e}^i \quad (1.10)$$

и (1.4) наш оператор можно записать в виде диады

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \nabla, \quad (1.11)$$

благодаря чему его называют *градиентом места*. Из (1.9) немедленно следует

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{e}}^i. \quad (1.12)$$

В силу ограничений, наложенных на закон движения (1),  $\mathbf{F}$  — неособенный тензор. Если обратный ему тензор обозначить как  $\hat{\mathbf{F}}$ ,

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad (1.13)$$

то законы (1.7), (1.8) запишутся как

$$d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}} \cdot d\hat{\mathbf{x}}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \quad (1.15)$$

и, кроме того, будут иметь место представления

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{e}}^i, \quad (1.16)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{x} \hat{\nabla}, \quad (1.17)$$

где

$$\hat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \hat{\mathbf{e}}^i. \quad (1.18)$$

Из (1.15) или (1.12) следует

$$\hat{\mathbf{e}}^i = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{e}^i. \quad (1.19)$$

Также легко увидеть, что

$$\hat{\nabla} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \nabla, \quad \nabla = \mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla}. \quad (1.20)$$

Итак, материальная точка в процессе движения перемещается в пространстве. Рассмотрим в начальный момент времени бесконечно малый материальный параллелепипед с вершиной в некоторой материальной точке и ребрами  $d\xi^i$  вдоль векторов локального базиса  $\mathbf{e}_i$  в этой точке. В процессе движения эта фигура перемещается вместе с вершиной и искажается, превращаясь в бесконечно малый материальный параллелепипед с ребрами  $d\xi^i$  вдоль базисных векторов  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . То есть, линейные операторы  $\mathbf{F}$  и  $\hat{\mathbf{F}}$  описывают аффинное изменение формы малой окрестности точки материального континуума и потому являются *аффинорами*.

**Изменения метрики.** В процессе деформации материального континуума в малой окрестности любой его точки изменяется метрика. Изменение локальной материальной метрики называют *локальной деформацией*. Фундаментальная матрица, в начальный момент времени равная

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \equiv g_{ij}, \quad (1.21)$$

в текущий момент времени становится равной

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j \equiv \hat{g}_{ij} \neq g_{ij}. \quad (1.22)$$

Причем

$$g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}^j = \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}, \quad \hat{g}_{ij} \hat{\mathbf{e}}^i \hat{\mathbf{e}}^j = \mathbf{I},$$

что выражает принадлежность обеих конфигураций аффинному евклидову пространству. Мерой изменения локальных метрических свойств может служить симметричная матрица

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} - g_{ij}). \quad (1.23)$$

Сопоставляя ее компоненты базисам  $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$  или  $\hat{\mathbf{e}}^i \hat{\mathbf{e}}^j$ , получаем симметричные тензоры

$$\mathbf{G} \equiv \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (1.24)$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{I} - g_{ij} \hat{\mathbf{e}}^i \hat{\mathbf{e}}^j) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}}). \quad (1.25)$$

Из (22)-(23) видно, что информация о локальной деформации содержится в шести независимых компонентах любого из этих тензоров, находимых по девяти компонентам аффинора. При деформации тела, то есть изменении его конфигурации, локальная окрестность произвольной точки испытывает не только деформацию, но и поворот, описываемый тремя оставшимися независимыми

компонентами аффинора. Более наглядно эти вопросы могут быть изучены с помощью полярного разложения тензора.

**Эллипсоиды деформации.** Аффинор  $F$  единственным образом разложим на компоненты

$$F = R \cdot U = V \cdot R, \quad (1.26)$$

$U, V$  — положительно определенные тензоры, описывающие деформацию и в соответствии с их положением в полярных разложениях (1.24) называемые правым и левым тензорами искажения, и  $R$  — собственно ортогональный тензор, описывающий поворот. Аналогично

$$\hat{F} = U^{-1} \cdot R^T = R^T \cdot V^{-1}. \quad (1.27)$$

Из (1.24)-(1.25) следует

$$U^2 = F^T \cdot F, \quad (1.28)$$

$$V^2 = F \cdot F^T, \quad (1.29)$$

$$U^{-2} = \hat{F} \cdot \hat{F}^T, \quad (1.30)$$

$$V^{-2} = \hat{F}^T \cdot \hat{F}, \quad (1.31)$$

$$R = F \cdot U^{-1} = F \cdot (F^T \cdot F)^{-1/2}, \quad (1.32)$$

$$R = V^{-1} \cdot F = (F \cdot F^T)^{-1/2} \cdot F, \quad (1.33)$$

$$R = \hat{F}^T \cdot U = \hat{F}^T \cdot (\hat{F} \cdot \hat{F}^T)^{-1/2}, \quad (1.34)$$

$$R = V \cdot \hat{F}^T = (\hat{F}^T \cdot \hat{F})^{-1/2} \cdot \hat{F}^T. \quad (1.35)$$

Из (22)-(23) и (26)-(27) мы можем видеть, что

$$G = \frac{1}{2}(U^2 - I), \quad A = \frac{1}{2}(I - V^2),$$

т.е. тензоры искажений отвечают за изменение локальной метрики.

Малый материальный шар  $dx \cdot dx \leq \varepsilon^2$ , взятый в начальный момент времени, при движении среды перемещается вместе со своим центром и искажается, становясь малым материальным эллипсоидом  $dx \cdot dx = d\hat{x} \cdot \hat{F}^T \cdot \hat{F} \cdot d\hat{x} \leq \varepsilon^2$ . Это видно из положительной определенности тензора  $\hat{F}^T \cdot \hat{F}$  (в силу (1.29) равного  $V^{-2}$ ). Удобно, используя (24)<sub>1</sub>, аффинное искажение шара разделить на два этапа: деформацию  $U$  и поворот  $R$  и рассмотреть промежуточную локальную конфигурацию  $K'$ .

Такая конфигурация в общем не осуществлялась в ходе действительного движения выбранной материальной окрестности, ибо аффинор  $F$  содержит в себе информацию только о начальной и текущей конфигурациях этой материальной окрестности. Использование такой промежуточной конфигурации во-первых оправдывается существованием упругих сред, состояние которых в любой момент времени не зависит от истории искажения материальной окрестности, а зависит именно от начальной (ненапряженной и недеформированной) и текущей конфигураций этой материальной окрестности, а во-вторых возможностью

применения этого разложения в кинематике — для пары бесконечно близких текущих конфигураций, где промежуточная конфигурация с ними сливается.

Малые материальные отрезки  $d\mathbf{x}'$  в  $K'$ , связанные с начальными материальными отрезками  $d\mathbf{x}$  деформацией  $d\mathbf{x}' = \mathbf{U} \cdot d\mathbf{x}$  и с текущими материальными отрезками  $d\hat{\mathbf{x}}$  поворотом  $d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}'$ , образуют эллипсоид  $d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot d\mathbf{x}' \leq \varepsilon^2$ . Итак, на первом этапе материальный шар деформируется и становится эллипсоидом, на втором этот эллипсоид поворачивается (рис. 1.2, а). Ортонормированные векторы вдоль главных осей этого эллипсоида, называемого *правым эллипсоидом деформации*, обозначим  $\mathbf{p}_i$ . Отметим, что каждый из этих векторов определяется с точностью до противоположного направления, поэтому только правых троек будет четыре варианта. Очевидно, главные оси  $\mathbf{p}_i$  правого эллипсоида деформации совпадают с главными осями тензора  $\mathbf{U}$ ; главные значения этого тензора, называемые *главными удлинениями* или *кратностями удлинений*, обозначим  $\lambda_i$  ( $\lambda_i > 0$ ). Материальные отрезки, располагающиеся в  $K_0$  вдоль векторов  $\mathbf{p}_i$ , в результате деформации не изменяют своего направления, но изменяют свою длину в отношении  $\lambda_i = \hat{l}_i / l_i$ , где  $\hat{l}_i$  — текущие, а  $l_i$  — начальные длины материальных отрезков. В частных случаях деформации среди трех чисел  $\lambda_i$  имеются совпадающие. Когда два и только два таких числа совпадают, скажем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , соответствующие им главные направления будут исчерпываться всеми направлениями в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{p}_3$ , а эллипсоид деформации окажется эллипсоидом вращения. Если все три значения совпадают, любое направление в пространстве будет главным, а эллипсоид деформации оказывается шаром.

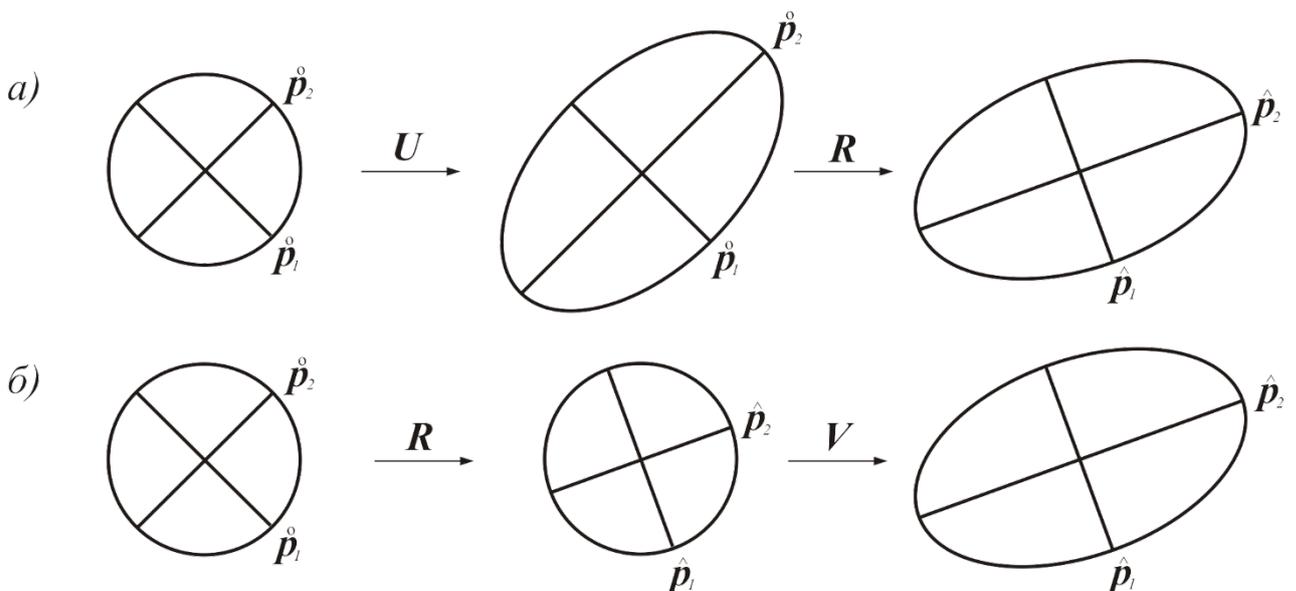


Рис. 1.2. Главные направления деформации

Теперь разделим аффинное искажение материального шара с использованием (1.24)<sub>2</sub> — на последовательно осуществляемые поворот  $\mathbf{R}$  и деформацию  $\mathbf{V}$ . Промежуточную конфигурацию (фиктивную, как и в первом случае) обозначим  $K''$ . Малые материальные отрезки  $d\mathbf{x}''$  в  $K''$ , связанные с начальными материальными отрезками  $d\mathbf{x}$  поворотом  $d\mathbf{x}'' = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{x}$  и с текущими материальными отрезками  $d\hat{\mathbf{x}}$  деформацией  $d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}''$ , образуют шар  $d\mathbf{x}'' \cdot d\mathbf{x}'' \leq \varepsilon^2$ . На первом этапе материальный шар поворачивается, а на втором деформируется и становится эллипсоидом (рис. 1.2, б). Ортонормированные векторы вдоль главных осей этого эллипсоида, называемого *левым эллипсоидом деформации*, обозначим  $\hat{\mathbf{p}}_i$ . Они совпадают с главными осями тензора  $\mathbf{V}$ ; главные значения этого тензора равны  $\lambda_j$ . Материальные отрезки, располагающиеся в  $K''$  вдоль векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$ , в результате деформации не изменяют своего направления, но изменяют свою длину в отношении  $\lambda_j$ .

Очевидно, главные оси правого и левого эллипсоидов деформации в пределе при  $t \rightarrow t_0$  совпадают между собой. Обозначим ортонормированные векторы вдоль главных осей в их предельном положении как  $\mathbf{p}'_i$ . Ортонормированные тройки векторов  $\mathbf{p}_i$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_i$  и  $\mathbf{p}'_i$  существуют и в случае кратных главных удлинений. Эти тройки, являющиеся базисами рассматриваемого пространства, будем называть соответственно *правым, левым и предельным трехгранниками*. Выше говорилось о неопределенности в выборе каждого из этих трехгранников. Мы устраним ее, потребовав, чтобы в пределе при  $t \rightarrow t_0$   $\mathbf{p}_i$  и  $\hat{\mathbf{p}}_i$  сводились к  $\mathbf{p}'_i$ .

Сейчас становится очевидным:

$$\mathbf{U} = \sum \lambda_j \mathbf{p}_j \mathbf{p}_j, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{V} = \sum \lambda_j \hat{\mathbf{p}}_j \hat{\mathbf{p}}_j. \quad (1.37)$$

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{p}_i \Leftrightarrow \hat{\mathbf{p}}_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{p}_i, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{F} = \sum \lambda_j \hat{\mathbf{p}}_j \mathbf{p}_j, \quad (1.39)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum \lambda_j^{-1} \mathbf{p}_j \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (1.40)$$

С помощью  $\mathbf{p}'_i$  можно определить тензоры поворота

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{p}'_i, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{p}_i \mathbf{p}'_i, \quad (1.42)$$

связанные между собой как

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}'. \quad (1.43)$$

В заключение рассмотрим простейшее движение, содержащее и деформацию, и поворот, — однородный *простой сдвиг* среды, описываемый законом

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + 2\gamma x_2 \\ \hat{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

в декартовом ортонормальном репере, вдоль третьего направления которого преобразование тождественно. С помощью аффинора

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и (1.26)-(1.27) можно найти тензоры  $U^2 = F^T \cdot F$  и  $V^2 = F \cdot F^T$ :

$$F_{ki}F_{kj} = \begin{bmatrix} 1 & 2\gamma \\ 2\gamma & 1+4\gamma^2 \end{bmatrix}, \quad F_{ik}F_{jk} = \begin{bmatrix} 1+4\gamma^2 & 2\gamma \\ 2\gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Главные оси этих тензоров образуют соответственно правый и левый трехгранники. Ориентация первой главной оси любого симметричного тензора  $T$  второго ранга над плоскостью по отношению к первому вектору базиса дается формулами:

$$\sin 2\alpha = T_{12} / T, \quad \cos 2\alpha = T_m / T,$$

где  $T_m = \frac{1}{2}(T_{11} - T_{22})$ ,  $T = (T_m^2 + T_{12}^2)^{1/2}$ . Поэтому

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\pm\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

где знак минус соответствует правой, а плюс — левой, первым главным осям. При  $\gamma \rightarrow 0$  (вблизи начальной конфигурации)  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$  и  $\hat{\alpha} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , а при  $\gamma \rightarrow +\infty$   $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $\hat{\alpha} \rightarrow 0$ . Решая характеристическое уравнение любого из этих тензоров, можно найти главные удлинения  $\lambda_{\pm} = \sqrt{1+\gamma^2} \pm \gamma$ , причем здесь знак плюс соответствует удлинению материального отрезка вдоль второй правой и первой левой главных осей, а минус — укорочению материального отрезка вдоль первой правой и второй левой главных осей (внимательно изучите компоненты  $U^2$  и  $V^2$ ). Напомним, что  $\alpha$  и  $\hat{\alpha}$  задают текущую ориентацию главных осей. В компонентах

$$P_1 = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}, \quad P_2 = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}, \quad \hat{P}_1 = \begin{Bmatrix} \cos\hat{\alpha} \\ \sin\hat{\alpha} \end{Bmatrix}, \quad \hat{P}_2 = \begin{Bmatrix} -\sin\hat{\alpha} \\ \cos\hat{\alpha} \end{Bmatrix}.$$

В пределе при  $\gamma \rightarrow 0$

$$P'_1, \hat{P}_1 \rightarrow P'_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}, \quad P'_2, \hat{P}_2 \rightarrow P'_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix},$$

а при  $\gamma \rightarrow +\infty$

$$P_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad P_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{P}_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \hat{P}_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Сейчас с помощью (1.34)-(1.36), (1.39)-(1.40) уже несложно вычислить тензоры деформаций и поворотов и проанализировать их тенденции при росте сдвигового параметра. Например,

$$R = P_1 \hat{P}_1 + P_2 \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\alpha} - \alpha) & -\sin(\hat{\alpha} - \alpha) \\ \sin(\hat{\alpha} - \alpha) & \cos(\hat{\alpha} - \alpha) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На рис. 3 изображены эллипсы деформаций вблизи начального и в произвольный текущий моменты времени.

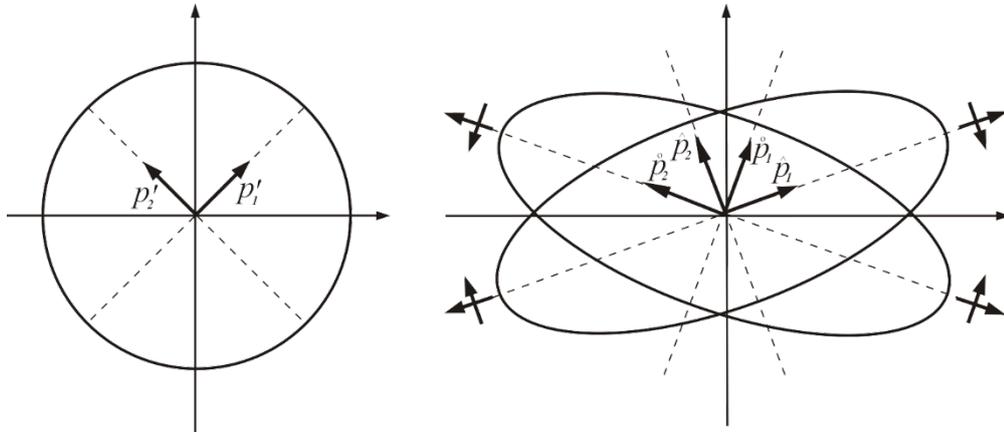


Рис. 1.3. Эллипсы деформации при простом сдвиге

**Меры деформации** (т.е. локального изменения метрики) можно построить, сопоставляя левым или правым трехгранникам  $\mathbf{p}_i$  и  $\hat{\mathbf{p}}_i$  значения

$$e_i = f(\lambda_i), \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad (1.44)$$

где  $f$  — произвольная гладкая монотонная функция, задающая шкалу деформации. Чаще используют меры деформаций из семейства

$$e_i = \begin{cases} \frac{1}{2m}(\lambda_i^{2m} - 1), & m \neq 0 \\ \ln \lambda_i, & m = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

где  $m$  — действительное число. Тензор

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \sum (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad (1.46)$$

соответствующий правому трехграннику и показателю  $m=1$ , называется *мерой деформации Грина*, а тензор

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \sum \left(1 - \frac{1}{\lambda_i^2}\right) \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}), \quad (1.47)$$

соответствующий левому трехграннику и показателю  $m = -\frac{1}{2}$ , называется *мерой деформации Альманси*. Ранее (см. (1.22)-(1.23)) уже было дано альтернативное определение этих тензоров непосредственно через разность локальных метрик. Но поскольку, как там же было замечено, информация об изменении локальной метрики (и только она) содержится в тензорах  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , меры деформации можно строить как тензорные функции  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , что сейчас фактически и делается. Семейству (1.43) принадлежат *правая и левая меры относительных удлинений* ( $m = \pm \frac{1}{2}$ )

$$\mathbf{U} - \mathbf{I} = \sum (\lambda_i - 1) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-1} = \sum \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (1.49)$$

и *правая и левая логарифмические меры* ( $m=0$ )

$$H = \Sigma \ln \lambda_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i = \ln U, \quad (1.50)$$

$$\hat{H} = \Sigma \ln \lambda_i \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i = \ln V. \quad (1.51)$$

Семейство мер деформации с главными осями  $\mathbf{p}_i$  будем называть *правым*, а с главными осями  $\hat{\mathbf{p}}_i$  — *левым семейством мер деформации*. Введем для них обозначения

$$\mathbf{e} = \Sigma e_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i, \quad (1.52)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \Sigma e_i \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (1.53)$$

причем очевидно, что

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{R}^T. \quad (1.54)$$

Исследователи по разным причинам не работают с какой-либо одной мерой деформации. От одной меры всегда можно перейти к другой, так что все меры одинаково ценны и нет оснований какой-либо одной присваивать наименование «истинная». На рис. 1.4 для качественного сравнения приведены зависимости различных мер деформации от кратности при одноосном удлинении среды: 1 — меры Грина  $\frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ , 2 — левой меры относительных удлинений  $\lambda - 1$ , 3 — логарифмической меры  $\ln \lambda$ , 4 — правой меры относительных удлинений  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , 5 — меры Альманси  $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\lambda^2})$ .

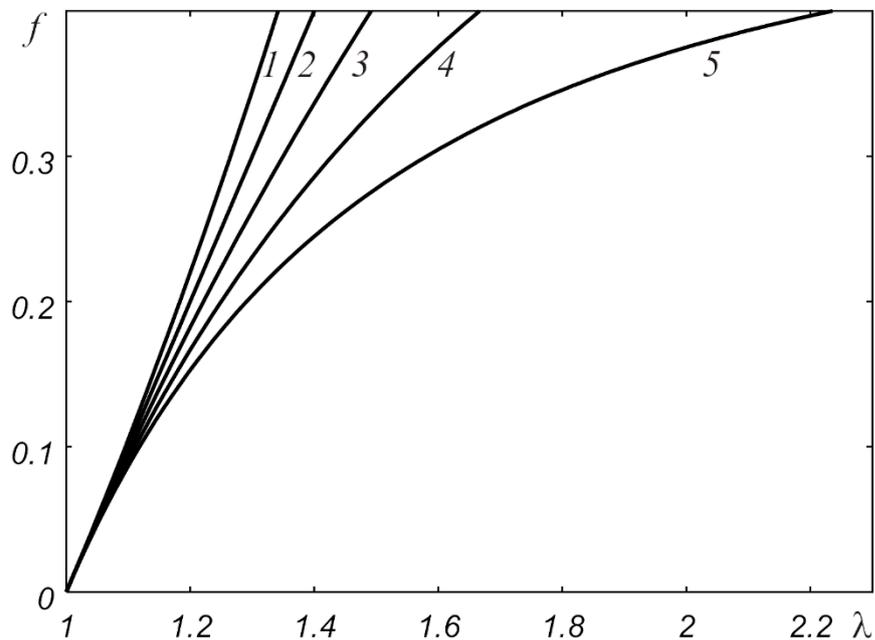


Рис. 1.4. Зависимости мер деформаций от удлинения

Следует заметить, что все меры деформации неодинаково ведут себя при растяжении и сжатии. Например, при деформировании стержня со скоростью деформации  $\dot{\lambda} / \lambda = \dot{\hat{I}} / \hat{I} = \pm 1 \text{ с}^{-1}$  («+» соответствует растяжению, «-» — сжатию)

зависимость удлинения от параметра нагружения  $\lambda = \exp(\pm t)$  изображена на рис. 1.5 (кривая 1 соответствует растяжению, кривая 2 — сжатию).

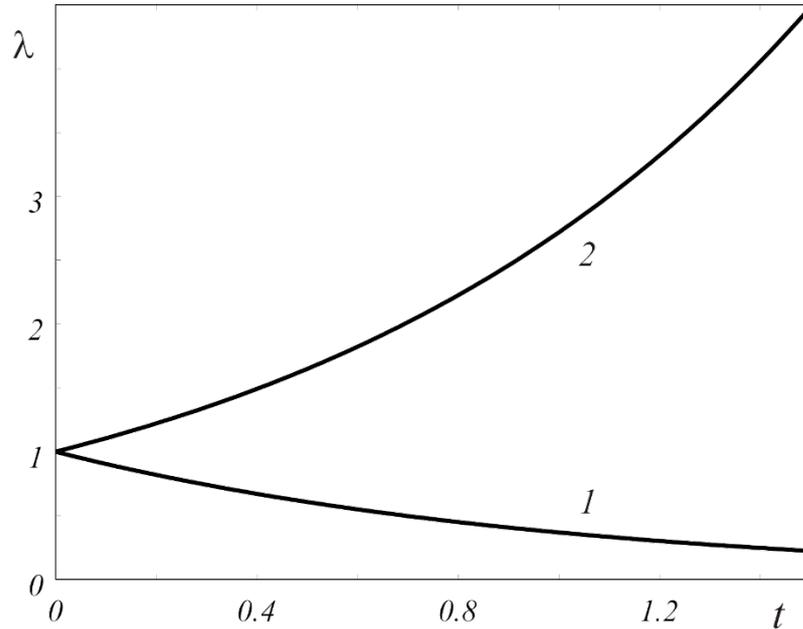


Рис. 1.5. Зависимость удлинения при растяжении и сжатии

**Изменение материальной площадки и объема.** Рассмотрим, как изменяется малая *материальная площадка* при ее аффинной деформации. Возьмем в  $K_0$  пару произвольных малых материальных отрезков,  $d\mathbf{x}'$  и  $d\mathbf{x}''$ , исходящих из некоторой материальной точки, и рассмотрим построенный на этих отрезках малый материальный параллелограмм. Если площадь параллелограмма обозначить  $dS$ , а единичную нормаль к его плоскости  $\mathbf{n}$ , то  $\mathbf{n}dS = d\mathbf{x}' \times d\mathbf{x}''$ . В  $K_t$  мы получим материальный параллелограмм  $\hat{\mathbf{n}}d\hat{S} = d\hat{\mathbf{x}}' \times d\hat{\mathbf{x}}''$ , где  $d\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}'$ ,  $d\hat{\mathbf{x}}'' = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}''$ , а  $d\hat{S}$  и  $\hat{\mathbf{n}}$  — его площадь и единичная нормаль. Свяжем векторы  $\mathbf{n}dS$  и  $\hat{\mathbf{n}}d\hat{S}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}d\hat{S} &= d\hat{\mathbf{x}}' \times d\hat{\mathbf{x}}'' = d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{F}^T \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}'' = d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}^i \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}^j \cdot d\mathbf{x}'' = \\ &= d\xi^{i'} d\xi^{j''} \hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = J d\xi^{i'} d\xi^{j''} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}^k = \sqrt{\hat{g}} d\xi^{i'} d\xi^{j''} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{e}^k = \\ &= \sqrt{\hat{g}} d\xi^{i'} d\xi^{j''} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot (\varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^k) = \frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{g}} d\xi^{i'} d\xi^{j''} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \\ &= \frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{g}} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot (d\mathbf{x}' \times d\mathbf{x}'') = J \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{n}d\pi, \end{aligned}$$

где  $g = \|\mathbf{g}_{ij}\|$ ,  $\hat{g} = \|\hat{\mathbf{g}}_{ij}\|$  — квадраты объемов параллелепипедов, построенных на локальных материальных базисах рассматриваемой материальной точки в  $K_0$  и  $K_t$ ,  $J = \frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{g}}$  — якобиан преобразования материальных координат. Короче говоря,

$$\hat{\mathbf{n}}d\hat{S} = J \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{n}dS, \quad \mathbf{n}dS = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}d\hat{S}. \quad (1.55)$$

Перемножая любое из соотношений (1.50) скалярно само на себя и используя (1.27), (1.28), получим

$$d\hat{S} / dS = J(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{n})^{1/2}, \quad dS / d\hat{S} = J^{-1}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}})^{1/2}. \quad (1.56)$$

Далее, подставляя (51) в (50), можно связать нормали:

$$\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{n})^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}})^{-1/2} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.57)$$

Наконец, следует установить связь локальных материальных объемов в  $K_0$  и  $K_t$ . Проще всего для этого рассмотреть малый материальный шар радиуса  $dr$  в  $K_0$ , который, как нам известно, превращается в  $K_t$  в малый материальный эллипсоид с полуосями  $\lambda_1 dr$ ,  $\lambda_2 dr$  и  $\lambda_3 dr$ . Отсюда

$$\frac{d\hat{V}}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (1.58)$$

Эта величина называется *кратностью изменения объема*. Из (1.53) и определений (1.34), (1.35), (1.37) следует

$$\frac{d\hat{V}}{dV} = \|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{V}\| = J. \quad (1.59)$$

Можно выразить данную величину и через меры деформаций (1.44), (1.45), (1.48), (1.49):

$$\frac{d\hat{V}}{dV} = (1 + 2I_1(\mathbf{G}) + 4I_2(\mathbf{G}) + 8I_3(\mathbf{G}))^{1/2}, \quad (1.60)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dV} = (1 - 2I_1(\mathbf{A}) + 4I_2(\mathbf{A}) - 8I_3(\mathbf{A}))^{-1/2}, \quad (1.61)$$

$$\frac{d\hat{V}}{dV} = \exp I_1(\mathbf{H}) = \exp I_1(\hat{\mathbf{H}}). \quad (1.62)$$

**Перемещения и дисторсии.** Вектор перемещения точки тела из отсчетной конфигурации в текущую определяется следующим образом:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \quad (1.63)$$

С помощью этого векторного поля на теле аффиноры могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{x}}\nabla = \mathbf{x}\nabla + \mathbf{u}\nabla = \mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \hat{\mathbf{x}}\hat{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\nabla} - \mathbf{u}\hat{\nabla} = \mathbf{I} - \mathbf{u}\hat{\nabla}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где диады  $\mathbf{u}\nabla$  и  $\mathbf{u}\hat{\nabla}$  называют *тензорами дисторсий*. Эти тензоры несут в себе столько же информации, сколько и аффиноры, поэтому с их помощью можно записать все меры деформаций. Например, меры Грина и Альманси записываются как

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\nabla), \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{u} + \mathbf{u}\hat{\nabla} - \hat{\nabla}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\hat{\nabla}). \end{aligned} \quad (1.65)$$

**Малые деформации.** Рассмотрим приближение *малых деформаций*, означающее, что конфигурации  $K_t$  и  $K_0$  деформированного тела мало различаются друг от друга, что подразумевает малость искажения материальной системы координат, искажения локального материального базиса и изменения

материальной метрики. Это означает возможность работы в отсчетной пространственной системе координат с неизменными координатами  $\bar{\xi}^i$ , базисом

$\bar{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{y}(\bar{\xi}^i)}{\partial \bar{\xi}^i}$  ( $\mathbf{y}(\bar{\xi}^i) = \mathbf{x}(\xi^i)$  — радиус-вектор точки пространства<sup>3</sup>) и наблюда-

вектором  $\bar{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^i} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \equiv \nabla$ , без привлечения текущей системы материальных

координат. Аргументами всех определенных на континууме полей берут пространственные координаты  $\bar{\xi}^i$ . Близость конфигураций подразумевает  $|\mathbf{u}| \ll 1$

и, что более важно,  $|\mathbf{u}\nabla| \ll 1$ . Все меры деформации в этом случае до малых более высокого порядка по  $\mathbf{u}\nabla$  сведутся к тензору

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla), \quad (1.66)$$

называемому *тензором малых деформаций*. Относительно тензоров Грина и Альманси в этом можно убедиться с помощью (1.60). Оператор

$$\text{def}(\cdot) \equiv \frac{1}{2}(\nabla(\cdot) + (\cdot)\nabla) \quad (1.67)$$

называют *деформатором*. С его помощью можно записать

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def} \mathbf{u}. \quad (1.68)$$

Антисимметричная часть тензора малой дисторсии

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla - \nabla \mathbf{u}) \quad (1.69)$$

называется *тензором малых поворотов*. Из (1.61) и (1.64)

$$\mathbf{u}\nabla = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}. \quad (1.70)$$

Вспоминая (7) и (58), нетрудно увидеть

$$d\mathbf{u} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.71)$$

то есть смысл тензоров малых деформаций и поворотов как линейных операторов. Относительное перемещение  $d\mathbf{u}$  концов малого материального отрезка  $d\mathbf{x}$  вызывается его деформацией  $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x}$  и поворотом  $\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x}$ . Антисимметричному тензору малых поворотов  $\boldsymbol{\omega}$  ставят в соответствие аксиальный вектор

$$\boldsymbol{\omega}_\times = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\omega}, \quad (1.72)$$

обратно

$$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_\times. \quad (1.73)$$

С использованием (1.64) этот *вектор малых поворотов* выражается через поле перемещений

$$\boldsymbol{\omega}_\times = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.74)$$

---

<sup>3</sup>  $\bar{\xi}^i$  — координаты точки пространства, в которой первоначально находилась точка материала с координатами  $\xi^i$ .

Очевидно, что главные оси тензора малых деформаций совпадают с предельными главными осями  $\mathbf{p}'_i$  эллипсоидов деформации.

Малые упругие деформации без поворотов и перемещений испытывают, например, детали строительных конструкций. Главные относительные удлинения сводятся к  $\lambda_i = 1 + \varepsilon_i$  до малых второго порядка по  $\varepsilon_i$ . При этом все шкалы деформации  $f(\lambda_i)$  с той же точностью стремятся к  $\varepsilon_i$ . Поскольку локальными поворотами можно пренебречь, меры деформации сводятся к тензору малых деформаций.

Существуют среды, физически неспособные испытывать деформации ( $\lambda_i = 0$ ), но при этом имеют конечные локальные перемещения и повороты. Таковы, например, нерастяжимые гибкие нити и ткани. Надуваемые резиновые сферические оболочки, напротив, обнаруживают большие деформации без поворотов. Другие же среды имеют сравнимые (малые или немалые) деформации и повороты. При необходимости можно построить локальные меры деформаций и ротаций, наиболее подходящие рассматриваемому процессу.

**Условия совместности деформаций.** Итак, все меры деформаций определяются полем перемещений точек материального континуума. Попробуем сейчас решить обратную задачу — по заданному полю меры деформации определить поле перемещений<sup>4</sup>. Потребуем только непрерывности этого поля меры деформации вплоть до производных второго порядка, а в остальном будем считать его вполне произвольным. Сначала решим эту проблему для малых деформаций. Математически она эквивалентна интегрированию системы шести дифференциальных уравнений (1.61)

$$\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla = 2\boldsymbol{\varepsilon}$$

с заданными правыми частями требуемой непрерывности. В ортобазисе  $\mathbf{k}_i$  декартовой пространственной системы координат эти уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 2\varepsilon_{13}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 2\varepsilon_{23}. \end{aligned}$$

Интегрирование первых трех уравнений можно получить компоненты  $u_1, u_2, u_3$  с точностью до трех произвольных функций, которые следует найти из последних трех уравнений. Выясним, всегда ли можно найти по заданному полю  $\boldsymbol{\varepsilon}$  поле  $\mathbf{u}$ . Иначе говоря, мы должны найти условия существования непрерывного поля  $\mathbf{u}$ , удовлетворяющего (1.61). Очевидно, что (1.61) эквивалентно (1.66) при условии (1.64). Из (1.66)

$$d\mathbf{u} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{x},$$

следует

<sup>4</sup> Этот вопрос потребует далее для постановки краевой задачи в напряжениях.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \int_{M_0}^M (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.75)$$

где  $\mathbf{u}^0$  — перемещение точки  $M_0$ . Если материальное тело занимает односвязную область пространства, то необходимое и достаточное условие однозначности  $\mathbf{u}$ , т.е. его независимости от пути интегрирования<sup>5</sup> в (1.70), записывается в виде

$$\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega}) = 0. \quad (1.76)$$

Однако нам ничего не известно о существовании поля  $\boldsymbol{\omega}$ , кроме связи (1.64) его с искомым полем  $\mathbf{u}$ . В последнем равенстве

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}_\times = \nabla \cdot (C_{II} - C_{III}) \cdot \boldsymbol{\omega}_\times = \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_i I \mathbf{k}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_\times = \nabla_i \boldsymbol{\omega}_{\times j} \mathbf{k}_j \mathbf{k}_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_\times I = \boldsymbol{\omega}_\times \nabla, \end{aligned}$$

поскольку  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_\times = 0$  в силу (1.64). Равенство (1.71) тогда принимает вид

$$d\boldsymbol{\omega}_\times = (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.77)$$

откуда

$$\boldsymbol{\omega}_\times = \boldsymbol{\omega}_\times^0 + \int_{M_0}^M \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.78)$$

Условие существования однозначного поля  $\boldsymbol{\omega}_\times$  в односвязной области пространства эквивалентно условию независимости его от пути интегрирования:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla = 0. \quad (1.79)$$

Это и есть искоемые нами *условия совместности Сен-Венана*. Эти ограничения задают в функциональном пространстве произвольных достаточно гладких полей симметричного тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  на теле подпространство совместных деформаций. Уравнения (1.74) иногда записывают с использованием символического оператора несовместности  $\text{Ink}$ :

$$\text{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (1.80)$$

Читателю следует убедиться, что

$$\text{Ink} \text{ def} \equiv 0.$$

Дадим геометрическую интерпретацию полученного условия. Сначала разделим еще не деформированную сплошную среду на бесконечно малые материальные кубики и разнесем их в пространстве, чтобы они не мешали друг другу. А затем сообщим каждому из них деформацию, соответствующую достаточно непрерывному, а в остальном произвольному полю деформаций, заданному на исходной конфигурации  $K_0$  материальной среды. Можно ли обратно склеить из деформированных параллелепипедов какое-либо непрерывное тело?

Чтобы ответить на этот вопрос, попробуем описать то, что мы сделали, в терминах дифгеометрии, при этом не ограничиваясь малыми деформациями. Пусть в  $K_0$  задана декартова система лагранжевых координат  $\xi^i$  с однородной по этой

<sup>5</sup> Напомним, что для  $\int \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{x}$  это условие имеет вид  $\nabla \times \mathbf{Q}^T = 0$ .

конфигурации метрикой  $g_{ij}$ . На  $K_0$  задается произвольное поле деформаций  $a_{ij}$ , в силу (1.21') изменяющее метрику:

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + 2a_{ij}. \quad (1.81)$$

Эта метрика индуцирует ненулевые объект связности

$$\hat{\Gamma}_{i,jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \hat{g}_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \xi^i} \right) \quad (1.82)$$

и тензор Римана - Кристоффеля (тензор кривизны пространства)

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \hat{g}_{il}}{\partial \xi^j \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{jl}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{ik}}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial^2 \hat{g}_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} \right) + \\ + \hat{g}^{ps} (\hat{\Gamma}_{pjk} \hat{\Gamma}_{sil} - \hat{\Gamma}_{pjl} \hat{\Gamma}_{sik}), \end{aligned} \quad (1.83)$$

а это означает, что деформированный материальный континуум образует риманово пространство. Последнее сводится к аффинному пространству при условии

$$\hat{R}_{ijkl} = 0. \quad (1.84)$$

Записывая это условие через  $a_{ij}$  с использованием (1.75)-(1.77), мы и получим *условие совместности деформаций*

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijkl} = \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial \xi^j \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} + \\ + \hat{g}^{ps} (A_{pjk} A_{sil} - A_{pjl} A_{sik}) = 0, \end{aligned} \quad (1.85)$$

где  $A_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial \xi^i}$  и  $[\hat{g}^{ps}] = [\delta_{ps} + 2a_{ps}] J^{-1}$ , линейная часть которого ( $a_{ij} \rightarrow \varepsilon_{ij} \ll 1$ ) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \xi^j \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} = 0, \quad (1.86)$$

полностью совпадающий с уравнением (1.74), записанным в  $\xi^i$  как в декартовых пространственных координатах. Условие (1.78) требует, чтобы конфигурация  $K_t$  принадлежала пространству без кривизны, то есть аффинному пространству. В общем же случае задаваемая произвольным полем деформации конфигурация  $K_t$  оказывается принадлежащей риманову пространству или, иначе говоря, не существует поля перемещений, переводящих  $K_0$  в  $K_t$  в аффинном пространстве.

Меру деформации  $a_{ij}$  в (1.79), конечно, можно выразить через любой из тензоров конечных деформаций. Условие (1.79) или (1.80), содержит 6 независимых уравнений в трехмерном случае, одно в двумерном и ни одного в одномерном (столько независимых компонент у тензора Римана - Кристоффеля).

**Определение перемещения по совместным деформациям.** Ограничимся малыми деформациями. Используя (1.64), (1.70), (1.73), получим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\omega}_\times^0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \int_{M_0}^M \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{x} - \int_{M_0}^M d\mathbf{x} \times \int_{M_0}^M (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot d\mathbf{x}'.$$

Далее, сводя двойной интеграл к однократному:  $\int_a^b ds \int_a^s f(u) du = \int_a^b f(v)(b-v)dv$ , получим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\omega}_\times^0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \int_{M_0}^M [\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})] \cdot d\mathbf{x}' \quad (1.87)$$

— формулу Чезаро. Очевидно, интеграл в (81) не зависит от пути. Перемещение, естественно, оказалось определенным с точностью до малого перемещения среды как жесткого целого  $\mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\omega}_\times^0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ , складывающегося из трансляции точки  $M_0$  и поворота вокруг нее.

Формула Чезаро ввиду громоздкости подынтегральных выражений для вычисления перемещений не применяется, для чего имеется другой путь. Сначала находятся компоненты тензора дисторсии. Диагональные компоненты тензоров дисторсии и малых деформаций совпадают, а недиагональные находятся так. Из (1.61), (1.64), (1.65) в ортобазисе декартовой пространственной системы координат получаем

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}.$$

Затем из (64)

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i},$$

откуда

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_{M_0}^M (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}) dx_k.$$

Интеграл в последнем выражении берется по ломаной со звеньями, параллельными осям координат (примем  $M_0 = (0,0,0)$ ,  $M = (x_1, x_2, x_3)$ ):

$$u_{i,j} = u_{i,j}^0 + \int_0^{x_1} (\varepsilon_{ij,1} + \varepsilon_{i1,j} - \varepsilon_{j1,i}) \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \\ + \int_0^{x_2} (\varepsilon_{ij,2} + \varepsilon_{i2,j} - \varepsilon_{j2,i}) \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} (\varepsilon_{ij,3} + \varepsilon_{i3,j} - \varepsilon_{j3,i}) dx_3, \quad i \neq j.$$

Далее

$$u_i = u_i^0 + \int_0^{x_1} u_{i,1} \Big|_{x_2=x_3=0} dx_1 + \int_0^{x_2} u_{i,2} \Big|_{x_3=0} dx_2 + \int_0^{x_3} u_{i,3} dx_3.$$

## 2. Скорости деформаций континуума

В данной главе изучается кинематика деформируемого континуума.

**Материальная производная.** На деформируемом материальном континууме бывают определены некоторые физические поля (например, перемещений или сил), изменяющиеся со временем. Для определения скорости изменения значений этих полей в фиксированных материальных точках используется *материальная производная*:

$$\dot{(\cdot)} \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}. \quad (2.1)$$

При лагранжевом способе описания движения все поля рассматриваются как функции лагранжевых координат (не зависящих от времени) и времени, и потому для любого такого поля  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  правомочны записи (1)

в виде

$$\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{d\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)}{dt}.$$

Скорость и ускорение движения точки континуума определяются как

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \ddot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

**Эйлеров способ описания движения** континуума заключается в рассмотрении всех заданных на нем полей как функций пространственных координат и времени. Чтобы перейти от лагранжева описания к эйлерову, нужно знать, какая именно материальная точка находится сейчас в данной точке пространства. Связь (1.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t)$$

как раз и содержит в себе такую информацию. Подставляя в  $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  эту связь, получим  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}(\hat{\mathbf{x}}, t), t) \equiv \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  — эйлерово описание поля  $\mathbf{c}$ . Ранее мы уже встречались с разновидностью эйлерова описания, когда рассматривали приближение малых деформаций.

Пусть требуется записать материальную производную поля  $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ , т.е. заданного эйлеровым способом как функции пространственных координат и времени. В соответствии с (2.1) для этого необходимо взять производную  $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  по  $t$  при фиксированном  $\mathbf{x}$ . Очевидно фиксировать следует материальную точку, которая находится в данный момент времени в рассматриваемой точке пространства. При материальном дифференцировании  $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  следует воспринимать как сложную функцию по  $t$  и фиксировать  $\mathbf{x}$  при дифференцировании по первому аргументу с использованием (1.1):

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\hat{\mathbf{c}}}(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}.$$

Очевидно  $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{v}$  по (2.1) и (2.2). Для записи  $\frac{\partial \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$  удобно ввести пространственный набла-вектор:

$$\tilde{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}^i} = \hat{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \equiv \hat{\nabla}, \quad (2.4)$$

где  $\tilde{\xi}^i$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\xi}^i}$  — пространственные координаты и локальный базис<sup>6</sup>,

$\mathbf{y}(\tilde{\xi}^i) = \hat{\mathbf{x}}(\xi^i)$  (равенство в (2.4) доказать). Тогда  $\frac{\partial \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{c}}\hat{\nabla}$ . Используя для

обозначения рассматриваемого поля его имя  $\mathbf{c}$  вместо функции  $\hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  и, конечно, не забывая, что аргументом полей  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{v}$  сейчас являются пространственные координаты и время, (2.3) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c}\hat{\nabla}) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

Таким образом доказано

$$\dot{(\cdot)} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} (\cdot). \quad (2.6)$$

Здесь в первом слагаемом используется *локальная производная*:

$$\frac{\partial (\cdot)}{\partial t} \equiv \frac{\partial (\cdot)}{\partial t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad (2.7)$$

определяющая скорость изменения в фиксированной точке пространства, т.е. *скорость с точки зрения эйлерова описания*. Второе слагаемое

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} (\cdot), \quad (2.8)$$

называемое *конвективной производной*, определяет скорость изменения за счет относительного движения совпадающих в данный момент материальной и пространственной точек. Формула (2.6) связывает скорость изменения величины  $\mathbf{c}$  в материальной точке, находящейся в данный момент в фиксированной точке пространства, скорость изменения величины  $\mathbf{c}$  в этой точке пространства и скорость переноса этой величины движущимся сквозь точку пространства континуумом. Приведем пример, когда пространство и континуум одномерны, а  $\mathbf{c}$  — скалярное поле. На рис. 2.1 приведены материальная точка с именем  $X$ , ее

<sup>6</sup>  $\tilde{\xi}^i$  — координаты точки пространства, в которой сейчас находится точка материала с координатами  $\xi^i$ .

Заметим, что  $\bar{\xi}^i$  и  $\tilde{\xi}^i$  — координаты точек пространства, в которых находилась точка материала с координатами  $\xi^i$  в начальный и текущий моменты времени, в одной и той же пространственной (эйлеровой) системе координат, используемой для определения лагранжевой системы координат.

текущее положение  $\hat{x}$  в пространстве и вектор скорости  $\mathbf{v}$ , а также локальные наклон профиля  $c$  и вектор  $\hat{\nabla}c$ . Видно, что здесь  $\mathbf{v}$  и  $\hat{\nabla}c$  выбраны так, что  $\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla}c > 0$ . Скорость изменения  $c$  в точке  $\hat{x}$  определяется разностью скорости изменения  $c$  материальной точки  $x$ , т.е.  $\dot{c}$ , и положительной величины  $\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla}c$ . По смыслу в данной ситуации перенос материала сквозь точку  $\hat{x}$  как раз должен уменьшать итоговое значение по сравнению с  $\dot{c}$ .

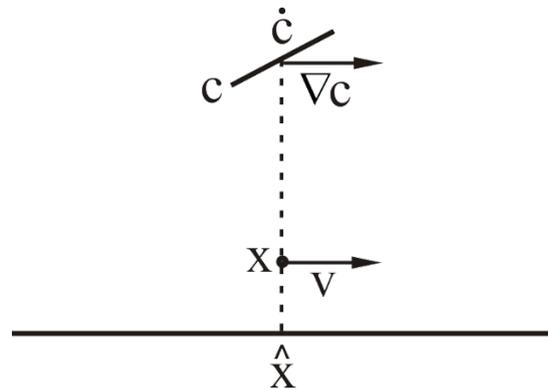


Рис. 2.1.

В частности, ускорение точки континуума выражается как

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \hat{\nabla}) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.9)$$

Пусть, например, нам требуется построить модель движения потока машин, свободно движущихся по дороге. Очевидно ею будет уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_x v = 0$$

при начальном условии

$$v(x, 0) = v_0(x).$$

Уравнение это означает, что скорость материальной частицы  $\xi$  не зависит от времени, т.е.  $v(\xi, t) = v_0(\xi)$ . Это есть решение задачи с лагранжевой точки зрения. Решение этой задачи с эйлеровой точки зрения столь простым не будет по следующей очевидной причине. Частицы-автомобили, имеющие постоянные, но неодинаковые скорости, вынуждены обгонять друг друга относительно дороги — пространственной оси, а это означает нарушение локальной топологии (близости), т.е. гипотезы континуума, и отсутствие непрерывности разыскиваемого решения  $v(x, t)$  по первому аргументу. С той же проблемой мы столкнемся и в рамках лагранжева описания, если соберемся разыскать зависимость  $x = x(\xi, t)$  по полученному решению  $v(\xi, t) = v_0(\xi)$ .

Эйлеровым законом движения называют

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (2.10)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}$  — радиус-вектор точки пространства<sup>7</sup>. То есть, движение считается известным, если в каждой точке области пространства, занимаемой континуумом, в каждый момент времени определена скорость движения континуума. Обычно эйлерово описание движения используется для сред, не обладающих памятью к предыстории движения, таких как многие газы и жидкости. Их состояние может быть полностью охарактеризовано значениями некоторых параметров в текущий момент времени, а информация об их значениях в прошлом является лишней. Очевидно для таких сред эйлерово описание удобнее лагранжева. Для них функция справа (2.10) может даже не быть непрерывной по первому аргументу. Если же она непрерывна, то задача

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}, t), \\ \hat{\mathbf{x}}(t=0) &= \mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.11}$$

имеет решением

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \\ \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{x}\end{aligned}$$

— лагранжев закон движения, то есть данные два подхода являются теоретически эквивалентными и от одного из них всегда можно перейти к другому. *Гипотезой континуума* при эйлеровом описании поэтому уместно считать требование непрерывности поля  $\mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  по первому аргументу.

**Скорость локального аффинного формоизменения.** Материальным дифференцированием (1.7) с учетом (2.2) получаем

$$d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{x},\tag{2.12}$$

что материальная производная аффинора представляет собой линейный оператор, связывающий бесконечно малый материальный отрезок в отсчетной конфигурации и вектор относительной скорости его концов. Данный оператор таким образом описывает скорость локального аффинного формоизменения, но применим только в рамках лагранжева описания. Аналогичный оператор в рамках эйлерова описания должен связывать бесконечно малый материальный отрезок в текущей конфигурации и вектор относительной скорости его концов:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\hat{\mathbf{x}}.\tag{2.13}$$

Используя (2.12) и (1.14), получаем

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}}\tag{2.14}$$

или эквивалентно

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}.\tag{2.15}$$

Нетрудно получить также

$$\mathbf{L} = -\mathbf{F} \cdot \dot{\hat{\mathbf{F}}},\tag{2.16}$$

---

<sup>7</sup> Правильнее этот радиус-вектор было бы поименовать  $\mathbf{y}$  в соответствии с ранее принятым обозначением, однако не вызовет никакой путаницы употребление в аргументах полей обозначения  $\hat{\mathbf{x}}$  — по сути радиуса-вектора материальной точки, занимающей место  $\mathbf{y}$  в пространстве.

$$\dot{\hat{F}} = -\hat{F} \cdot L. \quad (2.17)$$

С помощью диадного представления аффинора (1.11) и (1.20) получается

$$L = \hat{v}\hat{W}, \quad (2.18)$$

то есть оператор  $L$  является (транспонированным) *градиентом скорости*. Он содержит в себе информацию о скорости локального аффинного формоизменения. Этот градиент скорости разлагается на симметричную и антисимметричную части, обозначаемые как

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad (2.19)$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad (2.20)$$

и называемые соответственно *тензором деформации скорости* и *тензором вихря*. Смысл первого названия проясняется из

$$D = \frac{1}{2}(\hat{\nabla} v + \hat{v}\hat{W}) = \overset{\wedge}{\text{def}} v. \quad (2.21)$$

Возвращаясь к (2.10), запишем

$$dv = (D + W) \cdot d\hat{x} \quad (2.22)$$

и рассмотрим материальный отрезок  $d\hat{l}$ , расположенный в текущий момент вдоль любого из главных направлений тензора деформации скорости. Тогда относительная скорость концов этого отрезка складывается из двух составляющих — за счет локальной деформации материала  $D \cdot d\hat{l}$  и его локального вращения  $W \cdot d\hat{l}$ . Первая компонента есть скорость изменения длины этого отрезка, вторая — скорость его поворота. Материальные отрезки вдоль других направлений в дополнение ко всему испытывают поворот и за счет деформации локального объема.

Таким образом, в рамках эйлерова описания имеется лишь один тензор, отвечающий за локальную скорость деформации материала, — тензор деформации скорости  $D$ .

Получим скорости изменения векторов текущего локального базиса. Из (2.13),  $d\hat{x} = d\xi^i \hat{e}_i$  и  $dv = d\xi^i \dot{\hat{e}}_i$  следует

$$\dot{\hat{e}}_i = L \cdot \hat{e}_i, \quad (2.23)$$

откуда и из материального дифференцирования тождества  $\hat{e}^i \cdot \hat{e}_j = \delta_j^i$

$$\dot{\hat{e}}^i = -L^T \cdot \hat{e}^i. \quad (2.24)$$

Из (24) и определения набла-вектора следует

$$\hat{\nabla} = -L^T \cdot \hat{\nabla}. \quad (2.25)$$

Очевидно, что в  $K_0$  все тривиально:  $\dot{\hat{e}}_i = \dot{\hat{e}}^i = \hat{\nabla} = 0$ .

**Спины эллипсоидов деформации.** Меры деформаций вводились нами в терминах правого или левого трехгранников, поэтому и скорости таких мер

уместно находить в этих терминах. Но для этого нам потребуется сначала найти скорости изменения трехгранников.

Меры деформации локального материального объема принципиально определяются только в терминах лагранжева подхода. Следовательно скорости их изменения находятся с использованием материального дифференцирования.

Непрерывность движения континуума ведет к тому, что при  $t \rightarrow t_0$   $\mathbf{p}_i, \hat{\mathbf{p}}_i \rightarrow \mathbf{p}'_i$ , а этот предельный трехгранник является трехгранником главных осей тензора малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , а также трехгранником главных осей тензора деформации скорости при  $t = t_0$ . Очевидно  $\dot{\mathbf{p}}'_i = 0$ . С использованием (1.38), (1.41), (1.42) введем антисимметричные тензоры спинов трехгранников:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.26)$$

— правого  $\mathbf{p}_i$  относительно левого  $\hat{\mathbf{p}}_i$ ,

$$\boldsymbol{\Omega}' = \dot{\mathbf{R}}' \cdot \mathbf{R}'^T = \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{p}_i \Leftrightarrow \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathbf{p}_i \quad (2.28)$$

— правого  $\mathbf{p}_i$ ,

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\hat{\mathbf{R}}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^T = \dot{\hat{\mathbf{p}}}_i \hat{\mathbf{p}}_i \Leftrightarrow \quad (2.29)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_i = \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_i \quad (2.30)$$

— левого  $\hat{\mathbf{p}}_i$ . Из (1.43), (2.26), (2.27) и (2.29) можно получить связь спинов:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \hat{\mathbf{R}}^T. \quad (2.31)$$

С помощью (1.39), (1.40), (2.28) и (2.30) получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\lambda}_i \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{p}_i + \lambda_i \dot{\hat{\mathbf{p}}}_i \mathbf{p}_i + \lambda_i \hat{\mathbf{p}}_i \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\lambda}_i \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{p}_i + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Omega}',$$

откуда и из (2.14), (1.40) имеем

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i + \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Omega}' \cdot \hat{\mathbf{F}} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i + \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \boldsymbol{\Omega}'_{ij} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j, \quad \text{где}$$

компоненты  $\boldsymbol{\Omega}'_{ij}$  определены в базисе  $\mathbf{p}_i$ . Отсюда последовательно получаем

$$\mathbf{L}^T = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \boldsymbol{\Omega}'_{ij} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j,$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i + \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_i} - \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right) \boldsymbol{\Omega}'_{ij} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \hat{\boldsymbol{\Omega}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \boldsymbol{\Omega}'_{ij} \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_j, \quad (2.33)$$

Диагональные компоненты  $\mathbf{D}$  в базисе  $\hat{\mathbf{p}}_i$  согласно (2.32) равны

$$D_{ii} = \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i}, \quad (2.34)$$

а недиагональные —

$$D_{ij} = \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{2\lambda_i\lambda_j} \Omega'_{ij}. \quad (2.35)$$

Компоненты  $\mathbf{W}$  в базисе  $\hat{\mathbf{p}}_i$  согласно (2.33) равны

$$W_{ij} = \hat{\Omega}_{ij} - \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{2\lambda_i\lambda_j} \Omega'_{ij}. \quad (2.36)$$

В (2.35), (2.36) компоненты  $\Omega'_{ij}$  определены в базисе  $\mathbf{p}_i$ . Из (2.35), (2.36) получаем

$$W_{ij} = \hat{\Omega}_{ij} - \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} D_{ij}, \quad (2.37)$$

откуда с помощью (2.31) следует

$$\Omega_{ij} = \hat{\Omega}_{ij} - \Omega'_{ij} = W_{ij} + \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} D_{ij}. \quad (2.38)$$

Из (2.35) следует, что спин правого трехгранника определяется только тензором деформации скоростей, в отличие от спина левого трехгранника и спина  $\mathbf{\Omega}$ , которые согласно (2.37), (2.38) определяются и тензором деформации скоростей, и тензором вихря. При  $t = t_0$  имеем  $\lambda_i, \lambda_j = 1$ , откуда из (22)  $\Omega_{ij} = W_{ij}$ , а спины  $\hat{\mathbf{\Omega}}$ ,  $\mathbf{\Omega}'$  не определены.

**Скорости мер деформаций правого семейства.** Меры деформаций правого семейства определялись (1.52) как

$$\mathbf{e} = e_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i, \quad e_i = f(\lambda_i).$$

Материальное дифференцирование  $\mathbf{e}$  с учетом (2.28) ведет к

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{e}_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i + \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{\Omega}'. \quad (2.39)$$

Выражение (2.39) показывает, что скорость изменения меры вызывается мгновенным изменением кратностей удлинений при фиксированном правом трехграннике и мгновенным поворотом этого трехгранника.

С учетом (2.34), (2.35) нормальные компоненты  $\dot{\mathbf{e}}$  в базисе правого трехгранника есть

$$\dot{e}_i = \lambda_i f'(\lambda_i) D_{ii}, \quad (2.40)$$

а сдвиговые —

$$\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} (e_i - e_j) D_{ij} \text{ при } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ или } \lambda_i f'(\lambda_i) D_{ij} \text{ при } \lambda_i = \lambda_j, \quad (2.41)$$

получаемые предельным переходом. В частных случаях семейства (1.45) скорости мер деформаций имеют компоненты:

$$m=1 \quad \lambda_i \lambda_j D_{ij}, \quad (2.42)$$

$$m=-1 \quad D_{ij} / \lambda_i \lambda_j, \quad (2.43)$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} D_{ij}, \quad (2.44)$$

$$m = -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{\lambda_i + \lambda_j} D_{ij}, \quad (2.45)$$

$$m = 0 \quad \text{нормальные } D_{ii}, \text{ сдвиговые } \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \ln\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) D_{ij}. \quad (2.46)$$

В (2.40) - (2.46), как и в (2.34), (2.35),  $D_{ij}$  есть компоненты тензора  $\mathbf{D}$  в базе левого трехгранника. Компоненты скоростей мер деформации (2.42) и (2.43) можно интерпретировать как ковариантные и контравариантные компоненты  $D_{ij}$  в деформированном базисе, начально замороженном вдоль векторов правого трехгранника. При  $\lambda_i \rightarrow \lambda_j$  (2.46)<sub>2</sub> разлагается в степенной ряд, начинающийся с

$$\left\{1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} - 1\right)^2 + \dots\right\} D_{ij}. \quad (2.47)$$

Отсюда видно, что при  $t \rightarrow t_0$ , когда  $\lambda_i, \lambda_j \rightarrow 1$ , скорости всех пяти рассмотренных членов семейства мер деформаций стремятся к тензору деформации скорости  $\mathbf{D}$ , совпадающему в этот момент с  $\dot{\mathbf{e}}$ , причем быстрее всех это делает логарифмическая мера. С использованием (2.40), (2.41) и (1.44) может быть показано и что скорость любой меры деформаций вблизи отсчетной конфигурации сводится к  $\mathbf{D}$ .

Полученные соотношения могут быть записаны в безындексном виде. Например, (2.42) принимает вид

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.48)$$

**Скорости мер деформаций левого семейства.** Меры деформаций левого семейства вводились (1.53) как

$$\hat{\mathbf{e}} = e_i \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i.$$

Но нам сейчас понадобится связь мер левого и правого семейств (1.54):

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{R},$$

дифференцируя которую, получаем

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{R}^T \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} \cdot \mathbf{R}) + \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{e}}^\Omega \cdot \mathbf{R}, \quad (2.49)$$

где

$$\hat{\mathbf{e}}^\Omega \equiv \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (2.50)$$

и следует считать скоростью деформаций левого семейства, поскольку компоненты  $\hat{\mathbf{e}}^\Omega$  в базе левого трехгранника равны компонентам  $\dot{\mathbf{e}}$  в базе правого трехгранника. Соотношение (2.48) взаимно-однозначно связывает скорости мер деформаций правого и левого семейств.

**Другие меры скоростей деформаций.** Определенные выше меры скорости деформации (за исключением  $\mathbf{D}$ ) страдают туманностью геометрического смысла.

Поэтому рассмотрим другие точки зрения на определение мер скоростей деформаций

Сначала найдем материальную производную меры  $\hat{e}$ :

$$\dot{\hat{e}} = \dot{e}_i \hat{p}_i \hat{p}_i + \hat{\Omega} \cdot \hat{e} - \hat{e} \cdot \hat{\Omega}. \quad (2.51)$$

Выражение (2.51) показывает, что скорость изменения меры вызывается мгновенным изменением кратностей удлинений при фиксированном левом трехграннике и мгновенным поворотом этого трехгранника. В этом выражении, как и в аналогичном выражении для скоростей мер правого семейства, обе компоненты сложного движения имеют ясный кинематический смысл; в тензорах  $\dot{e}, \hat{e}^\Omega, \dot{\hat{e}}$  же все смешано.

Имеются соображения, что при построении уравнений состояния могут быть полезны меры

$$e^{\Omega'} \equiv \dot{e}_i p_i p_i = \dot{e} - \Omega' \cdot e + e \cdot \Omega', \quad (2.52)$$

$$\hat{e}^{\hat{\Omega}} \equiv \dot{e}_i \hat{p}_i \hat{p}_i = \dot{\hat{e}} - \hat{\Omega} \cdot \hat{e} + \hat{e} \cdot \hat{\Omega}, \quad (2.53)$$

описывающие мгновенные скорости деформирования эллипсоидов деформации (исключая их повороты). Связь таких мер очевидна:

$$\hat{e}^{\hat{\Omega}} = R \cdot e^{\Omega'} \cdot R^T. \quad (2.54)$$

Неудобство таких мер по сравнению с ранее введенными заключается в их неголономности, причина которой кроется в использовании неголономных реперов правого и левого трехгранников, однако законы состояния некоторых (пластических) сред сами по себе не могут быть голономными.

Если говорить о пластичности, то во всех введенных выше мерах, за исключением лишь  $D$ , смущает содержащаяся в них абсолютная память об отсчетной конфигурации. С физической точки зрения такая память допустима лишь для упругих сред.

Но возможно развить идею определения скорости относительно подвижной системы отсчета. При определении скоростей  $\dot{e}, \hat{e}^\Omega, \dot{\hat{e}}$  была молчаливо использована некая пространственная система отсчета, из которой мы следили за движением точек континуума, отмечая их текущие положения радиус-векторами. Пусть репер  $a_i$  произвольно движется (вращается или даже деформируется) относительно данной системы отсчета. Скорость вектора и тензора относительно  $a_i$  запишется как

$$q^{a_i} \equiv (q \cdot a^i) a_i = \dot{q} + q \cdot \dot{a}^i a_i, \quad (2.55)$$

$$Q^{a_i} \equiv (a^i \cdot Q \cdot a^j) a_i a_j = \dot{Q} + \dot{a}^i \cdot Q \cdot a^j a_i a_j + a^i \cdot Q \cdot \dot{a}^j a_i a_j, \quad (2.56)$$

где  $a^i$  — взаимный к  $a_i$  репер. Такие скорости тензоров деформаций при подборе конкретного репера отличает ясность смысла, что при построении уравнений состояния играет важную роль.

Если в качестве репера взят текущий основной базис  $\hat{e}_i$ , то получаем (с использованием (2.56) и (2.24))

$$\dot{Q} - L \cdot Q - Q \cdot L^T \equiv Q^{OI} \quad (2.57)$$

— производную Олдройда, если же берется текущий взаимный базис  $\hat{e}^i$ , то с использованием (2.56) и (2.23) получаем

$$\dot{Q} + L^T \cdot Q + Q \cdot L \equiv Q^{CR} \quad (2.58)$$

— производную Коттера - Ривлина. Эти две производные представляют собой примеры конвективных производных, потому что определены с точки зрения деформируемого репера. Можно показать, что

$$A^{CR} = D. \quad (2.59)$$

Если репер вращается как жесткое целое, то соответствующие производные называются *коротационными*. Примерами таких производных могут служить введенные в (2.50), (2.52) и (2.53) скорости  $Q^\Omega$ ,  $Q^{\hat{\Omega}}$ ,  $Q^{\Omega'}$ , первая из которых называется *R-производной*. Если репер вращается тензором вихря  $W$ , то соответствующую коротационную производную

$$\dot{Q} - W \cdot Q + Q \cdot W \equiv Q^J \quad (2.60)$$

называют *производной Яуманна*. Здесь читателю надлежит определить яуманнову производную радиус-вектора материальной частицы вращающегося как жесткое целое жидкого объема.

**Скорости изменения объема и материальной площадки.** Под скоростью изменения локального материального объема  $dV$  в текущей конфигурации будем понимать отношение  $\dot{dV}/dV$ . Объемы  $dV$  и  $d\hat{V}$  малого материального эллипсоида в начальной и текущей конфигурациях связаны как  $d\hat{V} = JdV$ , где  $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , откуда

$$\dot{d\hat{V}}/d\hat{V} = \dot{J}/J = \dot{\lambda}_1/\lambda_1 + \dot{\lambda}_2/\lambda_2 + \dot{\lambda}_3/\lambda_3.$$

С использованием (34) поэтому

$$\dot{d\hat{V}}/d\hat{V} = sp(D), \quad (2.61)$$

а с использованием (21) —

$$\dot{d\hat{V}}/d\hat{V} = \dot{J}/J = \hat{V} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.62)$$

Нетрудно выразить эту величину и через скорости мер деформаций. Например, через логарифмическую меру с использованием (2.46) получаем

$$\dot{d\hat{V}}/d\hat{V} = sp(\hat{H}^\Omega). \quad (2.63)$$

Определим скорость изменения нормали к материальной площадке. Дифференцируя (1.57)

$$\mathbf{n} = \kappa F^T \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

где  $\kappa \equiv (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{V}^2 \cdot \hat{\mathbf{n}})^{-1/2} \neq 0$ , получаем

$$0 = \dot{\kappa} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} + \kappa \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} + \kappa \mathbf{F}^T \cdot \dot{\hat{\mathbf{n}}},$$

откуда с использованием (2.15)

$$\dot{\kappa} \hat{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} - \kappa \dot{\hat{\mathbf{n}}}.$$

Дифференцируя  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ , получаем  $\dot{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ . Далее

$$\dot{\kappa} / \kappa = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

и затем

$$\dot{\hat{\mathbf{n}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}. \quad (2.64)$$

**Запись уравнений совместности в дивергентной форме.** Для достаточно гладких (кусочно дважды непрерывно дифференцируемых) отображений (1.1) градиент места и скорость материальной частицы связаны. Соответствующее уравнение совместности

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{v} \nabla, \quad (2.65)$$

записанное в лагранжевых переменных, следует из (1.11) и (2.2). Из (2.15) с учетом (2.18) получаем то же уравнение

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{v} \hat{\nabla}, \quad (2.66)$$

записанное в эйлеровых переменных.

Общие полевые уравнения континуума принято записывать в дивергентной форме, в лагранжевых

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\chi} \quad (2.67)$$

либо эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t} = \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\Psi}} + \hat{\boldsymbol{\chi}}, \quad (2.68)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ ,  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ ,  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\chi}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$  — плотности, потоки и источники полевой величины в лагранжевых и эйлеровых переменных. Данный формат записи изменения распределения полевой величины материального континуума в пространстве и времени оказывается удобным с математической точки зрения, в частности, для вывода условий на границах и численного интегрирования. Больше примеров его применения будет дано в следующих главах. В качестве полевых переменных в (2.66), (2.67) могут выступать произвольные тензорные (полярные или аксиальные) величины. Данные уравнения называются *уравнениями баланса* (в локальной форме).

Для приведения уравнения (2.65) к форме (2.67) его необходимо транспонировать и применить тождество  $\nabla \cdot (\mathbf{I}\mathbf{v}) = \nabla \mathbf{v}$ , в результате чего получим

$$\dot{\mathbf{F}}^T - \nabla \cdot (\mathbf{I}\mathbf{v}) = 0. \quad (2.69)$$

Таким образом, в терминах (2.67)  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}^T$ ,  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\chi} \equiv \mathbf{0}$ .

Уравнение (2.66) приводится к форме (2.68) с помощью тождества Пиолы

$$\hat{\nabla} \cdot (J^{-1}\mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad (2.70)$$

которое доказывается с помощью (1.55) и теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\int_{\hat{V}} \hat{\nabla} \cdot (J^{-1}\mathbf{F}) d\hat{V} = \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (J^{-1}\mathbf{F}) d\hat{S} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{I} dV = \mathbf{0},$$

откуда в силу произвольности объема следует (2.70). Уравнение (2.66) приводится к виду  $J^{-1}\dot{\mathbf{F}}^T - J^{-1}\mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Далее, учитывая (2.6) и (2.62), пишем  $\partial(J^{-1}\mathbf{F}^T) / \partial t = (J^{-1}\mathbf{F}^T) \cdot -\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla}(J^{-1}\mathbf{F}^T) = J^{-1}\dot{\mathbf{F}}^T - J^{-1}\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}\mathbf{F}^T - \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla}(J^{-1}\mathbf{F}^T)$ . Далее записываем тождества  $\hat{\nabla} \cdot (J^{-1}\mathbf{v}\mathbf{F}^T) = J^{-1}\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}\mathbf{F}^T + \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla}(J^{-1}\mathbf{F}^T)$  и  $\hat{\nabla} \cdot (J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{v}) = \hat{\nabla} \cdot (J^{-1}\mathbf{F})\mathbf{v} + J^{-1}\mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v} = J^{-1}\mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v}$ , где в последнем учтено (2.70), и собирая все вместе, приходим к

$$\frac{\partial(J^{-1}\mathbf{F}^T)}{\partial t} - \hat{\nabla} \cdot (J^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{F}^T)) = 0. \quad (2.71)$$

Таким образом, в терминах (2.68)  $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = J^{-1}\mathbf{F}^T$ ,  $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = J^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{F}^T)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\chi}} \equiv \mathbf{0}$ .

### 3. Силы и напряжения в континууме

**Балансовые уравнения. Баланс массы закрытой системы.** Дадим здесь общий метод записи изменения распределения полевой величины материального континуума в пространстве и времени, использованный выше для меры искажения его локального элемента.

Рассмотрим деформируемый материальный континуум, заполняющий область пространства  $\hat{V}(t)$  с границей  $\hat{S}(t)$ . Для произвольной тензорной величины, определенной в точках континуума и заданной объемной плотностью  $\hat{\phi} = d\hat{\Phi}(\hat{x}, t) / d\hat{V}$ , записывается уравнение баланса

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}(t)} \hat{\phi} d\hat{V} = - \int_{\hat{S}(t)} \hat{\Psi} \cdot \hat{n} d\hat{S} + \int_{\hat{V}(t)} (\chi_i + \chi_e) d\hat{V}, \quad (3.1)$$

где  $\hat{n}$  — внешняя нормаль к границе, а  $\hat{\Psi}$  — поток величины, втекающий внутрь материала через границу,  $\chi_i(\hat{x}, t)$ ,  $\chi_e(\hat{x}, t)$  — объемные плотности внутренних и внешних источников рассматриваемой величины. Переменные  $\hat{\Psi}$  и  $\chi_e$  позволяют учесть контактное либо полевое внешнее воздействие на материальный объем.

Для вывода локальной формы уравнения баланса потребуется лемма [Овс, Геор]

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}(t)} \hat{\phi} d\hat{V} = \int_{\hat{V}(t)} (\dot{\hat{\phi}} + \hat{\phi} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) d\hat{V}. \quad (3.2)$$

С помощью (2.6) выражение под интегралом в правой части можно преобразовать

$$\dot{\hat{\phi}} + \hat{\phi} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \hat{\phi}). \quad (3.3)$$

Применяя к (3.1) с учетом (3.2) теорему Гаусса – Остроградского и

$$\int_{\hat{V}(t)} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \hat{\phi} + \hat{\Psi}) - \chi_i - \chi_e \right) d\hat{V} = 0, \quad (3.4)$$

откуда в силу произвольности рассматриваемого материального объема следует локальная форма уравнения баланса в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = -\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \hat{\phi} + \hat{\Psi}) + \chi_i + \chi_e. \quad (3.5)$$

В лагранжевых переменных это уравнение будет выглядеть так

$$\dot{\hat{\phi}} + \hat{\phi} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = -\hat{\nabla} \cdot \hat{\Psi} + \chi_i + \chi_e. \quad (3.6)$$

Уравнение (2.71) может быть записано в форме (3.5), для чего необходимо положить  $\hat{\phi} = J^{-1} \mathbf{F}^T$ ,  $\hat{\Psi} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{v}$ ,  $\chi_i = \chi_e \equiv 0$ . Подставляя эти выражения в (3.6) и используя (1.20), получаем (2.69).

С помощью (3.5) и (3.6) можно записать уравнение баланса массы в локальной форме в эйлеровых и лагранжевых переменных. Для закрытой (не обменивающейся массой) системы

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}(t)} \hat{\rho} d\hat{V} = 0, \quad (3.7)$$

где  $\hat{\rho}(\hat{\mathbf{x}}, t) = dm / d\hat{V}$  — плотность массы в актуальной конфигурации, поэтому в терминах (3.1) будет  $\hat{\phi} = \hat{\rho}, \hat{\Psi} = \mathbf{0}, \chi_i = \chi_e \equiv 0$  и мы немедленно получаем искомые уравнения

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \hat{\rho}) = 0 \quad (3.8)$$

и

$$\dot{\hat{\rho}} + \hat{\rho} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.9)$$

Выведем балансовые уравнения для массовой плотности величины  $\hat{\phi} = \hat{\phi} / \hat{\rho} = d\hat{\Phi}(\hat{\mathbf{x}}, t) / dm$ , которая востребована для записи балансовых уравнений механики и термодинамики континуума. Из (3.5) с учетом (3.8) следует

$$\hat{\rho} \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \hat{\phi} \right) = -\hat{\nabla} \cdot \hat{\Psi} + \chi_i + \chi_e, \quad (3.10)$$

а из (3.6) с учетом (3.9) —

$$\hat{\rho} \dot{\hat{\phi}} = -\hat{\nabla} \cdot \hat{\Psi} + \chi_i + \chi_e. \quad (3.11)$$

Заметим, что из (3.10) и (3.11) невозможно вывести (3.8) и (3.9).

Балансовые уравнения в локальной форме полезно получить другим путем. Рассмотрим произвольный пространственный объем  $\hat{V}$  с неподвижными границами  $\hat{S}$ , в пределах которого определен материальный континуум с определенными на нем полями объемных плотностей величин. Для этого объема будет справедливо уравнение баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}} \hat{\phi} d\hat{V} = - \int_{\hat{S}} (\hat{\phi} \mathbf{v} + \hat{\Psi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} (\chi_i + \chi_e) d\hat{V}, \quad (3.12)$$

в котором учтен *конвективный* поток величины  $\hat{\phi}$  вследствие движения материала сквозь неподвижную границу  $\hat{S}$ . Поток  $\hat{\Psi}$  величины  $\hat{\phi}$ , попадающий в объем через материальную границу, принято называть *кондуктивным*. Из (3.12) с учетом произвольности рассматриваемого пространственного объема на материальном континууме последовательно вытекают (3.5) и (3.6) и далее (3.10) и (3.11) для массовых плотностей — привычным путем. Иногда для вывода (3.10) и (3.11) к локальной форме (3.12) (уравнению (3.5)), записанной для массовой плотности  $\hat{\phi}$ ,

$$\frac{\partial(\hat{\rho}\hat{\phi})}{\partial t} = -\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v}\hat{\rho}\hat{\phi} + \hat{\Psi}) + \chi_i + \chi_e. \quad (3.13)$$

применяют тождество

$$\frac{\partial(\hat{\rho}\hat{\phi})}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v}\hat{\rho}\hat{\phi}) = \hat{\rho}\dot{\hat{\phi}} \quad (3.14)$$

и последовательно получают (3.11) и (3.10).

### Балансовые уравнения механики континуума.

Первый из этих законов обычно называют уравнением баланса количества движения, а второй — уравнением баланса момента количества движения.

Законы движения — общие феноменологические законы, они не требуют, чтобы мы знали природу сил или моментов, они только требуют умения их измерять. Силы и моменты — это то, что изменяет количество и момент количества движения тел.

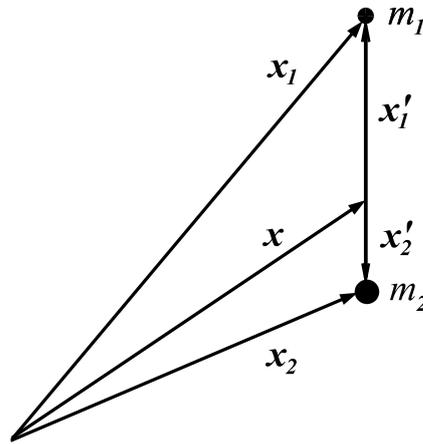


Рис. 1

**Динамические структуры системы материальных точек.** Рассмотрим систему материальных точек<sup>8</sup> (иллюстрируемую парой материальных точек на рис. 3.1). Масса такой системы найдется как

$$m \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha}, \quad (1)$$

радиус-вектор ее центра масс

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \hat{\mathbf{x}}_{\alpha}, \quad (2)$$

скорость ее центра масс

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{m} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}. \quad (3)$$

<sup>8</sup> Rivlin R.S. Generalized mechanics of continuous media / Mechanics of generalized continua (Ed. E.Kroner). Springer-Verlag, 1968. P.1-17.

С помощью  $\hat{\mathbf{x}}$  и  $\mathbf{v}$  радиус-вектор и скорость любой точки представляется

$$\hat{\mathbf{x}}_\alpha \equiv \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}'_\alpha, \quad \mathbf{v}_\alpha \equiv \mathbf{v} + \mathbf{v}'_\alpha. \quad (4)$$

Количество движения

$$\mathbf{q} \equiv m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = m\mathbf{v}, \quad (5)$$

главный вектор внешних сил

$$\mathbf{f} \equiv \sum_\alpha \mathbf{f}'_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{f}_\alpha, \quad (6)$$

где  $\mathbf{f}'_\alpha$  — сила действия на  $\alpha$ -ю материальную точку других материальных точек системы и внешних по отношению к ней тел, а  $\mathbf{f}_\alpha$  — только внешние силы.

Момент количества движения относительно точки, отмечаемой радиус-вектором  $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} I \equiv \sum_\alpha m_\alpha (\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{y}) \times \mathbf{v}_\alpha &= m(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{v} + \sum_\alpha m_\alpha (\hat{\mathbf{x}}'_\alpha - \mathbf{y}) \times \mathbf{v}'_\alpha \equiv \\ &\equiv (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{q} + \boldsymbol{\chi} \end{aligned} \quad (7)$$

и главный момент внешних сил

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \equiv \sum_\alpha (\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{y}) \times \mathbf{f}'_\alpha &= \sum_\alpha (\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{y}) \times \mathbf{f}_\alpha = \\ &= (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{f} + \sum_\alpha (\hat{\mathbf{x}}'_\alpha - \mathbf{y}) \times \mathbf{f}_\alpha \equiv (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{f} + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для выражения (6) и (8) через внешние силы был использован принцип действия и противодействия для материальных точек. В (7) и (8) естественным образом выделяются соответствующие моменты относительно центра масс системы — *собственный момент количества движения*  $\boldsymbol{\chi}$  и *собственный момент*  $\mathbf{k}$ .

В инерциальной системе отсчета для каждой материальной точки справедливо

$$m_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha, \quad (9)$$

для всей системы материальных точек

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad \dot{I} = \mathbf{m}, \quad (10)$$

откуда с использованием (5) - (8)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{k}. \quad (11)$$

Уравнение (11)<sub>2</sub> получено вычитанием свертки  $(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times$  с (10)<sub>1</sub> из (10)<sub>2</sub> и по существу является *уравнением баланса собственного момента количества движения* дискретной системы. Законы (11) независимы, однако следуют из законов (9). Внимание дискретной системе материальных точек здесь уделено по следующей причине. Нет оснований считать, что как угодно малая материальная частица не состоит в свою очередь из других частиц. С другой стороны, в нашем представлении континуума мы всегда ограничиваемся частицами определенного, хотя и малого по сравнению с размером тела, масштаба, считая их неделимыми. Дискретная система материальных точек была рассмотрена выше как модель такой частицы. Для такой неделимой частицы (11)<sub>2</sub> будет независимым от (11)<sub>1</sub> фундаментальным законом. Такая модель частицы по сути трактует ее

деформируемым тельцем. Если, в частном случае, считать моделью частицы абсолютно жесткое тельце, называемое *телом-точкой*, то и в этом случае закон (11)<sub>2</sub> будет независимым. В другом частном случае, когда континуум мыслится состоящим из частиц — материальных точек, закон (11)<sub>2</sub>, конечно, пропадает. Такой континуум называют *классическим*, другие же, рассмотренные выше, — *обобщенными*: континуум, состоящий из тел-точек, называют континуумом Коссера, а континуум, состоящий из деформируемых телец, — микроморфным континуумом (Миндлина - Эрингена).

**Динамические структуры континуума.** Для каждого элементарного объема материала определена его масса  $dm$ , поэтому для всего тела  $B$  имеем

$$m \equiv \int_B dm. \quad (12)$$

Количество движения определяется как

$$\mathbf{q} \equiv \int_B \mathbf{v} dm, \quad (15)$$

а момент количества движения относительно точки, отмечаемой радиус-вектором  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{I} \equiv \int_B (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{v} dm + \int_B \boldsymbol{\chi} dm = \int_B (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{v} dm + \boldsymbol{\chi}_B. \quad (16)$$

Здесь  $(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{v} dm$  — момент количества движения элементарного объема тела  $B$ , сосредоточенного в точке  $\hat{\mathbf{x}}$ , относительно точки  $\mathbf{y}$ ,  $\boldsymbol{\chi} dm$  — момент количества движения того же элементарного объема относительно точки  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$ , т.е. собственный момент количества движения элементарного объема. Вектор  $\boldsymbol{\chi}_B$  следует считать частью собственного момента количества движения тела  $B$ , образуемой собственными моментами количества движения составляющих это тело элементарных объемов. Заметим, что первое слагаемое в (16) не разделяется на моменты количества движения тела относительно  $\mathbf{y}$  и относительно его центра масс, так как впоследствии нас будет интересовать собственное вращение элементарного объема, а не тела. Для нахождения материальной производной  $\mathbf{q}, \mathbf{I}$  нужно принять во внимание, что  $\rho dV = dm$  — масса элементарного объема

материала и поэтому  $\dot{dm} = 0$ , тогда

$$\dot{\mathbf{q}} = \int_B \mathbf{a} dm, \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{I}} = \int_B (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times \mathbf{a} dm + \dot{\boldsymbol{\chi}}_B. \quad (18)$$

Для каждого элементарного объема материала, сосредоточенного в  $\hat{\mathbf{x}}$ , определена действующая на него сила  $d\mathbf{f}$  со стороны тела  $A$ , поэтому для всего тела  $B$  имеем

$$\mathbf{f}_B \equiv \mathbf{f}(B, A) \equiv \int_B d\mathbf{f}' = \int_B d\mathbf{f}, \quad (19)$$

где  $d\mathbf{f}'$  — действующая на элементарный объем сила со стороны тела  $A$  и оставшейся части тела  $B$ . Для момента же имеем

$$\mathbf{m}_B \equiv \mathbf{m}(B, A) \equiv \int_B (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times d\mathbf{f}' + \int_B d\mathbf{k} = \int_B (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times d\mathbf{f} + \mathbf{k}_B. \quad (20)$$

Здесь  $(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \times d\mathbf{f}$  — момент силы  $d\mathbf{f}$ , действующей со стороны тела  $A$  на элементарный объем тела  $B$ , сосредоточенный в  $\hat{\mathbf{x}}$ , относительно точки  $\mathbf{y}$ ,  $d\mathbf{k}$  — момент, действующий со стороны тела  $A$  на тот же элементарный объем относительно точки  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$ , т.е. собственный момент, действующий на элементарный объем, называемый еще *моментом-парой*. Вектор  $\mathbf{k}_B$  следует считать частью собственного момента тела, вызванную действием моментов-пар. Заметим, что первое слагаемое в (20) не разделяется на моменты сил относительно  $\mathbf{y}$  и относительно центра масс тела, так как впоследствии нас будет интересовать собственный момент, действующий на элементарный объем, а не на тело. Для получения выражений (19), (20) через внешние силы использован принцип действия и противодействия (26), (28) для тел-точек, доказываемый ниже.

В инерциальной системе отсчета для элементарного объема тела  $B$

$$ad\mathbf{m} = d\mathbf{f}' \quad (21)$$

а для тела  $B$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_B, \quad \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{m}_B \quad (22)$$

Из (22) с использованием (17) - (20) получаем соотношения

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_B, \quad \dot{\boldsymbol{\chi}}_B = \mathbf{k}_B, \quad (23)$$

аналогичные соотношениям (11) для системы материальных точек. Уравнение (23)<sub>2</sub> является балансовым уравнением той части собственного момента количества движения континуального тела, которая вызвана действием моментов-пар. Это уравнение не следует из (21). Если же частица тела сводится к материальной точке, то для нее

$$\boldsymbol{\chi} = 0, \quad \mathbf{k} = 0, \quad (24)$$

а уравнение (23)<sub>2</sub> для тела пропадает.

**Принцип действия и противодействия** для материальных точек и тел, состоящих из классического континуума, может быть доказан на основе балансовых уравнений количества и момента количества движения и гипотезы (24). Рассмотрим пару взаимодействующих тел, не подверженную действию внешних сил. В инерциальной системе отсчета

$$\dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2 = 0, \quad \dot{\mathbf{l}}_1 + \dot{\mathbf{l}}_2 = 0. \quad (25)$$

Используя балансовые уравнения количеств движения для каждого тела, из первого уравнения получим

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1. \quad (26)$$

Используя балансовые уравнения моментов количества движения для каждого тела, из второго уравнения

$$\mathbf{m}_2 = -\mathbf{m}_1. \quad (27)$$

Если в качестве тел рассматриваются материальные точки, то из второго (25) и балансовых уравнений количеств и моментов количества движения следует требование

$$(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1) \times \mathbf{f}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

означающее параллельность обоих векторов сил линии, соединяющей материальные точки. Соотношения (26), (28) эквивалентны ньютоновскому принципу действия и противодействия для материальных точек, тогда как (26) справедливо и для тел, состоящих из классического континуума. В более общем случае взаимодействия тел-точек или состоящих из них тел (26) - (28) требуют дополнительного предположения

$$\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1,$$

в чем читателю предлагается убедиться.

Для дальнейшего исследования законов движения нам потребуется рассмотреть вопрос зависимости различных характеристик движения и его причин от системы отсчета.

**Замена системы отсчета.** В однородном, лишенном всяких меток пространстве невозможно обнаружить движение. Поэтому в механике вводится некая рукотворная конструкция, называемая *телом отсчета*. Для этого в рассмотрение вводится репер, содержащий вершину и три исходящих из нее некопланарных “вектора”: например, берем три деревянные палочки со стрелками и жестко скрепляем их. Такое абсолютно твердое тело — тело отсчета — никак не привязано к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. Невозможно также и сказать, остается ли ориентация тела отсчета фиксированной относительно абсолютного пространства или она как-то меняется. Таким образом, невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела (материального континуума) относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения точки материального континуума в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной, называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Тело отсчета, снабженное часами, называется *системой отсчета*. Мы видим, что имеется естественный произвол выбора системы отсчета.

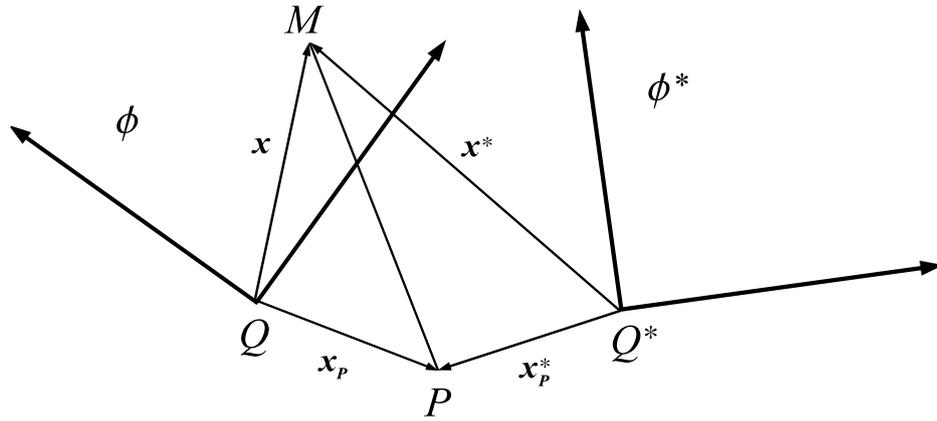


Рис. 3.2

Рассмотрим две системы отсчета —  $\phi$  и  $\phi^*$ . Будем считать, что часы этих систем синхронизированы и идут одинаково, т. е.

$$t^* = t. \quad (29)$$

Поскольку мы умеем измерять длины и углы с помощью соответствующих инструментов, то можем выбрать векторные реперы обеих систем ортонормированными и правыми. Тогда их связь  $\mathbf{a}_i^* = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{a}_i$  в любой момент времени осуществляется с помощью собственно ортогонального тензора. Пусть  $\mathbf{x}_0$  — некоторое фиксированное место в системе отсчета  $\phi$ . В системе отсчета  $\phi^*$  это место изменяется во времени:  $\mathbf{x}_0^*(t)$ . Мы примем, что в начальный момент времени наши системы отсчета совпадают:

$$\mathbf{x}_0^*(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{O}(0) = \mathbf{I}. \quad (30)$$

Связь радиусов-векторов произвольной точки в двух системах отсчета дается выражением

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{O}(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (31)$$

Рассмотрим две произвольные точки пространства, представимые векторами  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  в системе отсчета  $\phi$ . Эти точки, очевидно, не зависят от системы отсчета, хотя радиус-векторы их мест зависят. Вектор  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  с началом в первой точке и концом во второй зависит только от пары точек и не зависит от системы отсчета. При замене системы отсчета (31) этот вектор преобразуется по закону

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^* = \mathbf{O} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (32)$$

Этот закон попросту связывает касательные пространства наблюдателей.

Рассмотрим теперь линейный оператор  $\mathbf{T}$ , связывающий два не зависящих от системы отсчета вектора,  $\mathbf{z} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$ . Такой оператор не зависит от системы отсчета.

С точки зрения второй системы отсчета  $\mathbf{y}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{z}$  и  $\mathbf{z}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{y}^*$ , откуда преобразование данного тензора при замене системы отсчета имеет вид

$$T^* = O \cdot T \cdot O^T. \quad (33)$$

Не зависящий от системы отсчета скаляр преобразуется при ее замене как

$$\alpha^* = \alpha. \quad (34)$$

Таким образом, образы чисто геометрических объектов, не зависящих от системы отсчета, преобразуются в соответствии с законом преобразования касательных пространств систем отсчета. В механике же эти объекты выступают как значения функций, характеризующих движение тел и причины этого движения. Движение рассматривается всегда по отношению к системе отсчета, поэтому такие переменные в общем могут зависеть от системы отсчета. Закон связи таких объектов при замене системы отсчета может быть получен с помощью определения этих объектов и (31).

**Преобразование переменных трансляционного движения при замене системы отсчета.** Определим на пространстве мест векторные поля, характеризующие кинематику материальной точки: места  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ , скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t)$  и ускорения  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, t)$ . В силу (29) для определения скорости и ускорения в любой системе отсчета мы пользуемся

дифференциальными операторами  $\frac{d}{dt}$ ,  $\frac{d^2}{dt^2}$ , что означает независимость этих

правил от системы отсчета. Запишем  $\mathbf{v}^* \equiv (\dot{\hat{\mathbf{x}}})^*$  и  $\mathbf{a}^* \equiv (\ddot{\hat{\mathbf{x}}})^*$ . Однако сами скорость и ускорение от системы отсчета зависят. Связь скоростей имеет вид

$$\mathbf{v}^* = O \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}_0^* + \mathbf{\Omega} \cdot (\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}_0^*), \quad (35)$$

где  $\mathbf{\Omega} = \dot{O} \cdot O^T$ , а связь ускорений —

$$\mathbf{a}^* = O \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}_0^* + 2\mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_0^*) + (\dot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Omega}^2) \cdot (\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}_0^*). \quad (36)$$

Здесь  $\mathbf{v}_0^*$  и  $\mathbf{a}_0^*$  — скорость и ускорение точки  $\mathbf{x}_0$  в системе отсчета  $\phi^*$ ,  $2\mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_0^*)$  — кориолисово ускорение — ускорение в  $\phi^*$ , отвечающее скорости материальной точки относительно  $\mathbf{x}_0^*$  в  $\phi^*$  и спину  $\phi$  относительно  $\phi^*$ ,  $\mathbf{\Omega}^2 \cdot (\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}_0^*)$  — центростремительное ускорение, вызываемое переносом материальной точки относительно  $\phi^*$ ,  $\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot (\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}_0^*)$  — эйлерово ускорение — скорость изменения угловой скорости  $\phi$  относительно  $\phi^*$ . Существует группа систем отсчета, в которой вектор  $\mathbf{a}$  не зависит от системы отсчета. Ее образуют *галилеевы преобразования* с  $\mathbf{a}_0^* \equiv \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{0}$ , связывающие системы отсчета, поступательно и с постоянной скоростью движущиеся относительно друг друга (постоянный во времени разворот возможен).

Масса тела по определению зависит только от него самого, и следовательно от системы отсчета не зависит:

$$m^* = m. \quad (37)$$

Сила по определению зависит только от пары тел, и следовательно от системы отсчета не зависит:

$$\mathbf{f}_B^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{f}_B. \quad (38)$$

Пусть сейчас система отсчета  $\phi$  — инерциальная, а  $\phi^*$  — любая. Закон баланса количества движения для тела  $B$  в инерциальной системе отсчета

$$\mathbf{f}_B = m\mathbf{a} \quad (39)$$

зависим от системы отсчета, но с использованием (36) - (38) может быть записан в произвольной  $\phi^*$ :

$$\mathbf{f}_B^* = m^* (\mathbf{a}^* - \mathbf{a}_0^* - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_0^*) - (\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\Omega}^2) \cdot (\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}_0^*)). \quad (40)$$

Вид закона поменялся, что свидетельствует о его зависимости от системы отсчета. В правой части появился хвост дополнительных слагаемых, содержащих характеристики движения произвольной системы отсчета относительно инерциальной. Эти слагаемые, называемые «силами инерции», вызываются переходом к неинерциальной системе отсчета.

**Преобразование переменных вращательного движения при замене системы отсчета.** Момент по определению зависит только от пары тел, и следовательно от системы отсчета не зависит:

$$\mathbf{m}_B^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{m}_B. \quad (41)$$

С помощью (20), (32) и (38) из (41) получаем

$$\mathbf{k}_B^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{k}_B,$$

а так как это выражение справедливо для произвольного тела, то справедливо и для любой его точки:

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{k} \quad (42)$$

т.е. вектор момента-пары независим от системы отсчета.

Выясним изменение  $\chi_B$  при замене системы отсчета. Так как  $\chi_B$  есть просто интеграл  $\chi$  по телу, достаточно рассмотреть произвольную точку-тело  $b$  тела  $B$ , являющуюся абсолютно жестким тельцем, — интересующий нас закон для нее будет точно таким же. Пусть абсолютно жесткое тельце вращается вокруг своего центра масс со спином  $\mathbf{A}$  (или угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{A}$ ). Если  $\hat{\mathbf{x}}'$  — радиус-вектор точки тельца относительно его центра масс,  $\mathbf{v}' = \dot{\hat{\mathbf{x}}}'$ , то для тельца имеет место эйлеров закон движения

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}' = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}'. \quad (43)$$

Вычислим для нашего тельца собственный момент количества движения и скорость его изменения. Сначала найдем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}' \times \mathbf{v}' &= \hat{\mathbf{x}}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}') = (\hat{\mathbf{x}}' \cdot \hat{\mathbf{x}}' \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}' \hat{\mathbf{x}}') \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv \\ &\equiv (sp(\mathbf{E}') \mathbf{I} - \mathbf{E}') \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{J}' \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$(\dot{\hat{\mathbf{x}}}' \times \mathbf{v}') = \mathbf{J}' \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}' \hat{\mathbf{x}}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}' \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{E}' : (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\epsilon}), \quad (45)$$

откуда

$$\chi = [\int_b (sp(E')I - E') dm] \cdot \omega \equiv (sp(E)I - E) \cdot \omega \equiv J \cdot \omega, \quad (46)$$

$$\dot{\chi} = J \cdot \dot{\omega} + E:(\omega\omega \cdot \epsilon), \quad (47)$$

где  $E$  называют *эйлеровым тензором инерции*, а  $J$  — *тензором инерции* (оба очевидно являются положительно определенными тензорами). Если прямая параллельна любым двум векторам из следующих трех: оси спина, главной оси инерции, оси собственного момента количества движения, то она параллельна и третьему. Тогда пропадает последнее слагаемое в (47). С учетом (47) балансовое уравнение для момента количества движения тельца в инерциальной системе отсчета принимает вид:

$$J \cdot \dot{\omega} + E:(\omega\omega \cdot \epsilon) = k. \quad (48)$$

С использованием (46) можно показать независимость от системы отсчета  $E$  и  $J$ :

$$E^* = O \cdot E \cdot O^T, \quad J^* = O \cdot J \cdot O^T \quad (49)$$

и зависимость от нее угловых скорости и ускорения тела

$$\omega^* = O \cdot \omega + \theta, \quad \dot{\omega}^* = O \cdot \dot{\omega} + \theta \times \omega^* + \dot{\theta}, \quad (50)$$

где  $\theta$  — аксиальный вектор спина  $\Omega$ . Вычислим  $\omega = O^T \cdot (\omega^* - \theta)$ ,  $\dot{\omega} = O^T \cdot (\dot{\omega}^* - \theta \times \omega^* - \dot{\theta})$ , тогда в неинерциальной системе отсчета (48) примет вид

$$J^* \cdot (\dot{\omega}^* - \theta \times \omega^* - \dot{\theta}) - E^* : [(\omega^* - \theta)(\omega^* - \theta) \cdot \epsilon] = k^*. \quad (51)$$

Если же считать тельце деформируемым, то с помощью (32) или (35) получаем

$$v^* = O \cdot v + \Omega \cdot x^*, \quad (52)$$

$$(\hat{x}' \times v')^* = O \cdot (\hat{x}' \times v') + \hat{x}'^* \times (\theta \times \hat{x}'^*). \quad (53)$$

Сравнивая (53) с (44), (46), записываем

$$\chi^* = O \cdot \chi + J^* \cdot \theta. \quad (54)$$

Дифференцируя (54), приходим к

$$\dot{\chi}^* = O \cdot \dot{\chi} + \theta \times \chi^* - E^* : (\theta\theta \cdot \epsilon) + J^* \cdot \dot{\theta} + \dot{J}^* \cdot \theta$$

В неинерциальной системе отсчета (23)<sub>2</sub> примет вид

$$\dot{\chi}^* - \theta \times \chi^* + E^* : (\theta\theta \cdot \epsilon) - J^* \cdot \dot{\theta} - \dot{J}^* \cdot \theta = k^*.$$

**Преобразования закона сохранения энергии при замене системы отсчета.** Ниже на основе уравнений баланса количества и момента количества движений в инерциальной системе отсчета и т.н. “принципа напряжений” для деформируемого тела будет получено равенство

$$\dot{K} + \dot{U} = P, \quad (55)$$

в котором  $K$  — кинетическая энергия тела,  $U$  — его внутренняя энергия и  $P$  — мощность внешних сил. Это соотношение выражает закон сохранения механической энергии. Этот закон доказывается и в классической механике для

дискретной системы материальных точек. Внутренняя энергия сплошного или дискретного тела есть интеграл или сумма энергий парного взаимодействия составляющих его частиц. Эта величина зависит только от конфигурации тела, т.е. взаимного расположения его частиц. Взаимное расположение пары частиц от системы отсчета не зависит (см. (32)), следовательно

$$U^* = U \quad (56)$$

и согласно (55)

$$(P - \dot{K})^* = P - \dot{K}. \quad (57)$$

И  $P$ , и  $\dot{K}$  по отдельности от системы отсчета зависят.

**Аксиоматика Нолла.** В <sup>2</sup> излагается иная аксиоматика механики, принадлежащая У. Ноллу. Эта аксиоматика определенно более разумна с точки зрения математики по сравнению с традиционными представлениями. Ее основания в той же мере феноменологичны, но даются более состоятельно с точки зрения математических структур. Это позволило сделать более прозрачными некоторые причинно-следственные связи. Некоторые из основ оказались непривычными. Далее мы вкратце осветим наиболее важные элементы этой аксиоматики. Хотя в <sup>2</sup> рассмотрен только классический континуум, все выводы можно проделать и для обобщенного.

Во-первых, наряду с известными нам силами, действующими на тело — т.н. *приложенными силами*, рассматриваются еще и силы неизвестные. Те и другие в совокупности составляют *внешние силы*. Поскольку любая действующая на рассматриваемое тело сила есть функция какого-то другого тела, то следовательно принимается во внимание взаимодействие с известными нам телами *большой системы*  $\Sigma$  и ее внешности,  $\bar{\Sigma}$ .

Во-первых, аксиомы инерции формулируются для сил из внешности большой системы. В инерциальных системах отсчета имеем

$$\dot{q} = -f(B, \bar{\Sigma}) \quad (58)$$

или для элементарной части тела  $B$

$$\dot{v}dm = -df_{\bar{\Sigma}}. \quad (59)$$

Отсюда следует

$$\dot{I} = -m(B, \bar{\Sigma}). \quad (60)$$

Далее, определяется скорость совершения работы над телом внешними силами

$$W = \int_B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_B \quad (61)$$

и постулируется ее независимость от системы отсчета:

$$W^* = W \quad (62)$$

Отсюда неожиданно следует сбалансированность сил и моментов во Вселенной

$$\mathbf{f}(B, \bar{B}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}(B, \bar{B}) = \mathbf{0}, \quad (63)$$

но поскольку

$$f(B, \bar{B}) = f(B, \Sigma | B) + f(B, \bar{\Sigma}) \quad (64)$$

и (58), то

$$\dot{q} = f(B, \Sigma | B) \quad (65)$$

в тех же инерциальных системах отсчета. Из  $f(B, \Sigma | B) + f(B, \bar{\Sigma}) = 0$  же в свою очередь следует принцип действия и противодействия

$$f(B, A) = -f(A, B). \quad (66)$$

Кроме того, в инерциальных системах отсчета в силу (64) и (59)

$$W = \int_B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_{\bar{B}} = \int_B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_{\Sigma|B} + \int_B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_{\bar{\Sigma}} = P - \frac{d}{dt} \int_B \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm_B = P - \dot{K}, \quad (67)$$

что гарантирует независимость от системы отсчета закона сохранения механической энергии:

$$\dot{K} + \dot{U} = P. \quad (68)$$

В рамках аксиоматики Нолла силы инерции — не фиктивные, а реальные силы, действующие из внешности большой системы. Отметим также, что принцип действия и противодействия в доказательствах нигде не использован, он просто вытекает как следствие аксиоматики.

Доказательства всех следствий исключительно элементарно, что позволяет проделать все и для тел, состоящих из тел-точек. Например, предлагается доказать, что из независимости от системы отсчета скорости совершения работы

$$W = \int_B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_{\bar{B}} + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{k}_{\bar{B}} \quad (69)$$

следует (63).

Далее мы перейдем к выводу локальных формулировок законов сохранения массы, количества движения и момента количества движения.

**Уравнение неразрывности.** В реальных средах, которые мы привыкли воспринимать сплошными, масса оказывается сосредоточенной в мельчайших частицах, малость размера которых до сих пор не зафиксирована. Но задачи механики и не интересуют истинное распределение массы на мельчайших масштабах. Механику континуума интересует область материала конечного, хотя и малого, размера. Мы изучаем движение и деформации этого элементарного объема и силы и напряжения, которые они вызывают. Все эти характеристики относят к точке, вокруг которой сосредоточен этот элементарный объем. Тем самым мы как бы огрубляем истинное распределение механических характеристик в теле, усредняя их на некотором малом масштабе. То же самое делается и с массой. В нижеследующих дифференциальных определениях плотности массы считается, что массу мы уже размазали.

В каждой точке сплошного тела вводится *плотность массы*

$$\hat{\rho} = dm / d\hat{V} \quad (70)$$

в текущий момент времени и

$$\rho = dm / dV \quad (71)$$

в отсчетный. Сохранение массы элементарного объема тела при его деформировании из отсчетной в текущую конфигурации означает

$$dm = \rho dV = \hat{\rho} d\hat{V}. \quad (72)$$

Поскольку в силу (1.54)

$$d\hat{V} = JdV,$$

то

$$\rho = J\hat{\rho}. \quad (73)$$

Уравнение неразрывности (73) — следствие закона сохранения массы. Получим теперь его дифференциальную форму. Дифференцируем (72)

$$\dot{dm} = \dot{\hat{\rho}} d\hat{V} + \hat{\rho} d\dot{\hat{V}} = 0$$

и с учетом (2.62)

$$d\dot{\hat{V}} / d\hat{V} = \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}$$

получаем

$$\dot{\hat{\rho}} + \hat{\rho} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (74)$$

— уравнение неразрывности в лагранжевых переменных. С помощью (2.6) нетрудно записать это уравнение и в эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (75)$$

или

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0. \quad (76)$$

Выделяют случай, когда плотность в точке пространства не зависит от времени, т.е.

$$\hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (77)$$

и случай, когда плотность в точке континуума не зависит от времени, т.е.

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (78)$$

Последнее уравнение носит название *условия несжимаемости*.

**Массовые и поверхностные силы и моменты.** В механике силы разделяют на массовые и поверхностные. Если на элементарный объем массой  $dm$  в текущий момент времени действует сила  $d\mathbf{f}$ , то *массовая сила* определяется как

$$d\mathbf{f} / dm \equiv \mathbf{f}. \quad (79)$$

Часто также требуется относить  $d\mathbf{f}$  к объему в текущей или отсчетной конфигурации:

$$d\mathbf{f} / d\hat{V} = \hat{\rho} \mathbf{f}, \quad (80)$$

$$d\mathbf{f} / dV = \rho \mathbf{f}. \quad (81)$$

Последние формулы элементарно следуют из (72) и (79). Силы (80), (81) называются *объемными силами*. Массовыми (или объемными) силами описывается

действие на частицы тела внешних по отношению к телу электромагнитного и гравитационного полей. Действие же частиц тела на соседние частицы, хотя и имеет электромагнитную природу, в механике описывается *контактными, поверхностными силами*. Такими же поверхностными (внешними) силами осуществляется контактное воздействие на рассматриваемое тело через его поверхность. Если на элементарную материальную площадку площади  $d\hat{\pi}$  в текущей конфигурации действует сила  $dt$ , то поверхностной силой считают

$$\hat{t} \equiv dt / d\hat{\pi}. \quad (82)$$

Иногда силу  $dt$  относят к площади  $d\pi$  прообраза рассматриваемой площадки в отсчетной конфигурации:

$$t \equiv dt / d\pi. \quad (83)$$

Итак, силу, действующую на тело  $B$ , можно представить как

$$f(B, \bar{B}) = \int_B df = \int_V \rho f dV + \int_S tdS = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} f d\hat{V} + \int_{\hat{S}} \hat{t} d\hat{S}, \quad (84)$$

где  $S, \hat{S}$  — поверхность тела в отсчетной и текущей конфигурациях.

Так же разделяют и собственный момент тела, вызванный действием на него моментов-пар. Массовая и объемная моменты-пары

$$dk / dm \equiv k, \quad (85)$$

$$dk / d\hat{V} = \hat{\rho} k, \quad (86)$$

$$dk / dV = \rho k \quad (87)$$

имеют исключительно электромагнитную природу. Поверхностные моменты-пары

$$\hat{m} \equiv dm / d\hat{\pi}, \quad (88)$$

$$m \equiv dm / d\pi \quad (89)$$

вводят для описания моментных контактных взаимодействий. Собственный момент от действующих на тело  $B$  моментов-пар можно представить как

$$k(B, \bar{B}) = \int_B dk = \int_V \rho k dV + \int_S mdS = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} k d\hat{V} + \int_{\hat{S}} \hat{m} d\hat{S}. \quad (90)$$

**Принцип напряжений.** Сейчас мы сосредоточим свое внимание на описании внутренних локальных контактных взаимодействиях в сплошном теле  $B$ . Пусть сначала это тело представляет собой классический континуум. В инерциальной системе отсчета для него справедливо уравнение баланса количества движения. Из (17), (22), (72) и (84) следует

$$\int_{\hat{S}} \hat{t} d\hat{S} = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} (a - f) d\hat{V}. \quad (91)$$

Представим себе, что тело разделено на две части произвольно проведенной внутри него поверхностью. Эти части, в общем, как-то действуют друг на друга. В механике считается, что это взаимодействие осуществляется контактным способом. Для классического континуума такое взаимодействие сводится к поверхностным силам, что находит отражение в *принципе разрезания Эйлера - Коши*:

Действие любой части тела на оставшуюся часть равносильно действию поверхностной силы по поверхности раздела.

Возьмем на поверхности раздела тела произвольную внутреннюю точку и построим касающуюся этой поверхности в этой точке элементарную материальную площадку  $\hat{n}d\pi$ . Предположим, что

Поверхностная сила в точке поверхности раздела одинакова на всех поверхностях, имеющих в данной точке одинаковую нормаль.

Нормаль здесь направляется наружу к рассматриваемой части тела. Это — *постулат Коши*. Он утверждает, что

$$\hat{t} = \hat{t}(\hat{x}, \hat{n}), \quad (92)$$

а зависимость от локальной геометрии поверхности игнорируется. Докажем основную лемму Коши:

$$\hat{t}(\hat{x}, -\hat{n}) = -\hat{t}(\hat{x}, \hat{n}). \quad (93)$$

Для этого возьмем прямой круговой материальный цилиндр малого радиуса  $dr$ , высоты  $2\varepsilon$  и образующей, параллельной  $\hat{n}$ , разрезаемый точно пополам касательной плоскостью к поверхности раздела в точке  $\hat{x}$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  правая часть (91) исчезает, а левая сводится к интегрированию по сторонам диска, имеющим противоположно ориентированные нормали. В итоге имеем  $\hat{t}(\hat{x}, -\hat{n})\pi(dr)^2 + \hat{t}(\hat{x}, \hat{n})\pi(dr)^2 = 0$  и (93). Сейчас оказывается возможным доказать *фундаментальную теорему Коши*:

Существует линейный оператор  $\sigma$ , такой что

$$\hat{t} = \hat{n} \cdot \sigma. \quad (94)$$

Здесь  $\sigma(\hat{x})$  — определенное внутри тела поле тензора второго ранга, называемого *тензором напряжений Коши*,  $\hat{n}(\hat{x})$  — единичная нормаль к произвольно ориентированной малой материальной площадке,  $\hat{t}(\hat{x}, \hat{n})$  — вектор поверхностной силы на этой площадке. Таким образом, определения девяти компонент тензора  $\sigma$  в точке среды достаточно, чтобы найти вектор поверхностной силы на любой площадке, проходящей через эту точку. (94) называют *соотношением Коши*. Если вектор-аргумент отображения (94) поставить справа (как привычнее), то в получаемых далее уравнениях локального баланса количества движения будет фигурировать транспонированный к  $\sigma$  тензор (а это неудобно).

О. Коши, который ввел тензор напряжений в 1822 г., доказал свою теорему так. В исследуемой точке среды выделяется элементарный материальный тетраэдр, три грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой ортогональной системы координат, а четвертая — произвольна. Пусть  $\hat{n}, \hat{t}$  — внешняя нормаль четвертой грани и поверхностная сила на ней. Если  $\hat{n}_i$  — декартов орторепер, то внешние нормали первых трех граней и поверхностные силы на них суть  $-\hat{n}_i$  и  $\hat{t}_i(-\hat{n}_i) = -\hat{t}_i(\hat{n}_i)$  (использована лемма). При стягивании

тетраэдра в точку записанное для него уравнение (91) с точностью до малых более высокого порядка примет вид

$$\hat{t}d\hat{S} - \hat{t}_i d\hat{S}_i = 0,$$

где площади боковых граней тетраэдра

$$d\hat{S}_i / d\hat{S} = \hat{n} \cdot \hat{n}_i,$$

откуда

$$\hat{t} = \hat{n} \cdot \hat{n}_i \hat{t}_i.$$

Итак,  $\sigma = \hat{n}_i \hat{t}_i$ , а поскольку  $\hat{t}_i = \hat{t}_i \cdot \hat{n}_j \hat{n}_j$ , то и

$$\sigma = (\hat{t}_j \cdot \hat{n}_i) \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (95)$$

откуда компонента  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений Коши  $\sigma$  в произвольном ортобазисе  $\hat{n}_i \hat{n}_j$  есть проекция поверхностной силы на площадке с нормалью  $\hat{n}_i$  на направление  $\hat{n}_j$ . Размерность компонент тензора напряжений Коши совпадает с размерностью компонент поверхностной силы — Па.

**Локальная форма уравнения баланса количества движения.** С помощью (94) и формулы Грина поверхностный интеграл в (91) можно свести к объемному:

$$\int_{\hat{s}} \hat{t} d\hat{S} = \int_{\hat{s}} \hat{n} \cdot \sigma d\hat{S} = \int_{\hat{v}} \hat{\nabla} \cdot \sigma d\hat{V},$$

а затем переписать (91) в виде

$$\int_{\hat{v}} (\hat{\nabla} \cdot \sigma + \hat{\rho} f - \hat{\rho} a) d\hat{V} = 0. \quad (96)$$

Обсуждаемое уравнение справедливо для любой элементарной части тела, поэтому

$$\hat{\nabla} \cdot \sigma + \hat{\rho} f = \hat{\rho} a. \quad (97)$$

Мы получили локальную форму уравнения баланса количества движения.

**Симметрия тензора напряжений Коши.** При отсутствии собственных моментов количества движения и моментов-пар (а этот случай мы сейчас и рассматриваем) уравнение баланса момента количества движения относительно начала координат имеет вид

$$\int_{\hat{s}} \hat{x} \times \hat{t} d\hat{S} + \int_{\hat{v}} \hat{x} \times \hat{f} \hat{\rho} d\hat{V} = \int_{\hat{v}} \hat{x} \times \hat{a} \hat{\rho} d\hat{V}. \quad (98)$$

Из (97) получаем

$$\int_{\hat{v}} \hat{x} \times (\hat{\nabla} \cdot \sigma) d\hat{V} + \int_{\hat{v}} \hat{x} \times \hat{f} \hat{\rho} d\hat{V} = \int_{\hat{v}} \hat{x} \times \hat{a} \hat{\rho} d\hat{V}. \quad (99)$$

Вычитая (98) из (99), получим

$$\int_{\hat{v}} \hat{x} \times (\hat{\nabla} \cdot \sigma) d\hat{V} - \int_{\hat{s}} \hat{x} \times \sigma^T \cdot \hat{n} d\hat{S} = 0.$$

Используя интегральное тождество

$$\int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} = \int_{\hat{V}} [ \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - 2\boldsymbol{\sigma}_\times ] d\hat{V}, \quad (100)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_\times = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}$  — аксиальный вектор тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ , получаем

$$\boldsymbol{\sigma}_\times = 0, \quad (101)$$

а это означает симметрию тензора напряжений Коши. Итак,

В классическом континууме тензор напряжений Коши симметричен.

Для классического континуума (101) есть локальное уравнение баланса собственного момента количества движения.

**Уравнение баланса собственного момента количества движения для континуума Коссера.** В данном разделе мы временно вернемся к континууму, состоящему из тел-точек. Уравнение баланса момента количества движения для тела, состоящего из такого континуума, есть

$$\int_{\hat{S}} (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{m}}) d\hat{S} + \int_{\hat{V}} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{f} + \mathbf{k}) \hat{\rho} d\hat{V} = \int_{\hat{V}} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\chi}) \hat{\rho} d\hat{V}. \quad (102)$$

Далее необходимо обобщить принцип разрезания Эйлера - Коши, полагая, что действие любой части тела на оставшуюся часть равносильно действию поверхностной силы и поверхностного момента-пары по поверхности раздела. Обобщим также и постулат Коши, дополнительно принимая, что поверхностный момент-пара в точке поверхности раздела одинаков на всех поверхностях, имеющих в данной точке одинаковую нормаль. В результате приходим к существованию линейного оператора  $\boldsymbol{\mu}$ :

$$\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad (103)$$

называемого *тензором моментов-пар*. Поле тензора второго ранга  $\boldsymbol{\mu}$  определено внутри тела и содержит в себе информацию о контактных моментах-парах. С помощью этого тензора можно найти вектор поверхностного момента-пары на любой элементарной площадке, проходящей через данную точку. Компонента  $\mu_{ij}$  тензора моментов-пар  $\boldsymbol{\mu}$  в произвольном ортобазисе  $\hat{\mathbf{n}}_i \hat{\mathbf{n}}_j$  есть проекция поверхностного момента-пары на площадке с нормалью  $\hat{\mathbf{n}}_i$  на направление  $\hat{\mathbf{n}}_j$ . Размерность компонент тензора моментов-пар совпадает с размерностью компонент вектора поверхностного момента-пары — Па·м.

Уравнение (98), справедливое для любого континуума, вычитаем из (102) с учетом (103) и используем формулу Грина и следующее из нее тождество (100), в результате чего получаем

$$\int_{\hat{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\sigma}_\times + \hat{\rho} \mathbf{k} - \hat{\rho} \boldsymbol{\chi}) d\hat{V} = 0$$

или для любого элементарного подобъема тела

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\sigma}_\times + \hat{\rho} \mathbf{k} = \hat{\rho} \boldsymbol{\chi}. \quad (104)$$

Заметим, что сейчас нет оснований говорить о симметрии тензора напряжений Коши. Для рассматриваемого здесь континуума в уравнении (97) фигурирует

несимметричный  $\sigma$ . Более подробно уравнение (104) мы обсудим, когда приступим к отдельному изучению континуума Коссера. А до той поры будем заниматься исключительно классическим континуумом.

**Уравнение локального баланса количества движения в отсчетной конфигурации.** Иногда уравнение баланса количества движения элементарного объема в текущий момент времени относят к отсчетной конфигурации. Чтобы получить требуемое уравнение вместо (91) следует использовать

$$\int_S t dS = \int_V \rho(a - f) dV. \quad (105)$$

Для того, чтобы в левой части (105) перейти от интеграла по поверхности к интегралу по объему в  $K_0$ , сначала найдем тензор, связывающий  $t$  с  $n$ :

$$t = n \cdot P. \quad (106)$$

Для этого примем во внимание (82) - (83), откуда следует

$$d\hat{\pi} \hat{t} = d\pi t,$$

соотношение Коши (94)

$$\hat{t} = \hat{n} \cdot \sigma$$

и связь ориентированных площадок в отсчетной и текущей конфигурациях (1.55)

$$\hat{n} d\hat{\pi} = J \hat{F}^T \cdot n d\pi.$$

В результате получим

$$t = n \cdot (J \hat{F} \cdot \sigma),$$

т.е.

$$P = J \hat{F} \cdot \sigma. \quad (107)$$

Этот тензор называется *тензором напряжений Пиолы*. Смысл его компонент позволяет прояснить соотношение (107), где он выступает как линейный оператор. Сравнивая (107) с (94) и вспоминая смысл векторов  $t$  и  $n$ , можно заключить, что компонента  $P_{ij}$  тензора напряжений Пиолы  $P$  в произвольном ортобазисе  $n_i n_j$  есть проекция силы  $dt$ , действующей на элементарную площадку  $\hat{n}_i d\hat{\pi}$  в текущей конфигурации (прообраз которой в отсчетной конфигурации есть  $n_i d\pi$ ) и отнесенной к  $d\pi$ , на направление  $n_j$ .

Подставляя (106) в (105) и используя формулу Грина приходим сначала к

$$\int_V (\nabla \cdot P + \rho f - \rho a) dV = 0,$$

а затем к

$$\nabla \cdot P + \rho f = \rho a. \quad (108)$$

**Мощность напряжений.** Получим далее выражение для  $\dot{U}$  — скорости изменения внутренней энергии элементарного объема континуума. Для этого выпишем тождество сохранения механической энергии (55)

$$\dot{K} + \dot{U} = P$$

в котором

$$K = \frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\hat{V},$$

$$P = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\hat{V} + \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\hat{S}$$

и будем полагать

$$U = \int_{\hat{V}} u \hat{\rho} d\hat{V},$$

где  $u$  — массовая плотность внутренней энергии. Собирая все вместе,

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \left( \frac{1}{2} \hat{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\hat{V} + \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\hat{S}. \quad (108)$$

Перед взятием материальной производной слева (108) нужно перейти от интеграла по объему в текущей конфигурации (которая, конечно, зависит от времени) к интегралу по массе тела, а после него вернуться обратно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) \hat{\rho} d\hat{V} &= \frac{d}{dt} \int_B \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) dm = \int_B (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{u}) dm = \\ &= \int_{\hat{V}} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{u}) \hat{\rho} d\hat{V}. \end{aligned} \quad (109)$$

Мы будем полагать, что (108) записано в инерциальной системе отсчета, и потому справедливо (97):

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\rho} \mathbf{f} = \hat{\rho} \dot{\mathbf{v}},$$

которое сворачиваем с  $\mathbf{v}$  и интегрируем по объему текущей конфигурации, в результате получая равенство

$$\int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\hat{V} = \int_{\hat{V}} [\hat{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}] d\hat{V}.$$

Вычитая его из (108) с учетом (109), получим

$$\int_{\hat{V}} \dot{u} \hat{\rho} d\hat{V} = \int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\hat{S} - \int_{\hat{V}} (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} d\hat{V}.$$

Для преобразования интеграла по поверхности к интегралу по объему сначала используем соотношение Коши (94)

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

а затем формулу Грина:

$$\int_{\hat{S}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\hat{S} = \int_{\hat{V}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \hat{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) d\hat{V}.$$

Далее воспользуемся тождеством

$$\hat{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{W}},$$

в результате чего получаем

$$\int_{\hat{V}} (\hat{\rho} \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{W}}) d\hat{V} = 0$$

или

$$\hat{\rho} \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{W}}. \quad (110)$$

Используя симметрию тензора напряжений Коши (для изучаемого сейчас классического континуума) (101) и определение тензора деформации скорости (2.18) - (2.19), можно (110) переписать в виде

$$\hat{\rho} \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}. \quad (111)$$

Левая часть (111) есть скорость изменения внутренней энергии, отнесенная к элементарному объему в текущей конфигурации. Мы видим в этом выражении в качестве силовой переменной тензор напряжений, благодаря чему  $\dot{u}$  называют локальной *мощностью напряжений*. Выражение (111) подчеркивает, что локальный объем континуума взаимодействует со своим ближайшим окружением контактными силами, которые тензор напряжений и описывает. Конечно, взяв за определение скорости изменения внутренней энергии (111) и пользуясь уравнением (97), можно прийти к закону сохранения механической энергии.

Аналогичным образом, опираясь на (106) и (108), можно показать, что локальную мощность напряжений, отнесенную к прообразу  $d\hat{V}$  в отсчетной конфигурации, можно выразить и как

$$\rho \dot{u} = \mathbf{P} : \mathbf{v}\nabla. \quad (112)$$

Из (111) и (112) получаем записи массовой мощности напряжений:

$$\dot{u} = \frac{1}{\hat{\rho}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}, \quad (113)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{P} : \mathbf{v}\nabla. \quad (114)$$

Сейчас можно доказать, что  $\dot{u}$  не зависит от системы отсчета. Возьмем в качестве определения  $\dot{u}$  выражение (113). Во-первых,  $\hat{\rho}$  не зависит от системы отсчета, поскольку от нее не зависит ни масса (см. (37)), ни объем материала:

$$\hat{\rho}^* = \hat{\rho}. \quad (115)$$

Далее, поверхностная сила  $\hat{\mathbf{t}}$ , как и любая другая сила, не зависит от системы отсчета (см. (38))

$$\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{t}},$$

нормаль к материальной площадке тоже не зависит от системы отсчета

$$\hat{\mathbf{n}}^* = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

отсюда и тензор напряжений Коши (94) в силу (33) тоже не зависит от системы отсчета и преобразуется при ее замене как

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (116)$$

Теперь обратимся к  $\mathbf{D}$ . Рассмотрим малый материальный отрезок  $d\hat{\mathbf{x}}$  в текущей конфигурации. Этот отрезок преобразуется при замене системы отсчета согласно (32) как

$$d\hat{\mathbf{x}}^* = \mathbf{O} \cdot d\hat{\mathbf{x}}.$$

Относительная скорость концов этого отрезка  $d\mathbf{v}$  преобразуется при замене системы отсчета согласно (52) как

$$d\mathbf{v}^* = \mathbf{O} \cdot d\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \cdot d\hat{\mathbf{x}}^*,$$

а с другой стороны определяется (13)

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\hat{\mathbf{x}}.$$

Из всего этого нетрудно получить

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{O}^T + \boldsymbol{\Omega}, \quad (117)$$

и с использованием (18), (19) —

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T, \quad (118)$$

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{O}^T + \boldsymbol{\Omega}. \quad (119)$$

Подставляя (115), (116) и (118) в (113), получаем

$$\dot{\mathbf{u}}^* = \dot{\mathbf{u}}. \quad (120)$$

### Меры напряжений, сопряженные мерам деформаций правого семейства.

Ранее нами вводились меры деформации и их скорости. Следуя похожей вполне формальной методике мы могли бы сейчас ввести аналогичный набор мер напряжений. Но оказывается, что любой мере деформации соответствует единственная “родная” для нее мера напряжений, вместе с которой они должны давать мощность напряжений. Например, для меры деформации  $\mathbf{e}$  правого семейства находится мера напряжений  $\mathbf{t}$ , такая, что

$$\mathbf{t} : \dot{\mathbf{e}} = \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad (121)$$

где мощность напряжений единицы объема отсчетной конфигурации согласно (111) и (73) записывается еще и как

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}, \quad (122)$$

где

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \quad (123)$$

— тензор напряжений Кирхгоффа. Итак, вводимая мера напряжений  $\mathbf{t}$  должна быть связана с мерой деформаций  $\mathbf{e}$  условием

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}. \quad (124)$$

В этом случае меры деформаций  $\mathbf{e}$  и напряжений  $\mathbf{t}$  называются *энергетически сопряженными*.

Записывая условие (124) в компонентах с использованием (2.40), (2.41)

$$\mathbf{t} : \dot{\mathbf{e}} = \lambda_i f'(\lambda_i) t_{ii} \epsilon_{ii} + \sum_{i \neq j} \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) t_{ij} D_{ij} = \tau_{ij} D_{ij}$$

и сравнивая коэффициенты при произвольных компонентах  $D_{ij}$ , получим, что нормальные компоненты меры  $\mathbf{t}$  в базисе правого трехгранника равны

$$\tau_{ii} / \lambda_i f'(\lambda_i), \quad (125)$$

а сдвиговые —

$$\tau_{ij} \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j} \frac{1}{2\lambda_i \lambda_j} \quad \text{при } \lambda_i \neq \lambda_j \quad (126)$$

$$\text{или } \tau_{ij} / \lambda_i f'(\lambda_i) \quad \text{при } \lambda_i = \lambda_j. \quad (126')$$

В (125), (126) компоненты  $\tau_{ij}$  записаны в базисе левого трехгранника. В частных случаях получаем меры напряжений, сопряженные некоторым мерам деформаций семейства (1.43), имеющие компоненты:

$$m=1 \quad \tau_{ij} / \lambda_i \lambda_j, \quad (127)$$

$$m=-1 \quad \tau_{ij} \lambda_i \lambda_j, \quad (128)$$

$$m=\frac{1}{2} \quad \tau_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} \right), \quad (129)$$

$$m=-\frac{1}{2} \quad \tau_{ij} \frac{1}{2} (\lambda_i + \lambda_j), \quad (130)$$

$$m=0 \quad \text{нормальные } \tau_{ii}, \text{ сдвиговые } \tau_{ij} / \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}. \quad (131)$$

Компоненты мер напряжений (127) и (128) можно интерпретировать как контравариантные и ковариантные компоненты  $\tau_{ij}$  в деформированном базисе, начально замороженном вдоль векторов правого трехгранника. Случай  $m=1$  соответствует известной мере напряжений — т. н. II тензору напряжений Пиолы - Кирхгоффа:

$$\mathbf{K} \equiv \hat{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{F}}^T = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \tau_{ij} / \lambda_i \lambda_j \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j, \quad (132)$$

а  $m=\frac{1}{2}$  — т. н. тензору напряжений Био:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \frac{1}{2} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{K}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \\ &= \tau_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_j} \right) \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j. \end{aligned} \quad (133)$$

Для случая  $m=0$  вблизи отсчетной конфигурации ( $t \rightarrow t_0$ ) из (131) с учетом (2.47) имеем  $t_{ij} = \tau_{ij}$  с точностью до малых более высокого порядка.

**Меры напряжений, сопряженные мерам деформаций левого семейства,** можно определить, используя (124) и (2.49):

$$t : \dot{\mathbf{e}} = t : (\mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{e}}^\Omega \cdot \mathbf{R}) = (\mathbf{R} \cdot t \cdot \mathbf{R}^T) : \hat{\mathbf{e}}^\Omega. \quad (134)$$

Поскольку  $\hat{\mathbf{e}}^\Omega$  — это скорость меры деформации  $\hat{\mathbf{e}}$  левого семейства,  $\hat{t} \equiv \mathbf{R} \cdot t \cdot \mathbf{R}^T$  есть сопряженная ей мера напряжений.

В случае изотропии свойств материала главные оси тензора  $\boldsymbol{\tau}$  совпадают с осями левого трехгранника (т.е. в последних он диагональный). Отсюда и из (131) сопряженной к  $\hat{t} \equiv \boldsymbol{\tau}$  мерой деформаций оказывается левая логарифмическая мера  $\hat{\mathbf{e}}_0$ . Мощность напряжений согласно (134) записывается при этом как  $\boldsymbol{\tau} : \hat{\mathbf{e}}_0^\Omega$  или как  $(\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}) : \dot{\mathbf{e}}_0$ , то есть сопряжены еще и мера напряжений  $\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}$  с правой логарифмической мерой деформаций  $\mathbf{e}_0$ .

При отсутствии изотропии тензору напряжений Кирхгоффа не сопряжена ни одна из мер деформации семейства (1.44), (1.53). То же можно сказать и про тензор

напряжений Коши, в терминах которого та же мощность напряжений пишется для единицы текущего объема.

**Скорости мер напряжений** правого семейства формально определяются как

$$\dot{t} = \dot{t}_{ij} p_i p_j + \Omega' \cdot t - t \cdot \Omega', \quad (135)$$

где компоненты  $t_{ij}$  даются формулами (125), (126). В отличие от дифференцирования меры  $e$  в ее собственных главных осях, мера  $t$  в главных осях не имеет диагонального вида. Отсюда выполнение операции дифференцирования ее компонент в общем виде приводит в объемным выражениям, так же как и компонентная запись коммутатора правой части (135). Поэтому мы не станем здесь этим заниматься, указав лишь на принципиальную возможность сделать это.

В случае изотропии свойств материала тензоры  $\tau$  и  $\hat{e}$ , а также  $t$  и  $e$ , оказываются попарно соосными, что позволяет записать нормальные компоненты  $\dot{t}$  в базисе правого трехгранника

$$\dot{t}_i = \left( \frac{\tau_i}{\lambda_i f'(\lambda_i)} \right)', \quad (136)$$

а также сдвиговые ее компоненты в этом базисе

$$(t_i - t_j) \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D_{ij} \text{ при } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ или } \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} (t_i - t_j) D_{ij} \text{ при } \lambda_i = \lambda_j. \quad (137)$$

В частных случаях имеем:

$$m=1 \quad \text{нормальные } \dot{t}_i = \left( \frac{\tau_i}{\lambda_i^2} \right)' = \frac{\dot{\tau}_i}{\lambda_i^2} - 2 \frac{\tau_i \dot{\lambda}_i}{\lambda_i^3} = \frac{\dot{\tau}_i}{\lambda_i^2} - 2 \frac{\tau_i}{\lambda_i^2} D_{ii},$$

$$\text{сдвиговые } \left( \frac{\tau_i}{\lambda_i^2} - \frac{\tau_j}{\lambda_j^2} \right) \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D_{ij}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\text{или } \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\tau_i - \tau_j}{\lambda_i^2} D_{ij}, \quad \lambda_i = \lambda_j;$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{нормальные } \dot{t}_i = \left( \frac{\tau_i}{\lambda_i} \right)' = \frac{\dot{\tau}_i}{\lambda_i} - \frac{\tau_i}{\lambda_i} D_{ii},$$

$$\text{сдвиговые } \left( \frac{\tau_i}{\lambda_i} - \frac{\tau_j}{\lambda_j} \right) \frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D_{ij}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$\text{или } \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\tau_i - \tau_j}{\lambda_i} D_{ij}, \quad \lambda_i = \lambda_j.$$

Для  $m=0$  в случае же изотропии имеем скорость напряжений  $(R^T \cdot \tau \cdot R)' = R^T \cdot \tau^\Omega \cdot R$ . Поскольку мера  $R^T \cdot \tau \cdot R$  сопряжена мере  $e_0$ , имеет место  $(R^T \cdot \tau \cdot R)' : \dot{e}_0 = \tau^\Omega : \dot{e}_0^\Omega$ .

**Текущий лагранжев подход к описанию движения.** Существует еще один подход к описанию движения, в котором лагранжевы координаты определяются не

в отсчетной, а в текущей конфигурации. Этот подход оказывается незаменимым при постановке задач устойчивости и при численном решении краевых задач механики континуума. Поскольку нас, конечно, интересует текущее состояние континуума, введенная система координат вместе с определяемыми ею полями локальных базиса, набла-вектора и метрики в этот момент одновременно являются материальными и пространственными. В рамках этого подхода рассматривают скорости изменения полей в текущей конфигурации. Все уравнения (баланса, состояния и граничные условия) записываются и решаются в скоростях. Практически все рассмотренные нами ранее локальные переменные состояния вводились с использованием обычного (отсчетного) лагранжева подхода, где лагранжевы координаты определены в начальный момент времени  $t_0$ , и потому ни сами эти переменные, ни определенные нами скорости их изменения не годятся для использования в рамках текущего лагранжева подхода. Однако все эти полученные ранее результаты можно использовать, если формально рассмотреть третью — будущую — конфигурацию, все меры деформаций и напряжений отнести к паре текущей и будущей конфигураций, а затем найти скорость изменения таких мер при стремлении будущей конфигурации к текущей. Другими словами, предлагается в качестве отсчетной использовать не начальную, а текущую конфигурацию. Поскольку начальная конфигурация не имеет напряжений, а текущая их имеет, различие в скоростях мер в двух лагранжевых подходах в общем будет иметь место.

**Скорости деформаций и напряжений при текущем лагранжевом подходе.** В главе 2 мы уже показали, что вблизи отсчетной (напряженной или нет) конфигурации скорости любой меры деформаций семейства (1.44), (1.52) стремятся друг к другу и к тензору  $D$ , причем быстрее всех к нему стремится логарифмическая мера деформации. Однако скорости сопряженных им мер напряжений в общем оказываются различными. Вопрос определения скоростей напряжений, сопряженных мерам деформации семейства (1.44), (1.52), можно решить на основе разложения мер деформаций в ряд по степеням логарифмической меры вблизи отсчетной напряженной конфигурации.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Мету деформации, определяемую с помощью функции

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1,$$

можно разложить в ряд Маклорена, начинающийся с

$$e = f(\lambda) = \ln \lambda + m(\ln \lambda)^2 + \dots, \quad 2m = 1 + f''(1). \quad (138)$$

Это  $m$  совпадает с показателем степени семейства мер деформации (1.45). Поскольку для логарифмической меры  $m = 0$ , любая мера деформации близка к ней до малых третьего порядка. Обращение ряда (138) ведет к

$$\ln \lambda = e - me^2 + \dots \quad (139)$$

Пусть  $e$  и  $\bar{e}$  две различные меры деформации рассматриваемого семейства. Тогда согласно (138)

$$\bar{e} - e = \bar{m}(\ln \lambda)^2 + \dots, \quad 2\bar{m} = \bar{f}''(1) - f''(1).$$

Подставляя в результат (139), получим ряд

$$\bar{e} - e = \bar{m}e^2 + \dots,$$

дифференцируя который, будем иметь

$$\dot{\bar{e}} - \dot{e} = 2\bar{m}e\dot{e} + \dots \quad (140)$$

Используя условие неизменности  $\rho \dot{u}$  при изменении меры деформации

$$t\dot{e} = \bar{t}\dot{\bar{e}} = \bar{t}(\dot{e} + 2\bar{m}e\dot{e} + \dots)$$

и произвольность  $\dot{e}$ , получим связь мер напряжений

$$t - \bar{t} = 2\bar{m}e\bar{t} + \dots, \quad (141)$$

дифференцируя которую в отсчетной конфигурации будем иметь

$$\dot{t}_0 - \dot{\bar{t}}_0 = 2\bar{m}\sigma d, \quad (142)$$

поскольку вблизи отсчетной напряженной конфигурации  $\bar{e} = e = 0$ ,  $\dot{\bar{e}} = \dot{e} = d$ ,  $\bar{t} = t = \sigma$  — напряжение Коши. Следует заметить, что соотношение (142) — точное, в отличие от предыдущих.

С помощью (142) дифференциально-линейное определяющее соотношение

$$\dot{t}_0 = Hd$$

можно записать в терминах другой пары сопряженных мер

$$\dot{t}_0 = (H - 2\bar{m}\sigma)d \equiv \bar{H}d,$$

где касательные модули связаны

$$\bar{H} = H - 2\bar{m}\sigma. \quad (143)$$

Благодаря своей форме соотношение (143) может описать вырождение касательного модуля ( $\bar{H} = 0$ ), если напряжение достигнет значения, когда выполняется условие  $\sigma = \frac{H}{2\bar{m}}$  ( $H$  может зависеть от  $\sigma$ ). В этот момент происходит потеря устойчивости материала и реализуется бифуркация равновесия деформируемого тела. Например, это имеет место при больших деформациях растяжения металлического стержня, когда в критический момент происходит образование шейки.

Подобные манипуляции удастся выполнить и для тензорных мер деформаций (1.44), (1.52) с тем отличием, что вместо (140) имеет место

$$\dot{\bar{e}} - \dot{e} = \bar{m}(e \cdot \dot{e} + \dot{e} \cdot e) + \dots,$$

вместо (2.141) —

$$t - \bar{t} = \bar{m}(e \cdot \bar{t} + \bar{t} \cdot e) + \dots,$$

вместо (142)

$$\dot{t}_0 - \dot{\bar{t}}_0 = \bar{m}(D \cdot \bar{t} + \bar{t} \cdot D), \quad (144)$$

а вместо (2.143) —

$$\bar{H}_{ijkl} = H_{ijkl} - \frac{\bar{m}}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk} + \sigma_{jk}\delta_{il} + \sigma_{jl}\delta_{ik}). \quad (145)$$

Если  $e$  есть логарифмическая мера деформации, т.е.  $m = 0$ , то  $\bar{m}$  означает  $1 + \bar{f}''(1)$  и совпадает с показателем степени (1.45) меры  $\bar{e}$ . Выше замечалось, что

вблизи отсчетной конфигурации компоненты тензора напряжений, сопряженного логарифмической мере деформации, в базисе правого трехгранника совпадают с точностью до малых второго порядка с компонентами тензора напряжений Кирхгоффа в базисе левого трехгранника. Кроме того, как было доказано в главе 2, вблизи отсчетной (напряженной или нет) конфигурации спин правого трехгранника относительно левого совпадает с тензором вихря. Следовательно скорость этой меры в отсчетной напряженной конфигурации,  $\dot{\mathbf{t}}_0$ , есть яуманнова производная тензора напряжений Кирхгоффа

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\tau}^J. \quad (146)$$

Тогда из (144), (146)  $\dot{\mathbf{t}}_0$  есть производная Олдройда этого тензора при  $\bar{m} = 1$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L} \equiv \boldsymbol{\tau}^{Ol}, \quad (147)$$

или производная Коттер - Ривлина этого тензора при  $\bar{m} = -1$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T \equiv \boldsymbol{\tau}^{CR}, \quad (148)$$

или яуманнова производная тензора напряжений Био при  $\bar{m} = \frac{1}{2}$ .

**Уравнения динамики в скоростях текущего лагранжева подхода.**

Уравнение

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla \mathbf{v}^T \circ \nabla \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{v}} \quad (150)$$

получается материальным дифференцированием<sup>9</sup> уравнения (2.97) с учетом искажения локальной конфигурации, вызванного мгновенным движением материала, приводящего в силу (2.25) с учетом (2.18) к

$$\dot{\nabla} = -(\nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla.$$

Уравнение

$$\dot{\hat{\mathbf{t}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (151)$$

получаются материальным дифференцированием соотношений Коши (94) с учетом (2.64).

Но в некоторых ситуациях мы можем контролировать только лишь прикладываемые по границе тела в текущей конфигурации силы, т.е. фактически  $\mathbf{t}$  или  $\dot{\mathbf{t}}$ . В таком случае силовые граничные условия удобно задавать в терминах тензора напряжений Пиолы, и тогда материальным дифференцированием (106) получаем

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{P}}. \quad (152)$$

Запись уравнения динамики в терминах этого тензора получаем материальным дифференцированием (108):

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{v}}. \quad (153)$$

Уравнения состояния чаще всего все-таки формулируют в терминах тензора напряжений Коши, поэтому выразим  $\dot{\mathbf{P}}$  через этот тензор:

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}^H. \quad (154)$$

<sup>9</sup> Использование производных относительно неинерциальных систем отсчета, конечно, недопустимо.

Для получения (154) следует продифференцировать (107), а затем устремить  $t \rightarrow t_0$ . Правая часть выражения (154) носит название *производной Хилла* тензора напряжений Коши.

В нелинейной теории упругости удобно использовать  $\Pi$  тензор напряжений Пиолы - Кирхгоффа  $\mathbf{K}$ , для которого будет полезным получить выражение  $\dot{\mathbf{K}}$  через тензор напряжений Коши:

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{Tr}, \quad (155)$$

где правая часть (155) носит название *производной Трусделла* тензора напряжений Коши (использовать (147) и (123)).

## 4. Классические среды

**Замыкание основных уравнений механики континуума.** Основные уравнения (законы) механики классического континуума

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\rho} \mathbf{f} = \hat{\rho} \dot{\mathbf{v}} \quad (1)$$

(баланса количества движения),

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \mathbf{0} \quad (2)$$

(баланса момента количества движения),

$$\dot{\hat{\rho}} + \hat{\rho} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

(неразрывности) представляют собой 7 независимых скалярных уравнений и содержат 13 скалярных неизвестных (компонент  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\hat{\rho}$ ). Следовательно, система записанных уравнений не замкнута и требует для своего замыкания еще шести скалярных уравнений. Требуемые уравнения связывают статические и кинематические переменные (тензоры напряжений и деформаций или их скорости), называются *определяющими уравнениями* и описывают осредненное по элементарному объему взаимодействие частиц среды между собой. Данные уравнения не носят характер законов природы а, напротив, очень чувствительны к особенностям изучаемой среды (материала), и поэтому их называют еще “материальными” уравнениями. Именно с целью формулировки определяющих уравнений мы и развивали в предыдущих разделах теории деформаций, напряжений и скоростей тех и других. Уравнения (1) - (3) есть уравнения динамики (или, в частном случае, статики), поэтому невозможность их разрешения в общем случае означает динамическую (или статическую) неопределимость механических полей в континууме, для определения которых необходимо рассмотрение локальной кинематики и физики деформируемого континуума.

Ту же ситуацию мы имеем и в теории электричества и магнетизма, где уравнения Максвелла

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{D} = q, \quad (4)$$

$$\hat{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (5)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\hat{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (7)$$

( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности, а  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы индукции электрического и магнитного полей,  $\mathbf{j}$  — вектор плотности тока,  $q$  — плотность заряда) представляют собой 8 скалярных уравнений, содержащих 16 скалярных неизвестных, и потому являются незамкнутыми. Вообще говоря, из имеющихся 8 скалярных уравнений независимы только семь: применением операции

дивергенции к (5) можно получить тождество  $\partial / \partial t \hat{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ , следующее еще и из (6). Для замыкания системы мы должны знать материальные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\sim \mathbf{E}, \\ \mathbf{H} &\sim \mathbf{B}, \\ \mathbf{j} &\sim \mathbf{E}, \end{aligned}$$

которые дадут дополнительно 9 скалярных уравнений. Поэтому с присоединением материальных уравнений получаем 16 независимых уравнений для определения 16 неизвестных. Итак, законы электромагнетизма (4) - (7) также оказались незамкнутыми и потребовали уравнений, зависящих от рассматриваемой среды.

**Принцип независимости определяющих соотношений от системы отсчета.** Вернемся к механике. Поскольку определяющие уравнения выражают взаимодействие частиц среды, очевидно не зависящее от выбора системы отсчета, то и сами определяющие уравнения не должны зависеть от системы отсчета. Поскольку определяющие соотношения как правило приходится строить для каждой изучаемой среды при каждом способе воздействия на нее, принцип позволяет отбраковывать заведомо нефизичные варианты таких соотношений.

Сформулируем этот принцип математически. Ранее мы выводили ограничение для независящих от системы отсчета геометрических объектов — скаляра, вектора и тензора, сейчас же требуется сделать это для функции. Пусть функция  $f$  связывает меры напряжений и деформаций  $\alpha$  и  $\beta$ ;  $f$  не будет зависеть от системы отсчета, если она также связывает эти меры, определенные с точки зрения любой другой системы отсчета, т.е.

$$\alpha = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha^* = f(\beta^*). \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые следствия принципа (8). Пусть используются не зависящие от системы отсчета меры, т.е.

$$\alpha^* = \mathbf{O} \cdot \alpha \cdot \mathbf{O}^T, \quad \beta^* = \mathbf{O} \cdot \beta \cdot \mathbf{O}^T, \quad (9)$$

тогда (8) просто требует изотропию функции  $f$ :

$$f(\mathbf{O} \cdot \beta \cdot \mathbf{O}^T) = \mathbf{O} \cdot f(\beta) \cdot \mathbf{O}^T \quad \forall \mathbf{O}, \beta.$$

Странного в этом ничего нет, поскольку если среда все-таки имеет анизотропию (зависимость от направления) описываемых определяющими уравнениями локальных свойств, у функции  $f$  появляются дополнительные векторные и тензорные аргументы-переменные, поскольку характерные для анизотропной среды материальные направления, материальные плоскости и материальные направления на материальных плоскостях в общем поворачиваются и искажаются при деформации среды. Например, в металлических кристаллах имеются плоскости наиплотнейшей упаковки атомов, в которых располагаются направления наиплотнейшей упаковки. В этом случае принцип необходимо переформулировать:

$$\alpha = f(\beta, \mu) \Leftrightarrow \alpha^* = f(\beta^*, \mu^*) \quad (10)$$

если, для примера, анизотропия описывается одной переменной  $\mu$ . Такая запись годится и в случае, когда мера напряжений (или скорости напряжений<sup>10</sup>)  $\alpha$  зависит как от меры деформации  $\beta$ , так и от меры скорости деформаций  $\mu$ .

Пусть теперь используются меры, преобразующиеся при замене системы отсчета по закону

$$\alpha^* = \alpha, \quad \beta^* = \beta,$$

тогда (8) не накладывает никаких требований на  $f$ .

Заметим, что принцип вовсе не требует, чтобы в определяющих соотношениях использовались независимые от системы отсчета меры.

Для проверки, удовлетворяют ли некие определяющие соотношения принципу, полезно знать, как зависят от системы отсчета введенные нами ранее меры. Начнем с

$$dx^* = dx \tag{11}$$

(в естественной конфигурации системы отсчета совпадают),

$$d\hat{x}^* = O \cdot d\hat{x}, \tag{12}$$

откуда и из

$$d\hat{x} = F \cdot dx, \quad d\hat{x}^* = F^* \cdot dx^*$$

следует

$$F^* = O \cdot F. \tag{13}$$

Далее, из (13), полярного разложения

$$F^* = O \cdot R \cdot U = R^* \cdot U^*$$

и его единственности следует, что

$$R^* = O \cdot R, \quad U^* = U. \tag{14}$$

Из определений векторов правого трехгранника и кратностей удлинений с точек зрения двух разных наблюдателей

$$U \cdot p_i = \lambda_i p_i, \quad U^* \cdot p_i^* = \lambda_i^* p_i^*, \quad \Sigma i$$

откуда с учетом (14)<sub>2</sub> имеем

$$p_i^* = p_i, \quad \lambda_i^* = \lambda_i, \tag{15}$$

а из

$$\hat{p}_i = R \cdot p_i, \quad \hat{p}_i^* = R^* \cdot p_i^*$$

(14)<sub>1</sub> и (15) —

$$\hat{p}_i^* = O \cdot \hat{p}_i. \tag{15)<sub>3</sub>$$

Этот закон следует и из элементарно доказываемой независимости от системы отсчета собственных векторов независимого от системы отсчета тензора.

Теперь по определению правых и левых мер деформации нетрудно получить законы их преобразования при замене системы отсчета

<sup>10</sup> При использовании текущего лагранжева подхода.

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{e}, \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{e}}^* = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{O}^T, \quad (17)$$

а законы преобразования сопряженных им мер напряжений при замене системы отсчета вытекают из (4.120), (4.121), (4.134), (14)<sub>1</sub>, (16) и (17):

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{t}, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (19)$$

Из (16), (18) и  $d/dt^* = d/dt$  следует

$$\dot{\mathbf{e}}^* = \dot{\mathbf{e}}, \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{t}}^* = \dot{\mathbf{t}}. \quad (21)$$

Из (17), (19) следует, что меры деформаций и напряжений левого семейства не зависят от системы отсчета. Для нахождения скоростей мер левого семейства используют конвективные или коротационные производные, также не зависящие от системы отсчета. Чтобы убедиться в этом, сначала покажем, что из

$$\boldsymbol{\mu}^a \equiv \mathbf{a}^i \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{a}^j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{O}^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{a}_i \quad (24)$$

следует

$$(\boldsymbol{\mu}^a)^* = \mathbf{O} \cdot \boldsymbol{\mu}^a \cdot \mathbf{O}^T. \quad (25)$$

Действительно, из (24) следует

$$\mathbf{a}^{i*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{a}^i, \quad (26)$$

откуда и из (22), (23) вытекает (25). Теперь следует убедиться, что подвижные реперы известных нам конвективных и коротационных производных не зависят от системы отсчета. Действительно, из (12) и определения текущего локального базиса имеем

$$\hat{\mathbf{e}}_i^* = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (27)$$

откуда

$$\hat{\mathbf{e}}^{i*} = \mathbf{O} \cdot \hat{\mathbf{e}}^i. \quad (28)$$

На этих реперах построены конвективные производные Олдройда и Коттер - Ривлина, а на репере (15)<sub>3</sub> — коротационная R-производная, следовательно все эти производные не зависят от системы отсчета.

Теперь рассмотрим единичные векторы  $\boldsymbol{\eta}_i$  вдоль трех ортогональных материальных отрезков  $d\hat{\mathbf{x}}_i$ . Мгновенный поворот ортогонального трехгранника  $\boldsymbol{\eta}_i$  как жесткого целого описывается тензором вихря, а из (12) следует независимость от системы отсчета репера  $\boldsymbol{\eta}_i$ . Из всего этого следует, что и коротационная производная Яуманна не зависит от системы отсчета.

### Классические среды. Идеальная жидкость (газ). Уравнения Эйлера<sup>11</sup>.

Жидкости и газы обычно не обладают памятью к предыстории деформирования (течения), т.е. поведение таких сред зависит только от текущей конфигурации, поэтому в механике жидкости и газа используют эйлеров подход. Жидкости и газы родственны еще и тем, что обычно приходят в движение при воздействии малейших силовых воздействий на них.

*Идеальными* называют жидкость или газ с шаровым тензором напряжений Коши:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}, \quad (29)$$

где  $p = -\frac{1}{3} \text{sp}\boldsymbol{\sigma}$  — вводимое в механике жидкости и газа *гидростатическое давление*,  $p > 0$ . Соотношение (29) выражает отсутствие внутреннего трения, поскольку такой тензор не содержит касательных напряжений:  $\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j = p\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_j = p\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = 0, i \neq j$ . Если подставить представление (29) в балансовое уравнение количества движения (1), применяя формулу  $\hat{\nabla} \cdot (p\mathbf{I}) = p\hat{\nabla} \cdot \mathbf{I} + (\hat{\nabla} p) \cdot \mathbf{I} = \hat{\nabla} p$ , то получим в терминах эйлера подхода уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p, \quad (30)$$

называемое *уравнением Эйлера*. Добавляя уравнение неразрывности в терминах эйлера подхода

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (31)$$

получим систему (30), (31) четырех независимых скалярных уравнений относительно пяти скалярных неизвестных  $\hat{\rho}, \mathbf{v}, p$ . Необходимо добавить определяющее уравнение, которое может связывать скалярную меру напряжений  $p$  со скалярной мерой деформаций  $\hat{\rho}$  и скалярной мерой скорости деформаций  $\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ . Идеальные жидкость или газ не обладают внутренним трением, и поэтому не рассеивают энергию в тепло. Поэтому для сред такого типа определяющее уравнение должно связывать переменные состояния, а не переменные процесса (к которым следует причислить скорость изменения объема  $\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ ), т.е. только  $p$  и  $\hat{\rho}$ . Эксперименты показывают, что в эту связь в общем входит еще одна (термодинамическая, т.е. немеханическая) независимая переменная — температура  $T$ , в результате чего уравнение состояния принимает вид

$$p = p(\hat{\rho}, T). \quad (32)$$

Если же зависимости от температуры нет, т.е.

$$p = p(\hat{\rho}), \quad (32')$$

<sup>11</sup> Литература: Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.

то процесс называется *баротропным*. Только такими процессами мы здесь и ограничимся, а термодинамику рассмотрим отдельно. Нетрудно проверить, что требование независимости от системы отсчета не накладывает никаких ограничений на (32) или (32').

Частным случаем (32) является уравнение состояния идеального газа. *Идеальным* (в термодинамическом смысле) называют газ, подчиняющийся уравнению Клапейрона:

$$p = \hat{\rho}RT, \quad (33)$$

где под  $R$  понимается универсальная газовая постоянная, отнесенная к молярной массе изучаемого газа. Под  $T$  здесь понимается абсолютная температура. *Совершенным* называют идеальный газ, в котором дополнительно к (33)

$$u = c_V T, \quad c_V = \text{const},$$

где  $c_V$  — теплоемкость при постоянном объеме. *Полиτροпными* называют процессы в совершенном газе, идущие с постоянной теплоемкостью  $c$ . Такие процессы приводят к уравнению состояния

$$p = \text{const } \rho^k, \quad k = k(c)$$

(изохорический, изобарический, изотермический и адиабатический процессы являются их частными случаями) и очевидно являются баротропными.

Итак, постановка механики идеальных баротропных жидкости или газа включает пять независимых скалярных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p,$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \mathbf{v}) = 0,$$

$$p = p(\hat{\rho}).$$

относительно 5 неизвестных  $p, \hat{\rho}, \mathbf{v}$ . Если жидкость или газ принимаются несжимаемыми (для газов эта гипотеза довольно груба), то плотность исключается из числа неизвестных, уравнение неразрывности превращается в условие несжимаемости и система принимает вид четырех независимых уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p,$$

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$$

относительно 4 неизвестных  $p, \mathbf{v}$ , уравнений состояния для определения которых не требуется.

**Линии и трубки тока.** По текущему полю скорости можно построить *линии тока*, касательные к которым совпадают по направлению с векторами скорости, т.е. если  $\hat{\mathbf{x}}$  — географ линии тока, то

$$d\hat{\mathbf{x}} = ds \mathbf{v}$$

или в декартовом ортобазисе

$$\frac{d\hat{x}_1}{v_1} = \frac{d\hat{x}_2}{v_2} = \frac{d\hat{x}_3}{v_3} = ds,$$

короче

$$\frac{d\hat{x}_i}{ds} = v_i(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (39)$$

где  $s$  есть произвольный возрастающий параметр, а  $t$  фиксировано. Определение линии тока, проходящей через данную точку  $\hat{x}_i^o$  пространства, сводится к решению задачи Коши для системы (39) с начальными условиями

$$\hat{x}_i(s=0) = \hat{x}_i^o. \quad (40)$$

За исключением особых точек системы (39) через каждую точку пространства проходит только одна линия тока.

*Траекторией* частицы сплошной среды называется линия, описываемая данной частицей при движении среды. Для ее нахождения вместо (39), (40) ставится следующая задача Коши:

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = v_i(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad (39')$$

$$\hat{x}_i(t=0) = x_i. \quad (40')$$

При *стационарном* движении поле скорости не зависит от времени и постановки задач (39), (40) и (39'), (40') при выборе  $s \equiv t$  и  $\hat{x}_i^o = x_i$  при  $t=0$  совпадают, т.е. в этом случае линии тока совпадают с траекториями частиц.

Выделим в объеме, занятом движущейся средой, не совпадающий с линией тока и не содержащий особых точек произвольный отрезок. Проведя через каждую точку отрезка линию тока, получим *поверхность тока*. Из данного определения следует мгновенная непроницаемость поверхности тока. Если данный отрезок образует замкнутый не пересекающий себя контур, то часть среды, ограниченная натянутой на него поверхностью тока, называется *трубкой тока*. Трубка тока, опирающаяся на бесконечно малый контур, называется элементарной, в противном случае — конечной.

Поверхность, опирающаяся на контур и целиком содержащаяся в трубке, называется *сечением трубки тока*. Если при этом все линии тока ортогональны сечению трубки тока, то последнее называется *нормальным сечением*. Для элементарной трубки ее нормальное сечение существует всегда, причем с точностью до малых более высокого порядка, чем поперечный размер трубки, нормальное сечение можно считать плоским. Для конечных же трубок тока существование нормальных сечений обусловлено выполнением некоторых ограничений на поле скорости, которые мы сейчас сформулируем. Если  $\varphi(\hat{x}_i) = const$  — уравнение сечения трубки тока, то условие его нормальности записывается в виде

$$\mathbf{v} = \delta \hat{\nabla} \varphi,$$

где  $\delta$  зависит от точки на поверхности сечения. Действуя ротором на обе части данного равенства и еще раз используя последнее, получаем сначала

$$\hat{\nabla} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \hat{\nabla} \delta \times \mathbf{v},$$

а затем

$$\mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (41)$$

Это условие выведено в 1881 году казанским гидродинамиком И.С. Громекой. Левая часть (41) носит название *спиральности*, поскольку спиральное движение является простейшим, когда  $\mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \times \mathbf{v}) \neq 0$ .

**Вихревые линии и трубки. Теоремы Кельвина, Лагранжа и Гельмгольца.** С использованием поля вектора вихря скорости  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \hat{\nabla} \times \mathbf{v}$  можно построить *вихревые линии*, в каждой точке которых этот вектор к ним касателен. Аналогичным образом определяются *вихревые поверхность и трубка*, а также *сечение* последней.

Введем *поток вихря* сквозь сечение вихревой трубки:

$$\int_{\hat{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} d\hat{S}. \quad (42)$$

Рассмотрим отрезок вихревой трубки, ограниченный двумя сечениями. Применяя теорему Гаусса - Остроградского к данному отрезку, получим

$$\int_{\hat{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} d\hat{S} = \int_{\hat{V}} \hat{\nabla} \cdot (\hat{\nabla} \times \mathbf{v}) d\hat{V} = 0.$$

На боковой поверхности данного отрезка всюду  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ . Переориентируем одну из внешних нормалей к рассматриваемым сечениям. Отсюда вытекает следующая *кинематическая теорема Гельмгольца*:

Поток вихря через любое сечение вихревой трубки имеет одно и то же значение.

Поэтому понятие потока вихря применимо ко всей вихревой трубке и его называют еще *интенсивностью вихревой трубки*. По теореме Стокса поток вихря сквозь сечение вихревой трубки равен циркуляции скорости по контуру, ограничивающему это сечение,

$$\int_{\hat{S}} \mathbf{n} \cdot (\hat{\nabla} \times \mathbf{v}) d\hat{S} = \oint_{\hat{C}} \mathbf{v} \cdot d\hat{\mathbf{x}},$$

поэтому циркуляция скорости вдоль контура каждого сечения вихревой трубки имеет одно и то же значение при условии одинакового направления обхода.

Из этой теоремы следует, что вихревые трубки не могут обрываться внутри сплошной среды, они либо образуют замкнутые кольца, либо начинаются и заканчиваются на поверхности среды. Если диаметр вихревой трубки в какой-то точке становится исчезающе малым, сечение данной трубки в этой точке в известном приближении можно считать плоским, из теоремы

$$\boldsymbol{\omega} d\hat{S} = const$$

при  $d\hat{S} \rightarrow 0$  следует  $\omega \rightarrow \infty$ . Предельный случай вырождения сечения вихревой трубки в точку невозможен, поскольку противоречит непрерывности поля скорости.

Докажем *теорему Кельвина*:

В идеальной баротропной жидкости в поле консервативных сил циркуляция скорости по любому замкнутому материальному контуру не зависит от времени.

Для этого сначала убедимся, что

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r},$$

затем в уравнении Эйлера (30), записанном в лагранжевой форме

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} - \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p, \quad (43)$$

учтем условие консервативности сил, означающее существование потенциала  $V$

$$\mathbf{f} = -\hat{\nabla} V, \quad (44)$$

и баротропность процесса, приводящую к существованию *функции давления*:

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\hat{\rho}(p)},$$

пространственный градиент которой дает внутреннюю силу в уравнении Эйлера:

$$\hat{\nabla} P = \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p. \quad (45)$$

В результате

$$\dot{\mathbf{v}} = -\hat{\nabla}(V + P) \quad (46)$$

и

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\oint d(V + P) = 0.$$

Далее докажем *теорему Лагранжа*:

Если в некоторый момент времени движение фиксированного материального объема идеальной баротропной жидкости под действием потенциальных внешних сил является безвихревым (потенциальным), то оно было и будет таким во все другие моменты времени.

Если в некоторый момент времени во всех точках материального объема отсутствует вихрь, то в этот момент времени интеграл

$$\int_{\hat{S}} \mathbf{n} \cdot \omega \, d\hat{S}$$

( $\hat{S}$  — выбранная в этот момент времени произвольная материальная поверхность, опирающаяся на материальный контур) равен нулю. Согласно теореме Кельвина этот интеграл равен нулю в любой момент времени. Из произвольности материальной поверхности тогда следует

$$\boldsymbol{\omega} \equiv 0$$

во всех точках материального объема в любой момент времени. Во многих случаях движение жидкости рассматривается из положения покоя, когда  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$  и следовательно  $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0}$ . Если выполнены условия теоремы Лагранжа, то течение будет потенциальным в любой момент времени.

В условиях теоремы Кельвина справедлива *первая теорема Гельмгольца*:

Если жидкие частицы образуют вихревую линию в какой-то момент времени, то они образуют вихревую линию во все последующие и предыдущие моменты времени.

Докажем ее. Рассмотрим в некоторый момент времени вихревую поверхность  $S_0$ , согласно определению которой в каждой ее точке  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , поэтому циркуляция сквозь произвольный материальный контур на этой поверхности (не опоясывающий ее, если она поверхность вихревой трубки) равна нулю. Из гладкости поля скорости частицы выбранного материального контура и в любой другой момент времени будут образовывать материальный контур, лежащий на поверхности  $S$ , образованной материальными частицами первоначальной вихревой поверхности. По теореме Кельвина циркуляция по материальному контуру сохранит нулевое значение, и ввиду произвольности контура в любой точке поверхности  $S$  должно выполняться условие  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , поэтому эта поверхность также вихревая. Далее, проведем в некоторый момент времени через произвольную точку вихревой линии две пересекающиеся в ней кривые и построим проходящие через них вихревые поверхности. Линия их пересечения есть исходная вихревая линия. В другой момент времени исходные вихревые поверхности по доказанному перейдут также в вихревые поверхности, следовательно, линия их пересечения также перейдет в вихревую линию.

Из этой теоремы следует, что вихревую трубку можно воспринимать как существующий во времени материальный объект. На основе кинематической теоремы Гельмгольца было введено понятие интенсивности вихревой трубки. Теперь нетрудно понять, что

Интенсивность вихревой трубки не изменяется со временем.

(*вторая теорема Гельмгольца*).

**Интегралы системы уравнений механики идеальной жидкости/газа.**

Рассмотрим стационарное движение идеальной баротропной жидкости под действием консервативных сил. Сворачивая обе части уравнения Эйлера в форме (46)

$$\dot{\mathbf{v}} = -\hat{\nabla}(V + P)$$

с элементарным перемещением  $d\hat{\mathbf{x}}$  вдоль линии тока, совпадающей сейчас с траекторией, получаем

$$\dot{\mathbf{v}} \cdot d\hat{\mathbf{x}} = -d\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\nabla}(V + P)$$

или

$$d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = -d(V + P),$$

где дифференциал понимается вдоль линии тока - траектории, откуда

$$d\left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + V + P\right) = 0$$

или

$$\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + V + P = \text{const}, \quad (47)$$

где постоянная справа (47) может изменяться при переходе с одной линии тока на другую. Равенство (43) называют *интегралом Бернулли*.

Получим интеграл для нестационарного, но потенциального движения той же идеальной баротропной жидкости под действием консервативных сил. Потенциальность течения означает существование функции  $\varphi$ , пространственный градиент которой дает поле скорости:

$$\mathbf{v} = \hat{\nabla} \varphi. \quad (48)$$

Представим переносный член уравнения Эйлера в виде

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} = \hat{\nabla} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + (\hat{\nabla} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v},$$

в результате чего это уравнение примет *форму Лэмба - Громеки*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \hat{\nabla} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\hat{\rho}} \hat{\nabla} p. \quad (49)$$

Используя это уравнение, принятые ограничения и независимость пространственных и временной координат, получим

$$\hat{\nabla} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + P + V \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + P + V = \theta(t). \quad (50)$$

Правая часть (50) не зависит от точки пространства, а есть функция только времени. Поскольку потенциал скорости очевидно определен с точностью до произвольной функции, зависящей только от времени, можно положить  $\theta(t) \equiv 0$ .

Полученное соотношение носит название *интеграла Лагранжа*. В отличие от интеграла Бернулли этот интеграл годится для неустановившихся движений, но требует безвихревого течения. В случае стационарного движения интеграл

$$\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + P + V = \text{const} \quad (51)$$

носит название *интеграла Эйлера - Бернулли*. Здесь постоянная справа постоянна для всего потока в отличие от интеграла Бернулли.

**Линейно-вязкая (ньютоновская) жидкость (газ). Уравнения Навье - Стокса.** Для данных сред не накладывают никаких ограничений на тензор напряжений. Определяющие уравнения для таких сред в рамках (не обязательного) предположения о несжимаемости линейно связывают девиаторные части тензора напряжений Коши и тензора деформации скорости:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu\mathbf{D}, \quad (52')$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости. Для тензора напряжений Коши тогда имеет место выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (52)$$

где гидростатическое давление не определяется локальной кинематикой. Элементарно проверяется независимость (52') или (52) от системы отсчета.

Найдем дивергенцию (52):

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\hat{\nabla} p + \mu \hat{\nabla} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{v} \hat{\nabla}) = -\hat{\nabla} p + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (53)$$

Здесь использовано, что

$$\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \hat{\nabla}) = 0,$$

получаемое с помощью тождества

$$\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{a} \mathbf{b}) = (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{b})$$

с  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{\nabla}$ , условия несжимаемости  $\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$  и независимости вектора пространственного градиента  $\hat{\nabla}$  от пространственных координат. Подставляя (53) в (30), получаем уравнение Навье - Стокса

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \hat{\nabla} p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (54)$$

в котором  $\nu = \mu / \hat{\rho}$  называют кинематическим коэффициентом вязкости.

Уравнения (54) и

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (55)$$

образуют систему четырех независимых уравнений для определения четырех неизвестных скалярных полей  $\mathbf{v}, p$ .

**Плоская задача.** Для плоского безвихревого течения

$$\partial_x v_y - \partial_y v_x = 0 \quad (56)$$

всегда существует потенциал скоростей

$$d\phi = v_x dx + v_y dy,$$

$$v_x = \partial_x \phi, \quad v_y = \partial_y \phi, \quad (57)$$

а для плоского течения несжимаемой жидкости

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0 \quad (58)$$

— функция тока

$$d\psi = v_x dy - v_y dx,$$

$$v_x = \partial_y \psi, \quad v_y = -\partial_x \psi. \quad (59)$$

Из уравнений линий тока в плоском случае следует

$$v_x dy - v_y dx = 0,$$

поэтому вдоль линий тока функция  $\psi$  постоянна, за что и получила свое название. Через функцию тока можно вычислить расход жидкости, протекающей через кривую АВ:

$$Q = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A.$$

Имеется простая связь между функцией тока и вихрем скорости:

$$\omega = -\Delta\psi.$$

Отсюда или из (56), (59) для безвихревого течения несжимаемой жидкости

$$\Delta\psi = 0.$$

Из (57), (58) для безвихревого течения несжимаемой жидкости

$$\Delta\varphi = 0.$$

Из (57), (59) для безвихревого течения несжимаемой жидкости следуют связи между функцией тока и потенциалом скоростей:

$$\partial_x \varphi = \partial_y \psi, \quad \partial_y \varphi = -\partial_x \psi,$$

представляющие собой условия Коши - Римана, гарантирующие, что функция

$$u = \varphi + i\psi$$

есть функция комплексной переменной  $z = x + iy$ . Введенные выше функции широко используются при решении плоских задач механики жидкостей и газов с различной реологией, а также вязких и пластических сред.

**Модели упругих сред** используются для описания деформируемых твердых тел и характеризуются определяющими уравнениями (уравнениями состояния) вида

$$\mathbf{t} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}, \tag{x}$$

где  $u$  — плотность внутренней энергии, а  $\mathbf{e}, \mathbf{t}$  — пара энергетически сопряженных мер деформаций и напряжений правого семейства. Плотность внутренней энергии  $u$  упругой среды называют упругим потенциалом. То, что определяющие соотношения (x) строятся с помощью функции состояния  $u$ , означает, что они являются уравнениями состояния. Из термодинамических соображений функция  $u$  является строго выпуклой, следовательно связь мер напряжений и деформаций (x) взаимно однозначна. Поскольку любая мера деформаций определяется по паре (отсчетной и текущей) конфигураций, упругое тело идеально помнит отсчетную естественную конфигурацию тела.

Строго говоря<sup>12</sup>, если существует упругий потенциал, то среду называют *гиперупругой*, т.е. (x) — определяющие уравнения гиперупругой среды. *Упругой* же называют среду, характеризующуюся определяющими уравнениями вида

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi(\hat{\mathbf{e}}), \tag{xx}$$

<sup>12</sup> См. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.

где  $\Phi$  — взаимно-однозначная функция. Гиперупругость есть частный случай упругости. Еще более широкий класс *гипоупругих* определяющих уравнений записывается в скоростном виде

$$\sigma^J = \Pi : D, \quad (\text{xxx})$$

где тензор  $\Pi$  может зависеть от напряжений:  $\Pi = \Pi(\sigma)$ . Конечно, в моделях чаще имеют дело с математически более приятными гиперупругими средами, поэтому их и называют попросту “упругими”.

Независимость от системы отсчета не накладывает никаких ограничений на функцию  $u$ , требует изотропию функции  $\Phi$  и тензора  $\Pi$ . Гиперупругие среды обычно используются в рамках отсчетного лагранжева описания, упругие — текущего лагранжева описания, а гипоупругие — текущего лагранжева описания в скоростях.

**Модель линейно-упругой среды** используется для описания малых упругих деформаций твердых тел. В качестве меры деформаций используется тензор малых деформаций, а в качестве подхода к описанию движения — пространственный (или эйлеров) подход. Определяющие соотношения линейно-упругой среды представляют собой линейную функцию, связывающую тензор напряжений с тензором малых деформаций (*обобщенный закон Гука*):

$$\sigma = C : \varepsilon. \quad (60)$$

В закон преобразования тензора малых деформаций при замене системы отсчета сложным образом входит тензор  $O$  поворота реперов систем, поэтому (60) зависимы от системы отсчета и их нужно употреблять осторожно — только для деформируемых тел, не испытывающих поворотов относительно инерциальной системы отсчета (в которой решается задача).

В силу симметрии  $\varepsilon$  и  $\sigma$  тензор жесткости  $C$  симметричен относительно транспозиций внутри первой и последней пар индексов:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}. \quad (61)$$

Плотность внутренней энергии для линейно-упругой среды

$$u = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon \quad (62)$$

из термодинамических соображений представляет собой положительно определенную квадратичную форму, т.е.  $u > 0$  при  $\varepsilon \neq 0$  и  $u = 0$  при  $\varepsilon = 0$ . Отсюда вытекает дополнительная симметрия  $C$  относительно транспозиции первой и последней пар индексов:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (63)$$

Тензоры четвертого ранга, удовлетворяющие условиям (61), (63), называются *полусимметричными*.

В случае изотропии

$$C = \lambda C_I + \mu (C_{II} + C_{III}),$$

т.е. существуют всего две константы — (*константы Ламе*), описывающие упругие свойства, и (60) принимает вид

$$\sigma = \lambda \varepsilon I + 2\mu \varepsilon, \quad (64)$$

где  $\varepsilon = \text{sr}\varepsilon$  — объемная деформация. Действуя операцией  $\text{sr}$  на (64), получим

$$\sigma = K\varepsilon, \quad (65)$$

где  $\sigma = \frac{1}{3}\text{sr}\sigma$  — среднее напряжение,  $K = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$  — модуль объемного сжатия.

Вместо изотропных упругих констант  $\lambda$ ,  $\mu$  используют и другие пары; взаимосвязи упругих констант сведены в таблицу:

Постоянные	Основная пара				
	$\lambda, \mu$	$K, G$	$\mu, \nu$	$E, \nu$	$E, G$
$\lambda$	$\lambda$	$K - \frac{2}{3}\mu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu(G)$	$\mu$	$G$	$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$G$
$K$	$\lambda - \frac{2}{3}\mu$	$K$	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
$E$	$\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$2(1+\nu)\mu$	$E$	$E$
$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	$\nu$	$\nu$	$\frac{E}{2G} - 1$
$K = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$					

Tableau 2.1 – Relations entre constantes élastiques (d'après Leipholz, 1974)

Paramètres Couples de paramètres	Module de cisaillement $G = \mu$	Module d'Young $E$	Module de compression $K$	Coefficient de Poisson $\nu$	Paramètre de Lamé $\lambda$
G, E	G	E	$\frac{GE}{9G-3E}$	$\frac{E-2G}{2G}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
G, K	G	$\frac{9GK}{3K+G}$	K	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$K - \frac{2G}{3}$
G, $\lambda$	G	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\lambda$
G, $\nu$	G	$2G(1+\nu)$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\nu$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$
E, K	$\frac{3KE}{9K-E}$	E	K	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{K(9K-3E)}{9K-E}$
E, $\nu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	E	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\nu$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
K, $\lambda$	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	K	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\lambda$
K, $\nu$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1-2\nu)$	K	$\nu$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$

Константа  $E$  называется *модулем Юнга* и характеризует жесткость при одноосном нагружении

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}},$$

а *коэффициент Пуассона*  $\nu$  — отношение поперечной и продольной деформаций при одноосном нагружении

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}.$$

Константу  $G$  называют *модулем сдвига*. Внутренняя энергия в случае изотропии с помощью (62), (64) записывается

$$u = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2 + \mu \varepsilon : \varepsilon. \quad (66)$$

В случае наличия анизотропии тензор жесткости содержит в зависимости от типа симметрии максимум 18 инвариантов<sup>13</sup>. У тензора четвертого ранга  $\mathbf{C}$  как линейного оператора симметрия (63) обеспечивает существование до шести собственных чисел (причем все из них действительные) и шести ортонормированных собственных тензоров

$$\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_i = c_i \boldsymbol{\alpha}_i.$$

Симметрия (61) гарантирует, что все эти собственные тензоры симметричны и следовательно имеют максимум по три инварианта. Итак, у  $\mathbf{C}$  имеется максимум шесть истинных модулей жесткости  $c_i$  (размерности [Па]), являющихся его собственными числами. Каждый из шести собственных тензоров характеризуется тремя инвариантами и тремя углами Эйлера, задающими ориентацию его главных осей в лабораторном репере. На эти 36 параметров накладываются условия нормировки (6) и ортогональности (15) собственных тензоров. Из 15 независимых параметров 3 характеризуют ориентацию осей анизотропии относительно лабораторного репера, а оставшиеся 12 безразмерных инвариантов называются дистрибуторами жесткости.

**Уравнения Ламе.** Запишем уравнения равновесия линейно-упругого изотропного континуума в терминах вектора перемещения, для чего в уравнения равновесия (для простоты без массовых сил)

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (67)$$

подставляется уравнение (64), в котором тензор малых деформаций выражен через вектор перемещений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \hat{\nabla}), \quad (68)$$

в результате чего немедленно получается

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (69')$$

или

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (69)$$

Векторное уравнение (69) служит для определения одного неизвестного вектора и называется *уравнением Ламе*. Для решения задачи к нему необходимо присоединить граничные условия на вектор перемещения

$$\mathbf{u}|_{\hat{S}} = \mathbf{u}_0$$

или вектор поверхностной силы

<sup>13</sup> Рыхлевский Я. О законе Гука // ПММ. 1984. Т.48. Вып.3. С. 420-435.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \hat{s}_1 = \hat{\mathbf{t}}_0,$$

причем последнее с помощью (64) и (68) записывается в виде условий на градиент вектора перемещения.

**Уравнения Бельтрами - Митчелла.** Так же легко получить уравнение равновесия в терминах тензора напряжений. Для его вывода подействуем оператором  $\text{def}$  на (69'):

$$\Delta \text{def } \mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \hat{\nabla} \hat{\nabla} \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (70)$$

(здесь использована коммутативность операторов  $\text{def}$  и  $\Delta$  и тождество  $\text{def} \nabla \alpha = \frac{1}{2} (\nabla \nabla \alpha + \nabla \alpha \nabla) = \nabla \nabla \alpha$ ). Действуя операцией  $\text{sp}$  на (70), получаем

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (71)$$

Подставляя в (70) обращение (64)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}$$

и используя (71) и (65), наконец, получаем

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{1+\nu} \hat{\nabla} \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (72)$$

где коэффициент при втором слагаемом был  $\frac{6(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu}$  выражен через коэффициент Пуассона. (72) носит название *уравнения Бельтрами - Митчелла* и содержит шесть независимых скалярных уравнений для определения шести неизвестных компонент тензора напряжений. Задача в напряжениях обычно ставится, когда на границе известны поверхностные силы:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / \hat{s}_1 = \hat{\mathbf{t}}_0.$$

Поскольку при получении уравнений Бельтрами - Митчелла порядок производных был повышен на единицу, для решения задачи потребуется еще столько же граничных условий, в качестве которых используют

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

на любой границе внутри тела.

Уравнения Бельтрами - Митчелла можно получить и иначе — добавляя к уравнению равновесия

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

условие совместности деформаций Сен-Венана

$$\text{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

и определяющее уравнение (64). Примененный выше способ эквивалентен данному, поскольку представление  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u}$  означает совместность деформаций.

**Единственность решения линейно-упругой статической задачи.**

Предположим существуют два решения:

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{f} = 0, \quad \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}'' + \mathbf{f} = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}' / \hat{s}_1 = \hat{\mathbf{t}}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}'' / \hat{s}_1 = \hat{\mathbf{t}}_0,$$

$$\mathbf{u}'/\hat{S}_2 = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}''/\hat{S}_2 = \mathbf{u}_0.$$

( $\hat{S}_1 \cup \hat{S}_2 = \hat{S}$ ) и аналогично для связей (60) и (68). Вычитая друг из друга соответствующие уравнения, получим, что поля  $\delta\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}''$ ,  $\delta\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$  удовлетворяют однородным уравнениям

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma}/_S &= 0, \\ \delta\mathbf{u}/_{S_2} &= 0 \end{aligned}$$

и связям (60), (68). Рассматривая полученное как своеобразную задачу, применим к ней тождество

$$\int_{\hat{V}} \mathbf{u} d\hat{V} = \int_{\hat{S}} \delta t \cdot \delta \mathbf{u} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\hat{V}.$$

У нас на части границы  $\delta t = 0$ , на оставшейся ее части  $\delta \mathbf{u} = 0$ , и внутри тела  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , следовательно  $\int_{\hat{V}} \mathbf{u} d\hat{V} = 0$ , откуда  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ , т.е. поля напряжений и

деформаций в теле единственны, а поля  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{u}''$  могут отличаться только на трансляцию и поворот тела как жесткого целого.

#### Фундаментальное решение для изотропной линейно-упругой среды.

Пусть на неограниченную трехмерную линейно-упругую изотропную среду действует приложенная в некоторой точке сила  $\mathbf{e}$ . Требуется найти вызванное ею поле перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{x}})$  в среде.

Линейность задачи означает, что  $\mathbf{u}(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{x}})$  от  $\mathbf{e}$  зависит линейно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}. \quad (73)$$

Из  $0 < \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}$  вытекает, что тензор  $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})$  по меньшей мере симметричен. Существует единственное представление симметричной тензорной функции одного векторного аргумента:

$$\mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}}) = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{a} \mathbf{a}, \quad (74)$$

где  $\alpha, \beta$  функции единственного инварианта вектора  $\hat{\mathbf{x}}$  — его длины  $r$ :

$\alpha = \alpha(r)$ ,  $\beta = \beta(r)$ , а  $\mathbf{a} = r^{-1} \hat{\mathbf{x}}$  — единичный вектор вдоль  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Вид этих функций можно определить из уравнения равновесия

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{e} \delta(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad (75)$$

где  $\delta(\cdot)$  обозначает дельта-функцию, сосредоточенную в нуле (где считается приложенной сила). Взяв от (75) интеграл по объему шара с центром в нуле, получим:

$$\int_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = -\mathbf{e}. \quad (76)$$

Здесь были использованы теорема Гаусса - Остроградского, определение дельта-функции и то, что нормаль к поверхности шара есть  $\mathbf{a}$ ; радиус шара  $r$  здесь конечно же не важен. Интегрирование в (76) ведется только по аргументу  $\mathbf{a}$ ,

пробегающему поверхность сферы радиуса  $r$ . Из (64), (68) и (73) видно, что  $\sigma$  выражается через  $\hat{\nabla} \mathbf{G}$  — функцию нечетную по  $\mathbf{a}$ , поскольку  $\mathbf{G}$  по  $\mathbf{a}$  четная (см. (74)), а отсюда подынтегральное выражение в (76) есть функция снова четная по  $\mathbf{a}$ . Поскольку  $dS = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta$ , а интеграл в (76) не должен зависеть от  $r$ , должно быть  $\alpha \sim r^{-1}$ ,  $\beta \sim r^{-1}$ , поэтому  $\mathbf{u}$  представляется в виде

$$\mathbf{u} = r^{-1} (\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{a}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}, \quad (77)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  теперь константы, которые находятся из уравнения равновесия.

Для любой точки с  $r \neq 0$  массовая сила в (75) пропадает и следовательно (77) должно удовлетворять уравнению Ламе в форме (69):

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Из (77) с учетом

$$\hat{\nabla} \mathbf{a} = \hat{\nabla} (r^{-1} \hat{\mathbf{x}}) = -r^{-2} \mathbf{a} \hat{\mathbf{x}} + r^{-1} \mathbf{I} = r^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}),$$

$$\hat{\nabla} (\mathbf{a}\mathbf{a}) = r^{-1} (\mathbf{I}\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{a}_k \mathbf{a}\mathbf{a}_k),$$

где  $\mathbf{a}_k$  — произвольный ортобазис с  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}$ , получаем сначала

$$\hat{\nabla} \mathbf{u} = r^{-2} (-\alpha \mathbf{a}\mathbf{I} + \beta \mathbf{I}\mathbf{a} - 3\beta \mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{a} + \beta \mathbf{a}_k \mathbf{a}\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{e}, \quad (78)$$

а затем

$$\Delta \mathbf{u} = 2\beta r^{-3} (\mathbf{I} - 3\mathbf{a}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}, \quad \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} = (\beta - \alpha) r^{-3} (\mathbf{I} - 3\mathbf{a}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e},$$

откуда в силу (69)

$$\alpha = (3 - 4\nu) \beta. \quad (79)$$

Для учета приложенной силы используем (76) (уравнение (75) точке  $r = 0$  смысла не имеет). Используя определяющие уравнения (64) в форме

$$\sigma = \mu (\hat{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \hat{\nabla} + \kappa \hat{\nabla} \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}),$$

где  $\kappa = \frac{2\nu}{1-2\nu}$ , (78) и (79), приводим подынтегральное выражение в (76) к виду

$$-2\mu\beta r^{-2} [(1-2\nu)\mathbf{I} + 3\mathbf{a}\mathbf{a}]$$

и, следовательно, остается взять интеграл по поверхности единичной сферы от диады  $\mathbf{a}\mathbf{a}$ . Для этого используется теорема Гаусса - Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{a}\mathbf{a} dV &= \int_S \mathbf{a} \cdot (\mathbf{I}\mathbf{a}) dV = \int_V \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{I}\mathbf{a}) dV = \int_V r^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}) dV = \\ &= \int_0^1 r dr \int_S (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}) dS = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}) dS = 2\pi - \frac{1}{2} \int_S \mathbf{a}\mathbf{a} dS, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_S \mathbf{a}\mathbf{a} dV = \frac{4}{3} \pi.$$

Окончательно из (76)

$$\beta = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}. \quad (80)$$

В итоге

$$\mathbf{G} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} ((3-4\nu)\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{a}). \quad (81)$$

Этот тензор носит название *тензора Кельвина - Сомильяны* и очевидно представляет собой фундаментальное решение для оператора равновесия трехмерной линейно-упругой изотропной среды. С его помощью можно отыскать поле перемещений, вызванное произвольным полем объемных сил  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{u} = \int_V \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}') dV'. \quad (82)$$

**Получение фундаментального решения с помощью преобразования Фурье.** Оператор задачи в перемещениях запишем в виде

$$-(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\nabla}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}\delta(\hat{\mathbf{x}}) \quad (83)$$

(подставили в (75) (60) и (68)). Подставляя в (83) решение (73), получим

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{I}\delta(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{L} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\nabla}. \quad (84)$$

Применим к (84) преобразование Фурье:

$$\tilde{\mathbf{L}} \cdot \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k},$$

откуда

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}.$$

Обратим тензор  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}$ , с учетом (64') принимающий вид

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mu k^2 \mathbf{I} + (\lambda + \mu) \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad (85)$$

где  $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ , в результате чего получим

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mu^{-1} k^{-2} (\mathbf{I} - \mathfrak{G} k^{-2} \mathbf{k}\mathbf{k}), \quad (86)$$

где  $\mathfrak{G} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1-\nu)}$ . Переходя к преобразам<sup>14</sup>

$$k^{-2} \rightarrow \frac{1}{4\pi r}, \quad k^{-4} \mathbf{k}\mathbf{k} \rightarrow \frac{1}{8\pi r} (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}),$$

окончательно получаем (81).

**Задача о включении<sup>15</sup>.** Пусть в неограниченной трехмерной линейно-упругой изотропной среде (“матрице”) имеется эллипсоидальное включение с линейно-упругими изотропными свойствами, отличными от свойств матрицы. Включение неразрывно связано с матрицей по границе их контакта. В отсутствие сил ни в матрице, ни во включении никаких напряжений нет. Пусть на бесконечности к матрице приложены такие поверхностные нагрузки, которые в отсутствие включения (точнее в отсутствие различия упругих свойств матрицы и включения) вызывали бы однородное поле деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_\infty$  (эквивалентное

<sup>14</sup> Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.

<sup>15</sup> Использована статья: Вакуленко А.А. Об эффективных свойствах и прочности керамических композитов // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. №6. С. 50 - 72.

линейному полю перемещений  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}_\infty \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ). Требуется найти поле деформаций во включении.

Если тензоры  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}$  характеризуют линейно-упругие изотропные свойства матрицы и включения, то определяющие уравнения удобно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}') : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{C}' = (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) \theta(v), \quad (87)$$

где  $\theta(v)$  — характеристическая функция, равная единице во включении и нулю вне его. Внося (87) в уравнение равновесия  $\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ , получим

$$\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_0 : \hat{\nabla} \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{f} = \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{C}' : \hat{\nabla} \mathbf{u}). \quad (88)$$

(88) можно воспринимать как уравнение равновесия однородной среды со свойствами матрицы, на которую (помимо сил на бесконечно удаленной поверхности) действует поле объемных сил  $\mathbf{f}$ . Эти силы формально выделены в (88), зависят от искомого поля  $\mathbf{u}$  и в реальности вызваны исключительно наличием включения. С использованием (82) решение (88) может быть записано в виде

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}_\infty \cdot \hat{\mathbf{x}} + \int_{E_3} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}') \cdot (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{C}' : \hat{\nabla} \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}')) dV'. \quad (89)$$

Интеграл в (89) может быть преобразован с помощью тождества

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}^T : \nabla \mathbf{B}$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{C}' : \hat{\nabla} \mathbf{u}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{G}$  — симметричны, затем к дивергентному члену применяется теорема Гаусса - Остроградского и используется, что  $\mathbf{C}'$ , а вместе с ним и  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  на бесконечно удаленных границах обращаются в ноль. В итоге (89) принимает вид

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}_\infty \cdot \hat{\mathbf{x}} - \int_v \hat{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}') : (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) : \hat{\nabla} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}') dv'. \quad (90)$$

Покажем, что

$$\int_v \hat{\nabla} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}') dv' \quad (91)$$

линейно зависит от фиксированного  $\hat{\mathbf{x}} \in v$ . Выберем начало в центре эллипсоида и введем вектор  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}' - \hat{\mathbf{x}}$ ; в силу нечетности  $\hat{\nabla} \mathbf{G}$  по направлению вектора-аргумента,  $\hat{\nabla} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}') = -\hat{\nabla} \mathbf{G}(\mathbf{r})$ . Используя сферические координаты с центром в точке  $\hat{\mathbf{x}}$ , интеграл (91) можно записать как

$$\int_0^{r_*} dr \int_{S_1} \mathbf{K}(\mathbf{a}) dS = \int_{S_1} \mathbf{K}(\mathbf{a}) r_*(\mathbf{a}) dS, \quad (92)$$

где тензор третьего ранга  $\mathbf{K}(\mathbf{a})$  равен выражению в скобках (78), интегрирование производится по всем  $\mathbf{a}$  на единичной сфере, а  $r_*(\mathbf{a})$  есть расстояние от центра системы координат до поверхности эллипсоида в направлении  $\mathbf{a}$ . Чтобы найти  $r_*(\mathbf{a})$ , введем тензор, характеризующий эллипсоид:

$$\mathbf{T} = a_1^{-2} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + a_2^{-2} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + a_3^{-2} \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3,$$

где  $\mathbf{a}_i$  — ортобазис главных осей эллипсоида, а  $a_i$  — полуоси последнего. Квадратичная форма  $\mathbf{T}$  задает уравнение поверхности эллипсоида  $\mathbf{x}_* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_* = 1$  с  $\mathbf{x}_* = \hat{\mathbf{x}} + r_* \mathbf{a}$ , т.е.

$$(\hat{\mathbf{x}} + r_* \mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} \cdot (\hat{\mathbf{x}} + r_* \mathbf{a}) = 1,$$

единственное положительное решение которого есть

$$r_* = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot [-\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{x}} + ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{x}} - 1))^{1/2}].$$

Первое слагаемое здесь четно по  $\mathbf{a}$ , а второе — нечетно. Поскольку  $\mathbf{K}(\mathbf{a})$  в (92) нечетно по  $\mathbf{a}$ , от интеграла остается

$$-\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \int_{S_1} \mathbf{a} \mathbf{K}(\mathbf{a}) r_*(\mathbf{a}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a})^{-1} dS$$

— линейная по  $\hat{\mathbf{x}}$  функция. Итак,

$$\int_V \hat{\nabla} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}') dV' = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \int_{S_1} \mathbf{a} \mathbf{K}(\mathbf{a}) r_*(\mathbf{a}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a})^{-1} dS \equiv \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}. \quad (93)$$

Из доказательства видно, что линейность этого интеграла по координатам есть следствие эллипсоидальности формы включения.

У интегрального уравнения (90) существует линейное по  $\hat{\mathbf{x}}$  решение. Действительно, подставляя в него  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}_\circ \cdot \hat{\mathbf{x}}$  и используя (93), получаем

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\circ + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H} : (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0) : \boldsymbol{\varepsilon}_\circ. \quad (94)$$

Действуя на обе части (94) оператором  $\text{def}$  и выражая  $\boldsymbol{\varepsilon}_\circ$ , получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\circ = [1 + \mathbf{H} : (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}_\circ, \quad (95)$$

где

$$1 = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{II} + \mathbf{C}_{III})$$

— единица в алгебре полусимметричных тензоров четвертого ранга. Поскольку линейно-упругая задача всегда имеет единственное решение, (94) и есть искомое нами решение задачи о включении, впервые полученное Эшелби. Замечательно то, что деформации во включении однородны и существует линейный оператор

$$\mathbf{L} = [1 + \mathbf{H} : (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)]^{-1}, \quad (96)$$

связывающий деформации матрицы без включения с деформациями внутри включения. Этот линейный оператор зависит только от соотношения упругих постоянных матрицы и включения, отношения полуосей эллипсоида и ориентации трехгранника его главных осей в пространстве.

Компоненты  $\mathbf{H}$  в ортобазисе главных осей эллипсоида имеют вид<sup>16</sup>:

<sup>16</sup> Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композиционных материалов. Петрозаводск, 1993. 600 с.

$$\begin{aligned}
H_{1111} &= \frac{\kappa_0}{8\pi\mu_0} [3J_{11} + (1 - 4\nu_0)J_1], \\
H_{1122} &= \frac{\kappa_0}{8\pi\mu_0} [J_{21} - J_1] = \frac{\kappa_0}{8\pi\mu_0} [J_{12} - J_2] = H_{2211}, \\
H_{1212} &= \frac{\kappa_0}{8\pi\mu_0} [J_{12} + J_{21} + (1 - 2\nu_0)(J_1 + J_2)], \\
\kappa_0 &= \frac{1}{2(1-\nu_0)},
\end{aligned} \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned}
J_p &= \frac{3}{2}\sigma \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+a_p^2)\Delta(\xi)}, \\
J_{pq} &= \frac{3}{2}\sigma a_p^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+a_p^2)(\xi+a_q^2)\Delta(\xi)}, \\
\Delta &\equiv [(\xi+a_1^2)(\xi+a_2^2)(\xi+a_3^2)]^{1/2}, \quad \sigma = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3,
\end{aligned} \tag{98}$$

а остальные компоненты получаются циклической перестановкой индексов (1,2,3). Если среди полуосей эллипсоида нет кратных, то записанные выше интегралы выражаются через высшие трансцендентные функции — эллиптические интегралы первого и второго родов.

Рассматривая различные асимптотики, можно рассмотреть включения в виде эллипсоида вращения, в частности сплюснутого или вытянутого, бесконечных стержня и слоя, шара, включений в плоскости (эллипс, полоса, круг), случаи отверстия или абсолютно жесткого включения и всевозможные другие специализации. Существование исключительно простого решения для включения некоторой формы позволило значительно развить механику структурно-неоднородных сред, теорию внутренних напряжений и континуально распределенных дислокаций, привлечь в континуальную механику геометрию пространств аффинной связности.

К круговому включению в плоскости можно прийти, устремляя в (97), (98) третью полуось к бесконечности и учитывая компоненты, содержащие 1 и 2, в результате чего получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{8\mu_0(1-\nu_0)} \{2(1-2\nu_0), 3-4\nu_0\}$$

в базисе  $\frac{1}{2}\mathbf{C}_I$  и  $1-\frac{1}{2}\mathbf{C}_I$  над плоскостью. В этом базисе все операции над (изотропными полусимметричными) тензорами сводятся к идентичным операциям над их компонентами. Получим с помощью (95) решение задачи *Кириша*, для чего вместо включения следует рассмотреть отверстие, т.е.  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ . Получаем

$$\mathbf{L} = (1 - \mathbf{H}\mathbf{C}_0)^{-1}.$$

Выполняя операции, получим в том же базисе

$$\mathbf{L} = \{(1 - \kappa_0)^{-1}, 2\kappa_0^{-1}\}.$$

Тогда  $L_{1111} = L_{2222} = \frac{(3-4\nu_0)(1-\nu_0)}{(1-2\nu_0)}$ ,  $L_{1122} = L_{2211} = \frac{(-1+4\nu_0)(1-\nu_0)}{(1-2\nu_0)}$ . Для одноосного растяжения плоскости распределенной нагрузкой в первом направлении

$\varepsilon_{\infty 22} = -\frac{v_0}{1-v_0} \varepsilon_{\infty 11}$ . В итоге имеем  $\varepsilon_{*11} = -3\varepsilon_{*22}$  — полученный Киршем в 1900 г. результат.

**Классические теоремы статики линейной теории упругости.** Пусть тело, находящееся в равновесии под действием массовых и поверхностных сил, испытало вариации перемещений, совместимые с кинематическими граничными условиями

$$\delta \mathbf{u} /_{\hat{S}_2} = 0. \quad (99)$$

Тогда из тождества

$$\int_{\hat{V}} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hat{\rho} \hat{\mathbf{f}}) d\hat{V} - \int_{\hat{S}_1} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{t}}) d\hat{S} = 0$$

с помощью линейности тензора малых деформаций:  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \text{def} \delta \mathbf{u}$ , равенства  $\delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \hat{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , теоремы Гаусса - Остроградского и (99) получаем

$$\int_{\hat{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u} d\hat{V} + \int_{\hat{S}_1} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\hat{S} = 0. \quad (100)$$

Данное равенство означает, что в состоянии равновесия работа внешних сил на вариациях перемещений равна работе напряжений на возможных деформациях. Если внешние силы *мертвые*, т.е. не зависят от  $\delta \mathbf{u}$ , то (100) можно записать в виде

$$\delta E = 0, \quad E = \int_{\hat{V}} u(\boldsymbol{\varepsilon}) d\hat{V} - \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} d\hat{V} - \int_{\hat{S}_1} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\hat{S}, \quad u(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (101)$$

где  $E$  представляет собой полную потенциальную энергию тела в рассматриваемом равновесном состоянии. Здесь мы пренебрегли малыми в линейной теории упругости изменением конфигурации тела, вызванном перемещениями  $\delta \mathbf{u}$ . Определим  $\Delta E$  — приращение  $E$ , вызванное наложением  $\delta \mathbf{u}$ . Для этого сначала заметим

$$\Delta u = u(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - u(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

откуда и из (100), (101) следует

$$\Delta E > 0. \quad (102)$$

Выражения (101) - (102) означают, что среди всех кинематически допустимых полей перемещений для тела, находящегося в равновесии под действием кинематических граничных условий и мертвых массовых и поверхностных сил, действительные перемещения доставляют полной потенциальной энергии минимум. Сказанное носит название *теоремы о минимуме потенциальной энергии*.

Пусть теперь то же тело испытало равновесные вариации напряжений  $\delta \boldsymbol{\sigma}$ :

$$\nabla \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \delta \mathbf{t} /_{\hat{S}_1} = \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} /_{\hat{S}_1} = 0. \quad (103)$$

Преобразуя тождество

$$\int_{\hat{V}} (\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u} - \mathbf{u} \hat{\nabla})) : \delta \boldsymbol{\sigma} d\hat{V} + \int_{\hat{S}_2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \cdot \delta \hat{\mathbf{t}} d\hat{S} = 0$$

при помощи того же тензорного равенства, теоремы Гаусса - Остроградского и условий (103), получаем

$$\int_{\hat{V}} \boldsymbol{\varepsilon} : \delta \boldsymbol{\sigma} d\hat{V} - \int_{\hat{S}_2} \mathbf{u}_o \cdot \delta \hat{t} d\hat{S} = 0. \quad (104)$$

Если заданные перемещения на границе *жесткие*, т.е. не зависят от напряжений, то из (104) получаем

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \int_{\hat{V}} u(\boldsymbol{\sigma}) d\hat{V} - \int_{\hat{S}_2} \mathbf{u} \cdot \delta \hat{t} d\hat{S}, \quad u(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, \quad (105)$$

где  $\mathcal{E}$  называется *дополнительной энергией*. Аналогичным образом можно доказать, что указанные вариации напряжений повышают дополнительную энергию тела:

$$\Delta \mathcal{E} > 0 \quad (106)$$

Выражения (105) - (106) означают, что среди всех статически допустимых полей напряжений для тела, находящегося в равновесии под действием массовых и поверхностных сил и жестких кинематических граничных условий, действительные напряжения доставляют минимум дополнительной энергии. Сказанное носит название *теоремы о минимуме дополнительной энергии*.

В качестве примера получим с помощью доказанных теорем оценки эффективного тензора жесткости микронеоднородной линейно-упругой среды. Предполагается, что рассматриваемый объем  $V$  достаточно велик, чтобы для него существовали тензоры средних напряжений и деформаций

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

и эффективный тензор жесткости  $\mathbf{C}_*$ :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (107)$$

(эффективный тензор податливости обозначим  $\mathbf{S}_* = \mathbf{C}_*^{-1}$ ). Плотность внутренней энергии рассматриваемого объема

$$u = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (108)$$

Действительно,

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV = 0$$

по (101), поскольку  $\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  можно считать вариацией деформаций. С помощью (107)  $u$  можно записать как

$$\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}_* : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (109)$$

или как

$$\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{S}_* : \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (110)$$

Используя теорему о минимуме дополнительной энергии, получим

$$\int_V (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \leq 0$$

( $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  — действительные, а  $\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — допустимые напряжения, так что  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — вариация напряжений; вариациями граничных сил пренебрегаем), откуда

$$\bar{\sigma}:\bar{\varepsilon} \leq \bar{\varepsilon}:\bar{C}:\bar{\varepsilon}, \quad \bar{C} \equiv \frac{1}{V} \int_V C dV. \quad (111)$$

Из этого неравенства с использованием (109) получаем

$$C_* \leq \bar{C} \quad (112)$$

(неравенство здесь понимается для элементов спектра данных тензоров).

Используя теперь теорему о минимуме потенциальной энергии, получим

$$\int_V (\bar{\varepsilon} - \mathcal{S}:\bar{\sigma}):\bar{\sigma} dV \leq 0$$

( $\bar{\varepsilon}$  — действительные, а  $\mathcal{S}:\bar{\sigma}$  — допустимые деформации, так что  $\bar{\varepsilon} - \mathcal{S}:\bar{\sigma}$  — вариация деформаций; вариациями граничных перемещений пренебрегаем), откуда

$$\bar{\sigma}:\bar{\varepsilon} \leq \bar{\sigma}:\bar{\mathcal{S}}:\bar{\sigma}. \quad (113)$$

Из этого неравенства с использованием (110) получаем

$$S_* \leq \bar{S}, \quad \bar{S} \equiv \frac{1}{V} \int_V S dV. \quad (114)$$

Объединяя (112) и (114), получаем двухстороннюю оценку тензора эффективных упругих свойств

$$\bar{S}^{-1} \leq C_* \leq \bar{C}, \quad (115)$$

впервые найденную Р. Хиллом в 1952 году.

## 5. Статика гибких стержней<sup>17</sup>

Для упругих тел, у которых один из размеров намного превышает два других, можно использовать более простые, топологически одномерные, уравнения равновесия. Мы будем рассматривать стержни, осевая линия которых в начальной конфигурации представляет собой произвольную пространственную кривую, и, в общем, имеющие переменное по их длине сечение. Деформации стержней также будем полагать произвольными. Стержень, в общем, нагружен произвольными массовыми и поверхностными силами (а нагружением моментами-парами для простоты пренебрежем). Также ограничим рассмотрение статикой, ибо разобраться с вопросами движения стержня не составит труда. Ось стержня будем предполагать гладкой.

Уравнение равновесия

$$\hat{\nabla} \cdot \sigma + f = 0$$

и его следствие

$$\hat{x} \times (\hat{\nabla} \cdot \sigma) + \hat{x} \times f = 0$$

мы интегрируем по элементу объема стержня в текущей конфигурации, ограниченному двумя бесконечно близкими сечениями, и используем теорему Гаусса – Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \hat{\nabla} \cdot \sigma dv + \int_{\hat{V}} f dv &= \int_{\hat{S}} \hat{t} ds + \int_{\hat{V}} f dv = 0 \\ \int_{\hat{V}} \hat{x} \times (\hat{\nabla} \cdot \sigma) dv + \int_{\hat{V}} \hat{x} \times f dv &= \int_{\hat{S}} \hat{x} \times \hat{t} ds + \int_{\hat{V}} \hat{x} \times f dv = 0 \end{aligned}$$

Поверхность элемента разделяем на боковую  $\hat{S}_0$  и две торцевых,  $\hat{S}_+$  и  $\hat{S}_-$ , причем две последние поверхности полагаем ориентированными вдоль возрастания естественного параметра кривой, и обозначаем:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{S}_+} \hat{t} ds = Q_+, \quad \int_{\hat{S}_-} \hat{t} ds = Q_-, \quad \int_{\hat{S}_0} \hat{t} ds + \int_{\hat{V}} f dv = q dl, \\ \int_{\hat{S}_+} \hat{x}'_+ \times \hat{t} ds = M_+, \quad \int_{\hat{S}_-} \hat{x}'_- \times \hat{t} ds = M_-, \quad \int_{\hat{S}_0} \hat{x}' \times \hat{t} ds + \int_{\hat{V}} \hat{x}' \times f dv = m dl, \end{aligned}$$

причем

$$\int_{\hat{S}_+} \hat{x}_{o+} \times \hat{t} ds = \hat{x}_{o+} \times Q_+, \quad \int_{\hat{S}_-} \hat{x}_{o-} \times \hat{t} ds = \hat{x}_{o-} \times Q_-, \quad \int_{\hat{S}_0} \hat{x}' \times \hat{t} ds + \int_{\hat{V}} \hat{x}' \times f dv \approx \hat{x}_{o+} \times m dl, \quad \text{где}$$

$\hat{x}_+ = \hat{x}_{o+} + \hat{x}'_+$ ,  $\hat{x}_- = \hat{x}_{o-} + \hat{x}'_-$ , а  $\hat{x}'_{\pm}$  определяются из условий  $\int_{\hat{S}_{\pm}} \hat{x}'_{\pm} ds = 0$ . Обозначая

$Q_+ - Q_- = dQ$ ,  $M_+ - M_- = dM$ ,  $\hat{x}_{o+} - \hat{x}_{o-} = \hat{e}_1 d\hat{l}$  и пренебрегая малыми второго порядка по  $d\hat{l}$ , приходим к уравнениям *Кирхгоффа*:

<sup>17</sup> Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{d\hat{l}} + \mathbf{q} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{M}}{d\hat{l}} + \hat{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В произвольном ортобазисе с первым элементом  $\hat{\mathbf{e}}_1$  смысл компонент векторных полей *внутренних* сил (размерность Н) и моментов  $\mathbf{Q}, \mathbf{M}$  таков:  $Q_1$  — продольная, а  $Q_{2,3}$  — поперечные силы, а  $M_1$  — скручивающий относительно  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , а  $M_{2,3}$  — изгибающие моменты. Векторные поля  $\mathbf{q}, \mathbf{m}$  есть *внешние* (приложенные) линейные плотности сил (размерность Н/м) и моментов, смысл компонент которых тот же.

Несмотря на свою компактность, интегрирование уравнений (1) представляет большую сложность: все дело в том, что текущая конфигурация неизвестна. Задача тем самым оказывается статически неопределимой и нужно рассматривать кинематику и определяющие соотношения. Поскольку стержни главным образом испытывают искривление за счет приложенной нагрузки, необходимы определяющие соотношения, в качестве которых часто используют уравнения Клебша

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \cdot (\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \boldsymbol{\kappa}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{K}$  — тензор изгибно-крутильных жесткостей, а  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}, \boldsymbol{\kappa}$  — векторы текущей и начальной кривизн.

Если необходимо учесть вклад осевого удлинения в изменение конфигурации, следует использовать определяющее соотношение линейной упругости:

$$Q_1 = ES \left( \frac{du_1}{dl} - 1 \right),$$

где  $l$  — координата вдоль оси стержня в начальной конфигурации (лагранжева координата). Различие шкал  $\hat{l}$  и  $l$  далее не будет учитываться.

Если тензор  $\mathbf{K}$  над произвольным сечением стержня изотропный, то в качестве локального базиса  $\hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$  плоскости сечения удобно брать соответствующие векторы *естественного* орторепера Френе, удовлетворяющего соотношениям

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_1}{\partial \hat{l}} = \hat{\rho}_1^{-1} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_2}{\partial \hat{l}} = \hat{\rho}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_3 - \hat{\rho}_1^{-1} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_3}{\partial \hat{l}} = -\hat{\rho}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_2,$$

которые можно переписать с помощью вектора Дарбу  $\hat{\mathbf{D}}$ :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial \hat{l}} = \hat{\mathbf{D}} \times \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\rho}_1^{-1} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (3)$$

Соотношения (3) используются при записи уравнений (1) в компонентах текущего базиса,  $\mathbf{Q} = \hat{Q}_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ,  $\mathbf{M} = \hat{M}_i \hat{\mathbf{e}}_i$  и т.д.

Если же тензор  $\mathbf{K}$  над произвольным сечением стержня имеет простой спектр, удобнее использовать *связанный* с его главными осями орторепер  $\hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ . В этом случае соотношения (3) следует переписать так

$$\frac{\partial \hat{e}'_i}{\partial \hat{l}} = \hat{\kappa} \times \hat{e}'_i, \quad \hat{\kappa} = \hat{\kappa}_i \hat{e}'_i. \quad (4)$$

Свяжем  $\hat{\kappa}_i$  с  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\rho}_1$  и углом  $\hat{\vartheta}$  поворота  $\hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  относительно  $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Если ориентация  $\hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  относительно пространственного репера задается ортогональным тензором  $\hat{\mathbf{R}}'$ , ориентация  $\hat{e}_2, \hat{e}_3$  относительно пространственного репера — ортогональным тензором  $\hat{\mathbf{R}}$ , то  $\hat{\mathbf{R}}' = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}$  и

$\hat{\kappa} = \hat{\kappa} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{D}}$ , откуда получаем

$$\hat{\kappa}_1 = \hat{\rho}_1^{-1} + \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \hat{l}}, \quad \hat{\kappa}_2 = \frac{\sin \hat{\vartheta}}{\hat{\rho}}, \quad \hat{\kappa}_3 = \frac{\cos \hat{\vartheta}}{\hat{\rho}}. \quad (5)$$

Эти формулы применимы и для отсчетной конфигурации (для чего нужно удалить отовсюду крышки).

Тензор  $\mathbf{K}$  в связанном базисе имеет вид

$$\mathbf{K} = GJ_0 \hat{e}'_1 \hat{e}'_1 + EJ_2 \hat{e}'_2 \hat{e}'_2 + EJ_3 \hat{e}'_3 \hat{e}'_3, \quad (6)$$

где  $G, E$  — модули сдвига и Юнга, а  $J_0, J_2, J_3$  — полярный момент инерции сечения и моменты инерции сечения относительно осей  $\hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ .

Удобно выразить текущую кривизну через углы Эйлера  $\theta_i$  поворота текущего орторепера относительно отсчетного (оба в общем случае связаны с главными осями  $\mathbf{K}$ ). Дифференцированием разложения  $\hat{e}'_i = L_{ij} \mathbf{e}'_i$  с использованием (4) и аналогичного выражения в отсчетной конфигурации можно получить

$$\hat{\kappa}_i = \Lambda_{ij} \frac{\partial \theta_j}{\partial \hat{l}} + L_{ij} \mathbf{K}_j, \quad \Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{isp} \frac{\partial L_{sk}}{\partial \theta_j} L_{pk}. \quad (7)$$

Через эти же углы удобно выразить и производную по натуральному параметру вектора перемещения  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\hat{l}} = \hat{\mathbf{e}}_1 - \mathbf{e}_1 = (1 - L_{11}) \hat{\mathbf{e}}_1 - L_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 - L_{31} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (8)$$

Это уравнение служит для интегрирования поля перемещений стержня.

Выражения для коэффициентов уравнений (7), (8) в углах Эйлера рекомендуется получить самостоятельно (пользуйтесь пакетами аналитических вычислений).

Выведем уравнения равновесия плоского изгиба прямолинейного стержня. В пространственном орторепере для этого случая получаем  $\mathbf{u} = (0, u, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, \frac{du}{dx}, 0)$ ,  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, 0)$ ,  $\mathbf{M} = (0, 0, M)$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, 0)$ ,  $\mathbf{m} = (0, 0, m)$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \mathbf{Q} = (Q_2 - Q_1 \frac{du}{dx}) \hat{\mathbf{e}}_3$ , а уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dx} + q_1 &= 0, \\ \frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left( Q_1 \frac{du}{dx} \right) - q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющее соотношение (2) сведется к

$$M = EJ \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (9)$$

Например, в случае центрального сжатия тяжелой вертикальной стойки получаем  $q_1 = \gamma S g$ ,  $Q_1 = -P + \gamma S g(l - x)$  и из (9), (10) получаем уравнение Бесселя

$$EJu^{IV} + (P + \gamma S g(x - l))u'' + \gamma S gu' = 0, \quad (11)$$

к которому необходимо присоединить граничные условия

$$u(0) = u(l) = 0, \quad M(0) = M(l) = 0$$

(последние два выражения означают наличие шарниров на концах стойки). Эта задача, поставленная Эйлером в 1744 г., замечательна тем, что в ней существует критическая сила  $P_*$ , при превышении которой имеет место бифуркация (потеря единственности) решения: наряду с прямолинейной появляются другие, изогнутые формы равновесия стержня. Наличие силы тяжести здесь непринципиально, а только приводит к снижению  $P_*$ .

Другой частный случай — нити: для них  $K = 0$  и нет зависимости от отсчетной конфигурации. Остается лишь уравнение

$$\frac{d(\hat{Q}_1 \hat{e}_1)}{d\hat{l}} + \hat{q} = 0. \quad (12)$$

В случае, если невесомая нить располагается на криволинейной гладкой поверхности, из (12) можно показать, что натяжение в нити постоянно, а сама она располагается по геодезической к поверхности. Если же нить располагается в пространстве и подвергается действию параллельного (или центрального) поля сил, то из того же уравнения (12) можно доказать, что нить принимает форму плоской кривой, параллельной направлению сил (или, соответственно, проходящей через центр).

Можно рассмотреть специализации уравнений для случаев  $K_1 \equiv 0, K_2 = K_3 \equiv K \neq 0$  или  $K_1 \equiv K \neq 0, K_2 = K_3 \equiv 0$ , в том числе малых  $K$ .

Постановки задач можно выполнять в отсчетной, текущей конфигурациях, либо пространственной системе координат — в зависимости от задачи.

В заключение поставим задачу вращения гибкого вала в криволинейной жесткой оболочке (такие устройства используются, например, в качестве приводов к автомобильным приборам). В данном случае остается только одна независимая степень свободы, связанная с углом поворота  $\vartheta$  сечения вокруг оси стержня. Используя уравнения (1), (2), (3), (5), (6) и предполагая оболочку изогнутой вдоль дуги окружности радиуса  $\rho = r_o$ , а сечение вала имеющим радиус  $r_g$  получаем уравнение

$$\frac{d^2 \vartheta}{dl^2} - \frac{1+\nu}{r_o r_\epsilon} \sin \vartheta = 0,$$

к которому присоединяем граничные условия

$$\vartheta(\varphi = 0) = \vartheta_0, \quad M(\varphi = \Psi) \sim \frac{d\vartheta}{d\varphi} = 0,$$

где  $\Psi$  — величина сегмента оболочки в радианах. Эта система, имеющая простое аналитическое решение, описывает вращение свободного конца стержня, сопровождаемого постоянными срывами при  $\sqrt{\frac{1+\nu}{r_o r_\epsilon}} \Psi$  больше некоторой величины. Этот эффект действительно наблюдается, приводя к дрожанию стрелок приборов.

**Пластические среды.** Упругое поведение многих из окружающих нас материалов (металлы, горные породы) наблюдается только при малых нагрузках; при больших же нагрузках эти материалы начинают испытывать неупругие деформации. Механизм упругого поведения при этом меняется; например, в кристаллах обратимое искажение элементарной ячейки сменяется механизмом генерации и передвижения дефектов атомной решетки — дислокаций. Из неупругого поведения выделяют компоненту, не зависящую от скорости деформации и называемую *пластической*. Механизм пластичности не зависит от термофлуктуаций, а следовательно и от температуры. Зависящая от скорости деформации и термофлуктуаций неупругая компонента называется *вязкой*; ее мы изучим позже.

В отличие от упругих пластические деформации не являются консервативными, а являются *диссипативными*, т.е. работа, затрачиваемая на осуществление таких деформаций не возвращается, а полностью переходит в тепло. Иначе говоря, замкнутый цикл в пространстве напряжений сопровождается выделением тепла. Т.о., пластические деформации необратимы и не зависят от скорости приложения нагрузки.

Чистым упруго-пластическим поведением обладают металлические кристаллы в области температур от нуля до трети температуры плавления, т.е. в области “холодной деформации”. Горные породы, в обычных условиях разрушающиеся за малым упругим участком деформирования (т.е. хрупкие), тем не менее деформируются и в пластическом состоянии при наложении очень больших гидростатических давлений (опыты Бейкера и Кармана 1910-1912 гг.). Такие давления препятствуют расколу по образующимся полосам сдвига, что позволяет перед разрушением достигать величин пластических деформаций, типичных для металлов. Причиной же пластичности (а не хрупкости) металлов в области холодной деформации является электронный газ, образующий электрические диполи в местах нахождения дислокаций, сжимающие плоскости скольжения и препятствующие их расколу при продвижении дислокаций<sup>18</sup>.

Началу серьезного изучения пластичности мы обязаны всего лишь одному человеку — Анри Треска. В 1864 г. этот 50-летний инженер неожиданно избирает карьеру физика-экспериментатора и в течение последующих восьми лет получает важнейшие результаты, за которыми следует всемирная известность и избрание во Французскую Академию<sup>19</sup>. Треска сжимал цилиндрические образцы из различных металлов, льда, парафина, глины, выдавливал их через круглые, прямоугольные и треугольные отверстия, подвергал обратной экструзии. На рис. 1 приведен результат экструзии пачки 10 свинцовых пластин. Среди основных открытий Треска выделяются следующие: 1) твердые тела при достаточных уровнях

---

<sup>18</sup> Вакуленко А.А. О влиянии электронной структуры металлов на характерные особенности их механических свойств // Изв. РАН. МТТ. 1994. №3. С. 109-116.

<sup>19</sup> Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Т. II. М.: Наука-Физматлит, 1984. 432 с.

давления могут течь подобно жидкостям; 2) пластические деформации изохоричны; 3) существует характеристика материала, выражающая критическую величину максимального касательного напряжения, при котором независимо от типа опыта твердое тело течет. Далее, в 1874 г. Треска обнаружил образование светящейся X-образной зоны при ударе молотом заготовки чуть ниже температуры красного каления и сделал совершенно правильный вывод, о том, что этот крест образован линиями наибольшего пластического скольжения и тепловыделения вдоль полос наибольшего касательного напряжения. Далее, в течение более двух десятилетий экспериментальные исследования пластичности выполнял директор Мюнхенской механико-технологической лаборатории Иоганн Баушингер. В первой половине двадцатого столетия нельзя не отдать должное исследованиям пластичности (в основном, при высоких давлениях) П. Бриджмена, за которые он получил Нобелевскую премию по физике 1946 г., а также Дж. Тейлора, объяснившего дислокационную природу пластической деформации (1934).

Классические определяющие соотношения пластичности, предназначенные, в основном, для металлов, имеют в своей основе некоторые дополнительные (в общем не обязательные) гипотезы. Во-первых, считается, что на диаграмме напряжение-деформация при пропорциональном нагружении существует ярко выраженный порог, после которого начинается пластическое течение (рис. 2). Как следствие получают определяющие уравнения, содержащие две ветви, — упругую и упруго-пластическую, а полная деформация разделяется на упругую и пластическую части (в приближении малых деформаций принимается суперпозиция этих частей). Во-вторых, пластическое поведение принимается независимым от наложения гидростатического давления (опыты Бриджмена 1940-х годов с металлами).

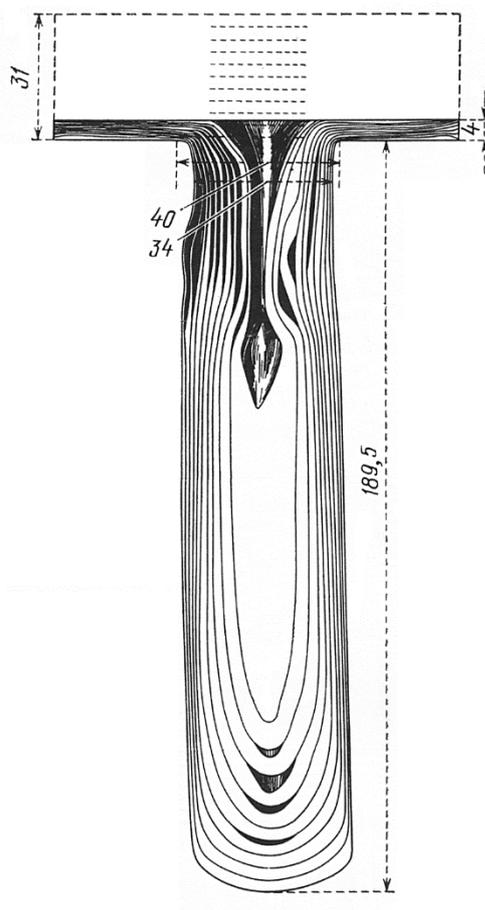


Рис. 1.

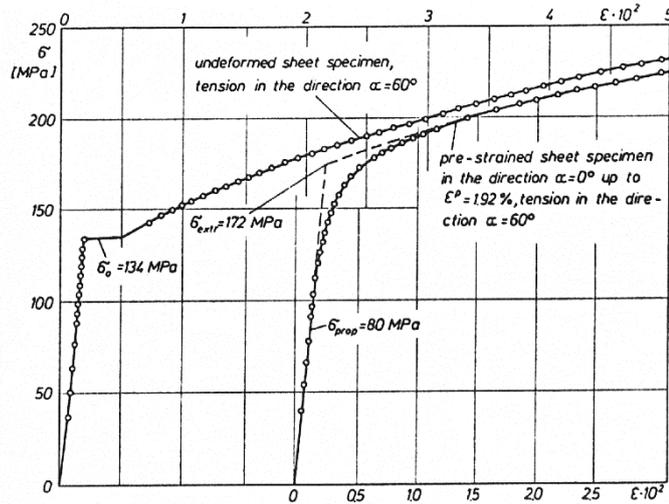


Рис. 2. Кривая одноосного растяжения образца из алюминиевого сплава.

Установим уравнения *теории пластического течения*. Тензор полных деформаций есть суперпозиция упругих и пластических частей:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (116)$$

(“e” от “elastic” — упругий, “p” от “plastic” — пластический), причем пластические деформации считаются изохорическими:

$$\text{sp} \boldsymbol{\varepsilon}^p = 0. \quad (117)$$

Упругие деформации связаны с напряжениями

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{S}^e : \boldsymbol{\sigma}, \quad (118)$$

а пластические имеют место только при выполнении *критерия текучести*

$$f(\boldsymbol{\sigma}') = \sigma_*, \quad (119)$$

где  $f$  — *функция текучести*,  $\boldsymbol{\sigma}'$  — девиатор тензора напряжений,  $\sigma_*$  — *предел текучести*; в противном случае, когда

$$f(\boldsymbol{\sigma}') < \sigma_*, \quad (120)$$

пластического течения не происходит. Термодинамические ограничения требуют выпуклости функции текучести; кроме того, для удобства она будет считаться однородной первой степени, т.е.

$$f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

для любого положительного скаляра  $\alpha$ . Для таких функций справедливо тождество

$$\boldsymbol{x} : f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}). \quad (121)$$

Для удобства в теории пластичности часто вместо модулей девиаторов напряжений и скоростей пластических деформаций пользуются их *интенсивностями*, определяемыми как

$$\bar{\sigma} \equiv \left( \frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' \right)^{1/2}, \quad \bar{\dot{\varepsilon}}^p \equiv \left( \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right)^{1/2}. \quad (122)$$

Выбор множителей здесь обусловлен тем, что при одноосном нагружении

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & & \\ & -\frac{1}{3}\sigma & \\ & & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}, \quad \dot{\epsilon}^P_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}^P & & \\ & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}^P & \\ & & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}^P \end{bmatrix}$$

и определения (122) дают  $\bar{\sigma} = \sigma$ ,  $\bar{\dot{\epsilon}}^P = \dot{\epsilon}^P$ .

Если функция текучести задается окружностью в девиаторной плоскости, т.е.

$$f \equiv \bar{\sigma}, \quad (123)$$

то соответствующий критерий называется *критерием Мизеса*. *Критерий Треска* получаем при выборе функции

$$f \equiv \sigma_{max} - \sigma_{min} \equiv \tau_{max}, \quad (124)$$

где  $\sigma_{max}, \sigma_{min}$  — максимальное и минимальное собственные значения тензора напряжений, а  $\tau_{max}$  — максимальное касательное напряжение. Заметим, что последняя функция гладкой не является.

В теории пластического течения считается, что течение в данной точке поверхности текучести развивается по нормали к этой поверхности, т.е.

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}')}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \quad (125)$$

где  $\dot{\lambda}$  — некоторый коэффициент пропорциональности, структура которого обсуждается ниже. Поскольку тензор  $\mathbf{n}$  является девиатором, (117) автоматически выполняется. Соотношения (125) являются дифференциально-линейными, поэтому время из них может быть исключено (откуда видна их независимость от скорости деформации). В общем не существует четкой связи между направлением течения и нормалью к поверхности, разграничивающей упругое от пластического поведения, т.е. физического обоснования закона нормальности (125). Однако для него удастся доказать единственность решения упруго-пластической задачи и установить некоторые экстремальные принципы.

Повышение напряжения, требуемое для продолжения процесса пластического течения, называется *упрочнением*. Если упрочнение отсутствует, пластичность называется *идеальной*.

В случае идеальной пластичности предел текучести  $\sigma_*$  не зависит от истории процесса пластического течения. В этом случае девиатор напряжений находится по заданному девиатору скоростей пластических деформаций из (119) и (125) без знания  $\dot{\lambda}$ . При этом  $\boldsymbol{\sigma}'$  определяется нормалью (направленной вдоль  $\dot{\epsilon}^P$ ) к поверхности текучести (однозначно, если эта поверхность строго выпукла). Найти девиатор скоростей пластических деформаций по девиатору напряжений не представляется возможным (убедитесь в этом на примере одноосного нагружения). Хотя определяющие соотношения идеальной пластичности и не требуют знания  $\dot{\lambda}$ , этот множитель с помощью (117), (121) и (125) выражается как

$$\dot{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P}{\sigma_*}. \quad (126)$$

В числителе этого выражения стоит мощность пластического формоизменения  $\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \equiv W^P$ , зависящая от текущих параметров процесса.

Выпишем соотношения теории течения идеально-пластической среды с функцией Мизеса:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \mathbf{S}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} & \text{при } \bar{\sigma} < \sigma_* \\ \mathbf{S}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\xi} \boldsymbol{\sigma}' & \text{при } \bar{\sigma} = \sigma_* \end{cases} \quad (127)$$

Здесь использовано  $\mathbf{n} \equiv \partial \bar{\sigma} / \partial \boldsymbol{\sigma}' = \frac{2}{3} \boldsymbol{\sigma}' / \sigma_*$  и введен другой неопределенный множитель

$$\dot{\xi} = \frac{2}{3} \dot{\lambda} / \sigma_* = \frac{2}{3} \frac{W^P}{\sigma_*^2}, \quad (128)$$

связывающий

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\xi} \boldsymbol{\sigma}'. \quad (129)$$

Из (128), (129) и упомянутого свойства  $W^P$  видно, что связь девиаторов  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$  и  $\boldsymbol{\sigma}'$  линейной не является.

При наличии упрочнения предел текучести  $\sigma_*$  зависит от истории процесса, обычно как функция накопленной пластической деформации

$$s^P = \int_0^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P dt$$

(т.н. *параметр Одквиста*) или работы пластического формоизменения

$$A^P = \int_0^t W^P dt.$$

Сейчас, кроме постулирования нормальности, в рамках (125) принимают, что

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{h} \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{n}. \quad (130)$$

Скаляр  $h$  называется *модулем упрочнения*, который в общем также зависит от истории процесса как функция  $s^P$  или  $A^P$ . Смысл названия этого скаляра виден, если соотношения (125), (130) с функцией Мизеса записать для одноосного нагружения, откуда

$$h = \frac{4}{9} \frac{d\sigma}{d\varepsilon^P}.$$

Когда  $\boldsymbol{\sigma}'$  лежит в касательной плоскости к поверхности текучести в данной ее точке, соотношения (125), (130) дают  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = 0$ , то есть имеет место упругое поведение. Это нейтральное нагружение  $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{n} = 0$  разграничивает упругую разгрузку  $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{n} < 0$  и упруго-пластическое нагружение  $\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{n} > 0$  из пластического состояния  $f(\boldsymbol{\sigma}') = \sigma_*$ . При  $f(\boldsymbol{\sigma}') < \sigma_*$  по-прежнему имеет место упругость.

В итоге соотношения теории пластического течения с упрочнением принимают вид:

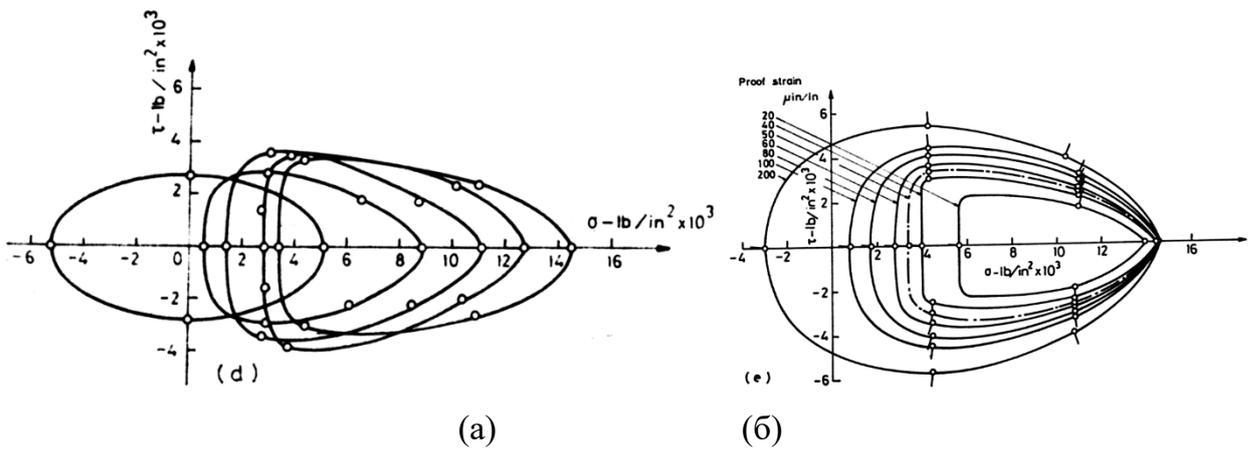


Рис. 3. Экспериментальные данные эволюции поверхности текучести (а) и зависимости поверхности текучести от допуска (б) при одноосном нагружении<sup>20</sup>.

$$\dot{\epsilon} = \begin{cases} \mathbf{S}^e : \dot{\epsilon} & \text{при } \bar{\sigma} < \sigma_* \text{ или } \dot{\epsilon} : \mathbf{n} \leq 0 \\ (\mathbf{S}^e + \frac{1}{h} \mathbf{nn}) : \dot{\epsilon} & \text{при } \bar{\sigma} = \sigma_* \text{ и } \dot{\epsilon} : \mathbf{n} > 0 \end{cases} \quad (131)$$

Даже если упругие свойства изотропны, а поверхность текучести сферическая, тензор жесткости упруго-пластической среды  $\mathbf{S}^e + \frac{1}{h} \mathbf{nn}$  изотропным не будет. Симметрия этого тензора зависит от симметрии поверхности текучести, которая изменяет в процессе пластической деформации свою форму (рис. 3а). (В критерии текучести частного вида (119) это, конечно, невозможно учесть).

Поверхность текучести является “сердцевинной” теории течения, поэтому возможность описания последней различных эффектов пластичности находится в тесной связи с точностью описания эволюции поверхности текучести. Эта эволюция происходит из-за неизбежного появления в упруго-пластически деформируемых материалах внутренних напряжений (ниже будет показано, почему это происходит). Поскольку в материалах нет четкой грани между упругим и упруго-пластическим поведением, поверхность текучести строится по некоторому допуску на необратимую деформацию в цикле нагрузка-разгрузка. В зависимости от величины допуска часто получают очень различающиеся формой и размерами поверхности (рис. 3б), связанные с внутренними напряжениями, формируемыми механизмами пластической деформации разных масштабных уровней. Это привело к развитию многоповерхностных модификаций теории течения, которые мы здесь излагать не будем, а познакомимся (после некоторого отступления) с теорией пластичности без поверхности текучести.

**Внутренние напряжения в упруго-пластических средах.** Можно убедиться, что в деформированной упруго-пластической среде появляются самоуравновешенные поля внутренних напряжений, удалить которые уже не

<sup>20</sup> Ikegami K. A historical perspective of experimental study on subsequent yield surfaces for metals // J. Soc. Mater. Sci., Japan. 1975. V.24. P. 491-504, 709-719.

представляется возможным, за что их называют “остаточными”. В кинематическом соотношении (116)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

только полные деформации связаны с полем перемещений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{def } \mathbf{u},$$

т.е. совместны, упругая и пластическая же компоненты определяются соответствующими определяющими соотношениями и контролировать их совместность нет возможности. Эта несовместность требует существования внутренних упругих напряжений, которые сейчас определим. В определяющие соотношения изотропной линейной упругости (64) подставляем выраженные из (116) упругие деформации:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \text{def } \mathbf{u} - \lambda \text{sp} \boldsymbol{\varepsilon}^p \mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (132)$$

Из полученного уравнения с помощью уравнения равновесия (67)

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

может быть исключен тензор напряжений. С использованием обозначения дифференциального оператора (84) получающееся уравнение записывается в виде

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = -\lambda \nabla \text{sp} \boldsymbol{\varepsilon}^p - 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (133)$$

Правую часть формально можно воспринимать как поле массовых сил, вызванное пластическими деформациями, которое в свою очередь порождает поле равновесных перемещений. Последнее записывается в квадратурах в форме (82)

$$\mathbf{u} = - \int_V \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\lambda \nabla \text{sp} \boldsymbol{\varepsilon}^p + 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p)(\mathbf{x}') dV'. \quad (134)$$

Подставляя это выражение в (132), получаем поле остаточных напряжений. Удобнее результат было бы представить в виде (Х. Кляйнерт)

$$\sigma_{ij} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V \left( \frac{1}{2} (\alpha_{in} \epsilon_{jmn} + \alpha_{jn} \epsilon_{imn}) r_{,mpp} + \right. \\ \left. + 2\vartheta \alpha_{kn} \epsilon_{kmn} (r_{,mij} - \delta_{ij} r_{,mpp}) \right) dV', \quad (135)$$

где  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\beta}^{pT} \quad (136)$$

— тензор плотности дислокаций, а  $\boldsymbol{\beta}^p$  — тензор пластической дисторсии, определяемый разложением

$$\mathbf{u} \nabla \equiv \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^e + \boldsymbol{\beta}^p,$$

с которым связаны тензоры пластических деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}^p + \boldsymbol{\beta}^{pT}),$$

и пластических поворотов

$$\boldsymbol{\omega}^p = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}^p - \boldsymbol{\beta}^{pT})$$

Дислокации — локальные нарушения непрерывности упругого континуума — и создают в нем внутренние напряжения. Образование и движение дислокаций есть

механизм пластической деформации, поэтому при пластической деформации упруго-пластического тела в нем возникают упругие напряжения, остающиеся в равновесии и при удалении нагрузки. Представление напряжений в форме (135) позволяет видеть условие отсутствия остаточных напряжений:

$$\boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \boldsymbol{\beta}^{pT} \equiv 0.$$

С геометрической точки зрения это есть условие представимости тензора  $\boldsymbol{\beta}^{pT}$  в виде градиента перемещений, т.е. существования поля пластических перемещений. Это условие, как мы знаем, выполняется при совместности пластических деформаций

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^p \times \nabla = 0$$

и пластических поворотов

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_x^p = 0.$$

Эквивалентность (132), (134) и (135)-(137) элементарно показывается в фурье-пространстве<sup>21</sup>.

**Теория пластичности без поверхности текучести.** Еще Баушингер установил, что достаточно четкий предел текучести наблюдается только у достаточно немногих материалов (например, стали), у остальных же он размыт. В 1971 году К. Валанис предложил теорию пластичности без поверхности текучести. Вследствие отсутствия поверхности текучести в этой теории нет разделения деформаций на упругие и пластические. Устранение поверхности текучести приводит к аналитичности уравнений, а значит — к удобству получения их решений.

В простейшем случае начальной изотропии свойств эти уравнения имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2 \int_0^z \mu(z - \zeta) \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'}{d\zeta} d\zeta, \quad (137)$$

$$dz = |d\boldsymbol{\varepsilon}'| - \frac{\chi}{2\mu} d\boldsymbol{\sigma}' / g(z), \quad (138)$$

где  $\mu(\cdot)$  — монотонно убывающая функция, описывающая затухающую память к предыстории деформации,  $z$  — внутреннее время,  $g(\cdot)$  — функция упрочнения:  $g'(\cdot) \geq 0$ ,  $g(0) = 1$ , скаляры  $\mu \equiv \mu(0)$ ,  $\chi \in [0, 1]$ , а модуль симметричного девиатора  $\boldsymbol{x}$  определяется как  $|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x})^{1/2}$ . Внутреннее время в данной теории (за которое она была названа “эндохронной”) есть неубывающий с течением деформации параметр, никак не связанный с физическим временем, что соответствует определению пластичности как необратимого и не зависящего от времени процесса деформации. Мы будем считать, что шаровые части тензоров

<sup>21</sup> Попов В.Л. Об эквивалентности далекодействующих полей напряжений, создаваемых дислокациями, в калибровочных теориях Эделена и Кляйнберга // Изв. вузов. Физика. 1993. N9. С. 125-127.

напряжений и деформаций связаны упруго, т.е.  $\sigma = 3K\varepsilon$ , и сосредоточимся только на девиаторных соотношениях (137), (138).

Перейдем к исследованию модели. Дифференцированием (137) получим

$$d\sigma' = 2\mu d\varepsilon' + 2dz \int_0^z \mu'(z-\zeta) \frac{d\varepsilon'}{d\zeta} d\zeta. \quad (139)$$

В начале процесса, когда  $z=0$ ,

$$d\sigma' = 2\mu d\varepsilon', \quad (140)$$

поэтому  $\mu$  в соответствии с данным ему обозначением в действительности представляет собой начальный упругий модуль сдвига (сравнить с (65')). Если потребовать, чтобы разгрузка со сменой знака  $\dot{\sigma}'$  в произвольный момент процесса  $z \neq 0$  начиналась с упругим модулем сдвига  $\mu$  (это имеет место в металлах), то из (139) и произвольности  $z$  следует, что в момент разгрузки  $dz=0$ , т.е. внутреннее время не растет. Отсюда вытекает ограничение на параметр  $\chi$ , фигурирующий в определении внутреннего времени. Действительно, используя (138), получаем

$$dz^2 g^2(z) = d\varepsilon' : d\varepsilon' - \frac{\chi}{2\mu} d\varepsilon' : d\sigma' + \frac{\chi^2}{4\mu^2} d\sigma' : d\sigma' = 0,$$

откуда с учетом (140) следует

$$\chi = 1.$$

Подставляя этот результат снова в (138), получаем

$$dz \sim /d\varepsilon' - \frac{1}{2\mu} d\sigma',$$

где выражение под знаком модуля в точности представляет собой  $d\varepsilon'^P$  — дифференциал тензора пластической деформации теории течения. В действительности гипотеза о том, что упругий модуль не меняется в процессе пластической деформации, верна лишь приближенно и потому параметр  $\chi$  следует считать близким к единице, так что  $\alpha \equiv 1 - \chi > 0$  есть малый параметр. Закономерен вопрос: “А не переходят ли уравнения эндохронной теории при  $\chi \rightarrow 1$  в уравнения теории течения?” Ответ на этот вопрос утвердителен. Мы покажем это в случае частных ядра  $\mu(z) = \mu \exp(-\frac{2\mu}{\sigma_*} z)$ , где  $\sigma_*$  есть константа, и функции упрочнения  $g(z) \equiv 1$ , интересного и по другим причинам. Подставляя эти ядро и функцию в (139), получим

$$d\sigma' = 2\mu d\varepsilon' - \frac{2\mu}{\sigma_*} \sigma' dz. \quad (141)$$

Это уравнение совместно со (138) при  $g(z) \equiv 1$

$$dz = /d\varepsilon' - \frac{\chi}{2\mu} d\sigma' \quad (142)$$

приводит к

$$d\varepsilon' - \frac{1}{2\mu} d\sigma' = /d\varepsilon' - \frac{\chi}{2\mu} d\sigma' / \sigma_*. \quad (143)$$

Из (143) при  $\chi \rightarrow 1$  ответвляются два режима: при  $|\sigma'| < \sigma_*$  имеем  $d\sigma' = \frac{1}{2\mu} d\varepsilon'$ , а при  $|\sigma'| = \sigma_*$  —  $d\varepsilon' = \frac{1}{2\mu} d\sigma' + \frac{|\dot{\varepsilon}'^p|}{\sigma_*} \sigma'$ , что совпадает с уравнениями теории течения идеально пластической среды с критерием Мизеса (расхождения в числовых множителях вызваны тем, что вместо интенсивностей использован модуль тензора). В связи с этим соотношения (142), (143) эндохронной теории можно воспринимать как регуляризацию сингулярных уравнений классической теории пластического течения с введением малого параметра  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  из регуляризованных уравнений получаем сингулярные, соответствующие теории течения-“спутнику”.

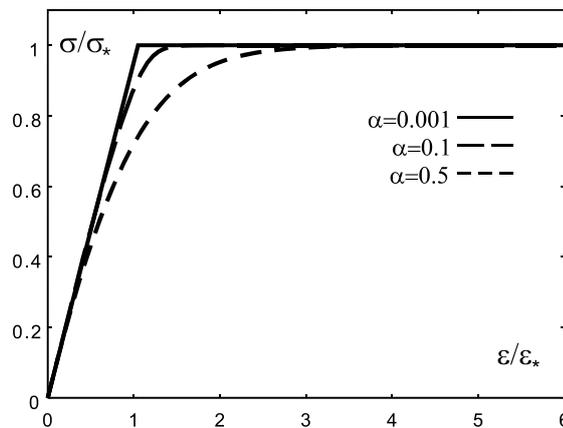


Рис. 4. Кривые одноосного нагружения при различных  $\alpha$

При одноосном монотонном нагружении уравнения (141), (142) имеют решение, записываемое параметрически,

$$s = s_0 [1 - \exp(-\alpha^{-1} \lambda z)], \quad \varepsilon = z + \chi \varepsilon_* [1 - \exp(-\alpha^{-1} \lambda z)], \quad (144)$$

где  $\lambda^{-1} \equiv \varepsilon_* = \frac{\sigma_*}{2\mu}$ . Асимптотически  $\varepsilon \propto z + \chi \varepsilon_*$ , откуда видно, что при  $\varepsilon \rightarrow \infty$   $\sigma \rightarrow \sigma_*$  монотонно слева. Вообще, величина  $|\sigma|$  не может достичь  $\sigma_*$  и для произвольной траектории в пространстве деформаций, а скорость стремления  $|\sigma|$  к своему максимальному значению  $\sigma_*$  максимальна при одноосном нагружении. Из сказанного имеет смысл ввести параметр  $v = \frac{|\sigma|}{\sigma_*}$ ;  $v < 1$  при  $\alpha \neq 0$  и  $v = 1$  при  $\alpha = 0$ . На рис. 4 показано, как кривые одноосного нагружения  $\sigma(\varepsilon)$  при  $\alpha \rightarrow 0$  (или  $\chi \rightarrow 1$ ) приближаются к кривой упруго-идеально-пластической среды.

Простейшая модель (141), (142) способна описывать и достаточно тонкие эффекты запаздывания векторных и скалярных свойств, проявляющиеся во временных аномалиях направления тензора напряжений и его модуля после излома траектории деформации (рис. 5). До излома и далеко после него направления этих тензоров совпадают, а сразу после излома наблюдается переходный период сближения этих направлений, что и называют эффектом запаздывания векторных

свойств материала. Эффект же запаздывания скалярных свойств материала заключается в непродолжительном падении модуля тензора напряжений сразу за точкой излома.

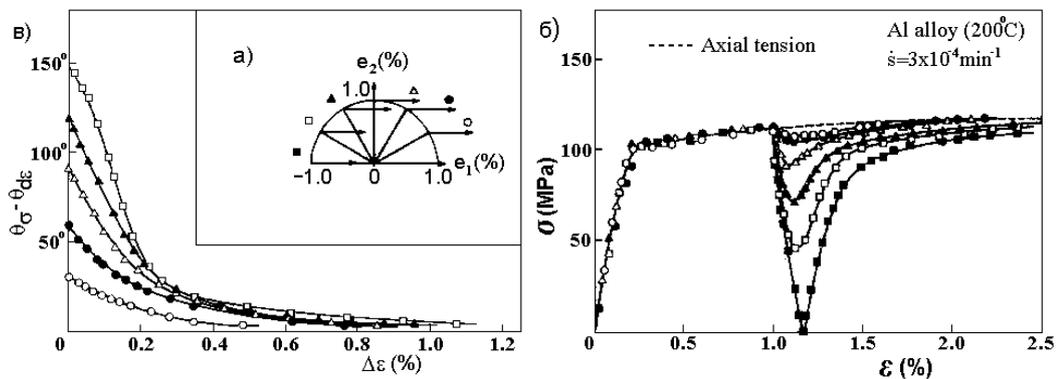


Рис.5. Эффект запаздывания векторных и скалярных свойств материала<sup>22</sup> а) двузвенные траектории деформирования; б) зависимость угла между девиаторами напряжений и скоростей деформаций (угла сближения) от деформации после излома; в) зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

Уравнения (142), (143) имеют при малых  $\alpha$  следующее решение для модуля тензора напряжений в зависимости от внутреннего времени после излома  $Z$ , угла излома  $\bar{\vartheta}$  и отнесенного к  $\sigma_*$  модуля девиатора напряжения в момент излома  $\bar{v}$ :

$$\begin{aligned} \sigma/\sigma_* = & \left[ 1 - \frac{\alpha^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} \exp(-2\lambda Z) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\chi^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} + \bar{v}^2 \cos^2 \bar{\vartheta} - 1 \right) \exp(-\alpha^{-1} \lambda Z) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В этом выражении под знаком корня к медленно возрастающей функции прибавляется быстро убывающая (показатель экспоненты обратно пропорционален малому параметру  $\alpha$ ) функция  $Z$ . Поэтому эффект падения напряжения обусловлен наличием в модели  $\alpha \neq 0$ , а глубина нырка растет с увеличением  $\alpha$ . Иначе говоря, классическая теория течения неспособна описать такой эффект. На рис. 6 приведены кривые полученного решения для разных углов излома  $\bar{\vartheta}$  и величин параметра  $\alpha$ , демонстрирующие описание эффекта запаздывания скалярных свойств материала.

<sup>22</sup> Ohashi Y., Ohno N. Inelastic stress-responses of an aluminium alloy in non-proportional deformations at elevated temperature // J.Mech.Phys.Solids. 1982. V.30. No5. P.287-304.

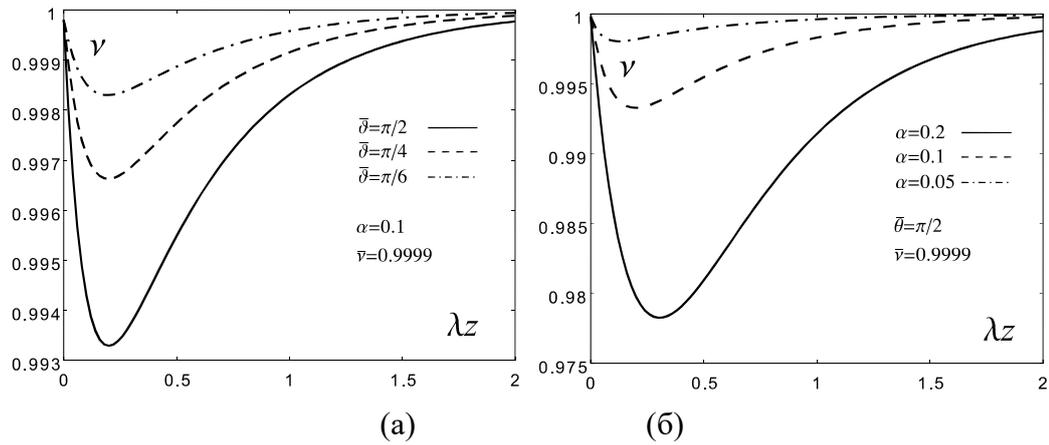


Рис. 6. Зависимости относительного модуля вектора напряжения  $\nu$  от угла излома  $\bar{\vartheta}$  (а) и параметра  $\alpha$  (б).

Эффект запаздывания векторных свойств описывают и эндохронная теория, и теория пластического течения, поэтому зависимость угла сближения от деформации после излома приведем только для случая  $\alpha = 0$ :

$$\sin\vartheta = 2\sin\bar{\vartheta} / (1 + \cos\bar{\vartheta} \exp(\lambda e) + \sin^2\bar{\vartheta} (1 + \cos\bar{\vartheta})^{-1} \exp(-\lambda e))^{-1}$$

(рис. 7). Из выписанного решения либо рис. 7 видно, что скорость сближения направления тензора напряжений с направлением траектории деформации после излома обратно пропорциональна пределу текучести ( $\lambda = \frac{2\mu}{\sigma_*}$ ). Это позволяет объяснить природу “нырка” напряжений после излома. В образце пластические свойства неоднородны, грубо говоря, у его элементов различны пределы текучести. Поэтому эти элементы с разной скоростью реагируют на деформации после излома. До излома и далеко за ним тензоры напряжений элементов сонаправлены, а сразу после излома разворачиваются друг относительно друга, что очевидно уменьшает их “главный вектор”. Поскольку эндохронная теория описывает этот эффект “в точке”, в ней уже содержится стохастичность распределения пластических свойств по объему образца, а поскольку эта теория отличается от теории течения-“спутника” только одним параметром  $\alpha$ , этот параметр и отвечает за данную стохастичность.

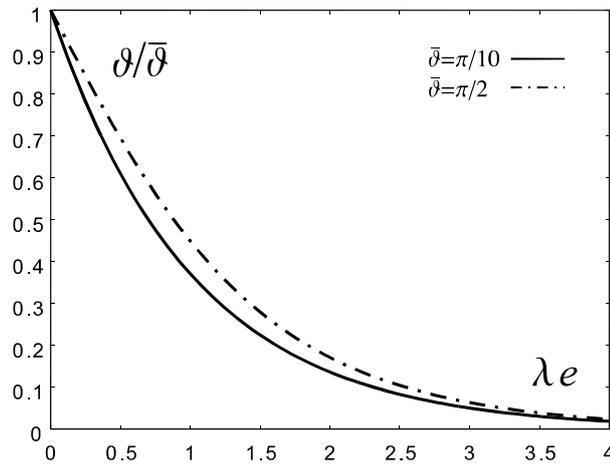


Рис. 7. Зависимость угла сближения от деформации после излома и угла излома.

При надлежащем выборе ядра и функции упрочнения эндохронная теория способна описывать и более сложные эффекты пластичности.

В заключение найдем угол излома траектории напряжений, соответствующий нейтральному нагружению. В теории пластического течения нейтральное нагружение в данной точке на поверхности текучести происходит в касательной плоскости к этой поверхности в данной точке. В случае поверхности текучести Мизеса данное условие запишется в виде

$$\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = 0, \quad (145)$$

а поскольку нейтральное нагружение упругое и  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}'$  сонаправлен  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ , то в этом случае искомый угол равен  $\frac{\pi}{2}$ . При изломе траектории напряжений на больший угол, как мы знаем, происходит упругая разгрузка. Отыщем критический угол разгрузки в рамках эндохронной теории (141), (142). Здесь нас интересует не частный случай разгрузки со сменой знака  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ , соответствующий условию  $dz=0$  и происходящий с начальным мгновенным модулем, а более общее условие разгрузки (145), не соответствующее  $dz=0$  и, следовательно, происходящей с другими значениями мгновенного модуля. Угол излома траектории напряжения  $0 \leq \psi \leq \pi$ , то  $\boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \sigma \dot{\sigma} \cos \psi$ , где  $\sigma, \dot{\sigma}$  — модули девиаторов  $\boldsymbol{\sigma}', \dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ . Интересующее нас критическое значение  $\psi_0$  удовлетворяет (145), откуда с использованием (141) получаем

$$2\mu \frac{dz}{d\sigma} = -v^{-1} \cos \psi_0, \quad (146)$$

где по прежнему  $v = \sigma / \sigma_*$ . Из (146) и неотрицательности  $dz$  видно, что  $\psi_0 > \frac{\pi}{2}$ . Т.е. в эндохронной теории направления нагрузки от направлений разгрузки отделены острым конусом с вершиной в рассматриваемой точке! Определим зависимость угла раствора конуса от  $v$  и  $\alpha$ . Из (141) и (142) последовательно

$$\dot{z} = \frac{\alpha}{2\mu} \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \sigma_*^{-1} \boldsymbol{\sigma}' \dot{z},$$

$$(1 - v^2) \left( 2\mu \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 - 4\alpha v \mu \frac{dz}{d\sigma} \cos \psi - \alpha^2 = 0,$$

и с использованием (146) получаем

$$\cos\psi_0 = \frac{-v\alpha}{\sqrt{1-v^2(1-2\alpha)}}. \quad (147)$$

До  $\psi_0(\alpha, v)$  разгрузка не реализуется. При  $\alpha \rightarrow 0$   $\psi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а при  $\alpha \rightarrow 1$  и  $v \rightarrow 1$   $\psi_0 \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ . Параметр материала  $\alpha$  по прежнему “размывает” поверхность текучести, выступающую как границу разгрузки.

Так же точно получаем критический угол, при котором реализуется эффект запаздывания скалярных свойств при изломе траектории деформаций. Условием реализации этого эффекта будем считать  $d/\sigma' = 0$  или эквивалентно

$$\sigma' : \dot{\sigma}' = 0. \quad (148)$$

Если угол излома обозначить  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , то  $\sigma' : \dot{\epsilon}' = \sigma \dot{\epsilon} \cos\varphi$ , где  $\dot{\epsilon}$  — модуль девиатора  $\dot{\epsilon}'$ . Из (141) и (148)

$$v \frac{dz}{d\epsilon} = \cos\varphi_0, \quad (149)$$

откуда  $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ . Из (141) и (142) последовательно

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \alpha \dot{\epsilon}' + \chi \sigma_*^{-1} \sigma' \dot{z}, \\ (v^{-2} - (1-\alpha)^2) \left( v \frac{dz}{d\sigma} \right)^2 - 2\alpha(1-\alpha) v \frac{dz}{d\sigma} \cos\varphi - \alpha^2 &= 0, \end{aligned}$$

и с использованием (149)

$$\cos\varphi_0 = \frac{v\alpha}{\sqrt{1-v^2(1-\alpha^2)}}. \quad (150)$$

До  $\varphi_0(\alpha, v)$  “нырка” не происходит. При  $\alpha \rightarrow 0$   $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а при  $\alpha \rightarrow 1$  и  $v \rightarrow 1$   $\varphi_0 \rightarrow 0$ , т.е. чем больше дисперсия пластических свойств элементов структуры, тем при меньших углах излома (вплоть до нулевого) уже наблюдается “нырок”.

**Геометрически нелинейная упруго-пластичность.** Тела, способные к пластическому течению, в ходе этого течения, очевидно, должны существенно изменять свою конфигурацию. Поэтому развитое выше геометрически линейное приближение может быть удовлетворительным только в ограниченных случаях, и мы рассмотрим идеи геометрически нелинейного подхода.

Успех при построении определяющих соотношений зависит от наших представлений о физике описываемого ими процесса. Тем более этот вывод справедлив по отношению к пластичности — поведению, колоссально зависящему от всевозможных деталей — материала, его структуры и механизма деформации на интересующем масштабе, условий нагружения. Поэтому для определенности мы проделаем все для металлических кристаллов, предварительно кратко осветив элементы физики их упруго-пластического деформирования. При умеренных напряжениях атомная решетка кристаллов упруго аффинно искажается. При напряжениях, близких к пределу текучести, линейные несовершенства решетки —

дислокации — начинают интенсивно двигаться по определенным плоскостям и в направлениях наиплотнейшей

упаковки атомов. Важно, что движение дислокаций не искажает решетку, а сопровождается лишь ее тождественной трансляцией. Число и ориентация этих взаимопроникающих плоскостей и направлений в точке кристалла зависит от типа решетки (гцк, оцк, гп, ...); например, в кристаллах с гранецентрированной кубической решеткой (алюминий, медь,  $\alpha$  – железо, никель, аустенитные нержавеющие стали, многие сплавы) через каждую точку проходят четыре такие плоскости (как грани правильного тетраэдра), в каждой из которой имеются три таких направления (как ребра правильного тетраэдра), дающие 12 систем скольжения. Однородное по рассматриваемому объему скольжение дислокаций по каждой системе скольжения производит простой сдвиг  $\gamma sm$ , где  $m, s$  — единичные векторы нормали к плоскости скольжения и направления скольжения в этой плоскости,  $m \cdot s = 0$ , а  $\gamma$  — параметр сдвига. Строго говоря, действительно простой сдвиг имеет место, если не учитывать упругого искажения решетки вместе с ее атомными плоскостями и направлениями. Одновременное скольжение по всем системам скольжения может быть суммировано на уровне градиентов скоростей

$$L_k^p = \dot{\gamma}_k s_k m_k : \quad L^p = \sum_k L_k^p = \sum_k \dot{\gamma}_k s_k m_k . \quad (151)$$

Образованные таким механизмом пластические деформации являются изохорическими, поскольку из (151)  $spL^p = 0$ . Движущими силами кристаллографического скольжения являются касательные напряжения

$$\tau_k = \sigma : s_k m_k . \quad (152)$$

Здесь мы также пренебрегли упругим искажением  $m_k$  и  $s_k$ . Упрочнение  $k$ -й системы скольжения вызывается скольжением в общем по всем активным (т.е. для которых выполнен некоторый критерий текучести) системам, так что

$$\dot{\tau}_k = H_{kl} \dot{\gamma}_l . \quad (153)$$

Симметрия взаимной ориентации систем скольжения приводит к связям компонент матрицы  $H$ . Если упругими искажениями и неупругими поворотами решетки пренебрегается, т.е.  $\dot{s}_k = \dot{m}_k = 0$ , то из (151) - (153) получаем

$$L^p = \left( \sum_k H_{kl}^{-1} s_k m_k s_l m_l \right) : \dot{\sigma} . \quad (154)$$

Одновременно происходящие упругие и пластические искажения суммируются на уровне линейных операторов скоростей аффинного искажения, деформации и вихря:

$$L = L^e + L^p, \quad D = D^e + D^p, \quad W = W^e + W^p, \quad (155)$$

первое из которых вместе с (154) и упругим законом дают

$$D = (S + S^p) : \dot{\sigma}, \quad S^p \equiv \sum_k H_{kl}^{-1} \{s_k m_k\} \{s_l m_l\} \quad (156)$$

— определяющее соотношение упруго-пластичности в геометрически линейном варианте.

Для записи геометрически нелинейной формулировки определяющих соотношений мы должны знать кинематику мгновенных искажения и поворота решетки. Например, примем гипотезу, что неупругих поворотов решетки не происходит, а имеет место только упругое искажение решетки<sup>23</sup>. Тогда упругий закон в скоростях текущей конфигурации запишется как

$$\boldsymbol{\tau}^{Je} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e, \quad (157)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор напряжений Кирхгоффа, а  $Je$  означает Яуманнову производную с упругим вихрем  $\mathbf{W}^e$ . В терминах тензора напряжений Коши  $\boldsymbol{\tau}^{Je} = \boldsymbol{\sigma}^{Je} + \boldsymbol{\sigma} \text{sp} \mathbf{D}^e$ . Упругие деформации кристаллов обычно малы и хорошо описываются линейно-упругим законом, поэтому среди всех возможных выбраны наиболее близкие к нему определяющие соотношения (157). Яуманнова производная построена на упругом вихре, ибо упругие искажения решетки в рамках принятой выше гипотезы “ничего не знают” о пластическом течении сквозь решетку. Этот упругий вихрь в (157) удобно выразить через полный и пластический вихри:

$$\mathbf{W}^e = \mathbf{W} - \sum_k \dot{\gamma}_k [\mathbf{s}_k \mathbf{m}_k],$$

тогда данное уравнение можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \text{sp} \mathbf{D} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \sum_k \dot{\gamma}_k \{ \mathbf{s}_k \mathbf{m}_k \}) - [ \boldsymbol{\sigma} \cdot \sum_k \dot{\gamma}_k [\mathbf{s}_k \mathbf{m}_k] ], \quad (158)$$

где фигурные скобки означают симметрирование, примененные к диаде квадратные скобки — альтернирование, а к произведению тензоров — их коммутатор.

Займемся нахождением  $\dot{\boldsymbol{\tau}}_k$ . При геометрически нелинейном рассмотрении нужно учитывать мгновенное изменение не только тензора напряжений Коши, но и кристаллографических векторов. Пусть неупругий поворот решетки отсутствует и решетка, следовательно, может только упруго искажаться (само кристаллографическое скольжение не меняет ориентацию плоскостей и направлений наплотнейшей упаковки). При мгновенном упруго-пластическом искажении материальных площадок и отрезков, расположенных в данный момент вдоль плоскостей и направлений наплотнейшей упаковки, пластическая часть искажения, осуществляемая кристаллографическими сдвигами, отделяет эти площадки и отрезки от упомянутых плоскостей и направлений, а упругая — не отделяет, поэтому, чтобы следить за кристаллографическими векторами, мы должны написать

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{L}^e \cdot \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{m}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^e + \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^e \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}.$$

Применяя последние к (152), получаем

<sup>23</sup> Asaro R.J., Rice J.R. Strain localization in ductile single crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1977. V.25. P.309-338/

$$\dot{\tau}_k = (\dot{\sigma} + \sigma \cdot L^e - L^e \cdot \sigma + m_k \cdot L^e \cdot m_k \sigma) : s_k m_k. \quad (159)$$

Далее (159) можно подставить в (153) с учетом (151) и (155):

$$\begin{aligned} H_{kl} \dot{\gamma}_l = & (\dot{\sigma} + \sigma \cdot (L - \sum_q \dot{\gamma}_q m_q s_q) - (L - \sum_q \dot{\gamma}_q m_q s_q) \cdot \sigma + \\ & + m_k \cdot (L - \sum_q \dot{\gamma}_q m_q s_q) \cdot m_k \sigma) : s_k m_k. \end{aligned} \quad (160)$$

Эти линейные уравнения разрешаются относительно  $\dot{\gamma}_l$ . Например, если скольжение происходит преимущественно по одной системе скольжения (экспериментаторы иногда это замечают), (160) имеет решение

$$\dot{\gamma} = (h + \sigma : (mm - ss))^{-1} (\dot{\sigma} + \sigma \cdot L - L \cdot \sigma + m \cdot L \cdot m \sigma) : sm.$$

Затем решение подставляется в (158), в результате чего получаем связь  $\dot{\sigma}$  с  $D$ , в которую входят геометрически нелинейные члены — произведения тензора  $\sigma$  на тензоры скоростей  $(L, D, W)$  и их инварианты. Можно показать, что влияние геометрически нелинейных членов тем больше, чем больше напряжение  $\sigma$  в текущий момент по сравнению с упруго-пластической жесткостью (определяемой тензорами  $C^e$  и  $C^p \equiv S^{p-1}$ ). При достаточно больших напряжениях геометрическая нелинейность может вызвать локальную потерю способности материала сопротивляться приложенной нагрузке, что приводит к локализации деформации и образованию внутренних структур.

Однако нет никаких оснований считать упругие искажения решетки, а, следовательно, и вызываемые ими геометрически нелинейные эффекты, большими (экспериментально упругие напряжения в решетке фиксируются по изменению межатомного расстояния, для чего используется дифракция электронов). Возможно, в ударных волнах, когда пластичность не успевает за упругим предвестником, в последнем данный механизм следует учитывать. В обычных же случаях гораздо более сильные геометрически нелинейные эффекты способен дать учет (весьма значительного) неупругого поворота решетки, называемого *пластическим спином*. Этой фундаментальной проблемой здесь мы заниматься не будем.

**Неустойчивость в пластических материалах.** Пластические среды могут обладать неустойчивостью, проявляющейся уже на уровне представительного объема, т.е. на уровне определяющих соотношений. Поясним сказанное сначала для геометрически линейной ситуации. Уравнения движения упруго-пластической среды, записанные в скоростях текущей конфигурации, имеют вид

$$\nabla \cdot \dot{\sigma} = \rho \ddot{v}, \quad \dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon} = \text{def } v$$

и в случае однородности по пространству свойств могут быть записаны в виде оператора

$$(\nabla \cdot C \cdot \nabla) \cdot v = \rho \ddot{v}, \quad (161)$$

левая (координатная) часть которого есть оператор равновесия. Геометрические нелинейности (мгновенное искажение текущей напряженной конфигурации) здесь

для простоты опущены, но тензор упруго-пластической жесткости  $\mathbf{C}$  полагается зависящим от текущего напряжения. Будем рассматривать возмущения текущей равновесной конфигурации в виде

$$\mathbf{v} = \text{Re}(\mathbf{v}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + ct)), \quad (162)$$

с действительным волновым вектором  $\mathbf{k}$  и комплексным малым по модулю вектором  $\mathbf{v}_0$ . Подставляя (162) в (161), получим

$$(\mathbf{A} + \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{k}. \quad (163)$$

Тензор  $\mathbf{A}$  называется *акустическим тензором*. Равенство (163) требует вырожденности тензора  $\mathbf{A} + \rho c^2 \mathbf{I}$ , когда как минимум один из элементов его спектра обращается в нуль:

$$\lambda k^2 = -\rho c^2. \quad (164)$$

Эта связь параметров  $\mathbf{k}, c$  возмущения (162) есть следствие его удовлетворения уравнению движения (161). Из (164) следует, что при  $\lambda > 0$   $c$  мнимые и (162) описывает распространение бегущей волны постоянной амплитуды, то есть амплитуда возмущения не растёт и можно для любого (в том числе малого)  $\varepsilon > 0$  указать такое  $\delta > 0$ , что если начальная амплитуда возмущения не превышает  $\delta$ , то для любого момента времени она не превысит  $\varepsilon$ , что соответствует определению локальной устойчивости (текущей равновесной конфигурации) по Ляпунову. В данном случае мы можем указать  $\delta = \varepsilon$ . Если  $\lambda < 0$  один из  $c$  — действительный и положительный, что соответствует экспоненциальному росту начального возмущения, т.е. неустойчивости. При  $\lambda = 0$  состояние также неустойчиво, поскольку в этом случае точки тела будут уходить от равновесного состояния с постоянной скоростью, равной начальной скорости (см. (161) без левой части).

Итак, при появлении у изначально всегда невырожденного акустического тензора нулевого элемента спектра текущая равновесная конфигурация становится неустойчивой. Если минимальный из элементов спектра обозначить  $\lambda_{\min}$ , то это условие можно записать в виде

$$\min_{\mathbf{k} \neq 0} \lambda_{\min} = 0. \quad (165)$$

Условие вырожденности  $\mathbf{A}$  можно записать еще и как

$$\exists \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0},$$

откуда следует, что при этом обязательно теряется положительная определенность этого тензора:

$$\exists \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Обратное, конечно, не верно, поскольку ядра тензора второго ранга как линейного оператора и как квадратичной формы не совпадают. Однако если направление тензора напряжений не меняется в ходе нагружения тела, а спектр монотонно зависит от величины тензора напряжения, оба условия можно одинаково использовать для нахождения критического значения этого тензора. Если записать

положительную определенность акустического тензора через тензор жесткости, то будем иметь условие

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\mathbf{y}:\mathbf{C}:\mathbf{x}\mathbf{y} > 0,$$

известное как условие *строгой эллиптичности* тензора четвертого ранга  $\mathbf{C}$ . Условие потери строгой эллиптичности запишется как

$$\min_{|\mathbf{x}|=|\mathbf{y}|=1} \mathbf{x}\mathbf{y}:\mathbf{C}:\mathbf{x}\mathbf{y} = 0. \quad (166)$$

Условие *положительной определенности* тензора  $\mathbf{C}$

$$\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}:\mathbf{C}:\mathbf{z} > 0$$

( $\mathbf{z}$  — тензор второго ранга) является более строгим требованием; то, что в качестве критического у нас появилось условие строгой эллиптичности, есть следствие диадной структуры тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и симметрии  $\mathbf{C}$  по последней паре индексов. Поэтому при вырождении акустического тензора обязательно теряет строгую эллиптичность тензор жесткости. Оператор равновесия в (161) также теряет строгую эллиптичность с переходом в параболический или гиперболический типы. В этот момент у акустического тензора появляется ядро, а у оператора равновесия — характеристики — двумерные подпространства трехмерного пространства, с нормальными вдоль векторов  $\mathbf{k}$ , доставляющих решение задаче (165) (если плоскость одна, то тип — параболический, если две или три — гиперболический). Когда появляются характеристики, решение перестает зависеть от трех независимых координат пространства, а начинает зависеть от комплексов  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , т.е. в каждой точке плоскости  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const}$  оно имеет одинаковое значение. Вместе с тем, начиная с критического момента, эти слои теряют связь между собой: любое малое возмущение в одном слое экспоненциально растет независимо от окружающих слоев. При благоприятных граничных условиях это приобретенное оператором свойство способно привести к появлению решений с резкими градиентами вдоль нормалей к характеристикам (образуются слабые разрывы). Такие решения описывают локализацию деформации в виде полос сдвига — распространенное в пластических средах явление.

Мы выяснили, что в геометрически линейной ситуации потеря устойчивости текущей конфигурации есть следствие каких-то изменений (деградации) тензора жесткости, приводящих к потере его строгой эллиптичности, поэтому выведенное условие является *условием устойчивости материала*. В одномерном случае жесткость, описываемая одним скаляром, должна обращаться в нуль, что может быть схематически изображено на рис. 8, а. Если к среде приложено критическое напряжение, соответствующее максимуму кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , то пропадает взаимная однозначность этой связи и деформации могут расти неограниченно. Поскольку приложенная нагрузка при этом контролируется и равна критической, а нагрузка, которой среда способна сопротивляться, падает, появление малых закритических деформаций приводит к нарушению равновесия и дальнейшему динамическому росту этих деформаций. Это выясняет силовой смысл критерия устойчивости материала.

Во многомерном случае подставляя в условие строгой эллиптичности  $\dot{\epsilon}:C:\dot{\epsilon} > 0$

определяющие соотношения, получим

$$\dot{\epsilon}:\dot{\sigma} > 0, \quad (167)$$

то есть “угол” между тензорами  $\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}$  не должен быть тупым. Левую часть (167) можно считать мощностью вариаций напряжений. Критерий (167) тогда допускает энергетическое истолкование: если в устойчивом состоянии энергия материалом забирается, усваивается (запасается в виде упругих напряжений, внутренних структур или диссипируется в тепло), то начиная с критического момента она начинает выделяться.

Здесь было дано скорее интуитивное изложение вопроса, причем связь понятий устойчивости материала с устойчивостью решения краевой задачи, где необходимо учитывать граничные условия, учет возможной разгрузки, неконсервативность, несовершенства, намеренно не обсуждалась. Укажем лишь литературу<sup>24</sup>, с помощью которой читатель сможет начать разбираться в вопросе.

**Механизмы дестабилизации материала.** Итак, мы выяснили, что при геометрически-линейном рассмотрении дестабилизация материала, т.е. нарушение условия

$$\dot{\sigma}:\dot{\epsilon} > 0,$$

вызывается деградацией тензора жесткости, связывающего тензоры  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$ . Далее мы рассмотрим один из возможных физических механизмов, ведущий к такой деградации. Затем будут изложены способы введения деградации тензора жесткости в феноменологические уравнения теории течения. И наконец, будет проиллюстрирована роль геометрических эффектов в дестабилизации материала.

Сначала обратимся к кристаллам, для которых мы уже записывали инкрементально-линейный закон упрочнения систем скольжения:

$$\dot{\tau}_k = H_{kl}\dot{\gamma}_l. \quad (168)$$

В простейшем случае матрица упрочнения устроена так:

$$H_{kk} = h, \quad H_{kl} = \alpha h \quad (k \neq l).$$

Параметр  $\alpha$  есть отношение упрочнения системы скольжения за счет скольжения по другим системам скольжения к ее упрочнению за счет скольжения по ней самой. В некоторых материалах это отношение достигает единицы и даже превышает ее (такое сильное упрочнение за счет скольжения по другим системам, наблюдаемое в гцк-металлах с низкой энергией дефекта упаковки, называют латентным). А при  $\alpha \geq 1$  теряет положительную определенность матрица упрочнения  $H_{kl}$  и нарушается условие устойчивости материала

$$\dot{\sigma}:\dot{\epsilon}^p > 0, \quad (169)$$

записанное при гипотетическом случае отсутствия упругости, рассматриваемом здесь с единственной целью прояснить причину дестабилизации материала,

<sup>24</sup> Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М: Наука, 1964. 336 с.  
Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

имеющей неупругую природу. Действительно, подставляя в левую часть (169) известные нам кинематическое соотношение  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \sum_k \dot{\gamma}_k \{ \mathbf{s}_k \mathbf{m}_k \}$  и используя статическое соотношение  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{s}_k \mathbf{m}_k = \dot{\tau}_k$  и физический закон (168), получаем  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\gamma}_k H_{kl} \dot{\gamma}_l$ , откуда сделанный вывод очевиден. В металлах механизм латентного упрочнения приводит к фрагментации скольжения<sup>25</sup>.

В терминах феноменологической теории пластического течения этот и другие физические механизмы, приводящие к деградации тензора жесткости, принято связывать с неассоциированностью закона пластического течения либо с наличием (развитием) на поверхности текучести сингулярной точки. Первая ситуация означает, что функция напряжений  $g$ , градиент которой определяет направление пластического течения, не связывается (не “ассоциируется”) с функцией текучести  $f$  (а она, в общем, и не должна быть с нею связана), т.е.  $g \neq f$  и определяющие соотношения принимают вид

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \dot{\lambda} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_*.$$

Функцию  $g$  называют “пластическим потенциалом”. Это может приводить к нарушению условия устойчивости материала (169). Действительно, в случае несовпадения пластического потенциала с функцией текучести легко представить себе ситуацию, когда угол между нормалью к пластическому потенциалу в данной точке (вдоль которой направлен  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ ) и направлением тензора малых приращений напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  (наружу поверхности текучести, т.е. при активном нагружении) может быть тупым (рис. 8, а). При этом записанное выше неравенство будет нарушено. Обычно неассоциированные законы течения имеют место для геоматериалов, где они связываются с наличием дилатансии (зависимости пластических свойств от гидростатического давления) и внутреннего трения<sup>26</sup>.

<sup>25</sup> Ortiz M., Repetto E.A. Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1999. V.47. P.397-462.

<sup>26</sup> Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V.23, No.6. P.371-394.

Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики. 1989. Т.12, №1. С. 131-183.

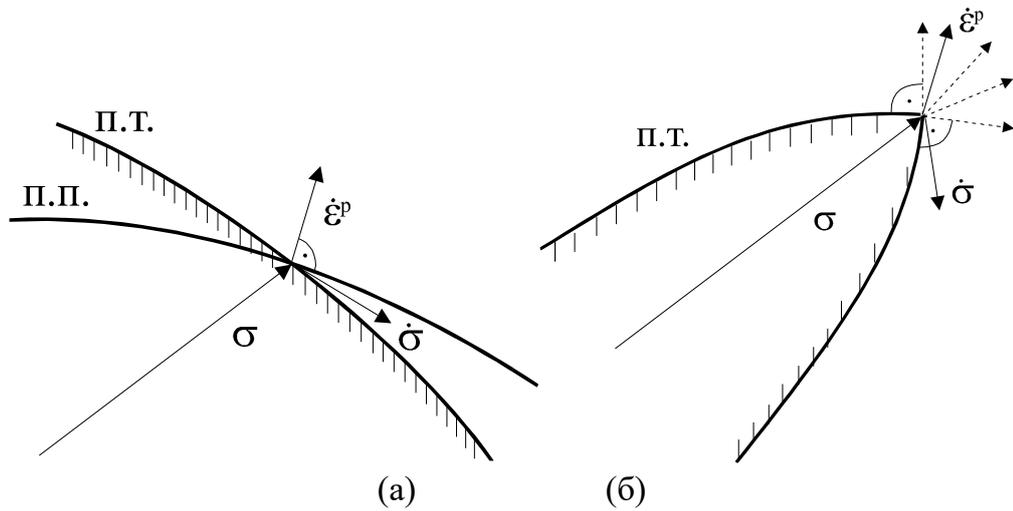
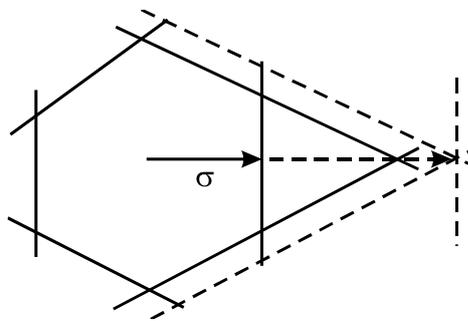


Рис. 8. Возможности существования тупого угла между направлениями  $\dot{\epsilon}^P$  и  $\dot{\sigma}$  в пластичности (заштрихована область упругости).

В сингулярной точке поверхности текучести (при ассоциированном законе течения) также не исключена аналогичная ситуация, причиной которой сейчас выступает наличие целого конуса нормалей к поверхности текучести в сингулярной точке<sup>27</sup> (рис. 8, б). Развитие сингулярности в точке нагружения хорошо различимо на рис. 9. Понятен и механизм образования сингулярной точки в металлах. Пластическая деформация испытываемых металлических поликристаллических образцов осуществляется кристаллографическим скольжением в зернах. Скольжение по данной системе начинается, когда касательное напряжение на ней достигает критической величины:

$$\sigma : sm = \tau_{*sm}. \quad (170)$$

Поверхность текучести поликристалла есть огибающая плоскостей (170), соответствующих всем его системам скольжения. В ходе пластического течения на каких-то системах имеется большее касательное напряжение и соответственно больший сдвиг и упрочнение. Для них плоскость (170) больше удаляется от начала в пространстве напряжений, в результате чего непременно обнажаются точки пересечения других плоскостей (рис. 2, б).



<sup>27</sup> Christoffersen J., Hutchinson J.W. A class of phenomenological corner theories of plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1979. V.27, No.5-6. P.465-487.

Рис. 9. К механизму образования сингулярности на поверхности текучести

Дестабилизации материала могут способствовать (а могут и препятствовать) геометрические эффекты. В геометрически нелинейной ситуации энергетическое условие устойчивости материала выведено Р. Хиллом<sup>28</sup>:

$$\dot{P} : \nabla v > 0, \quad (171)$$

где материальная производная тензора напряжений Пиолы в терминах текущего лагранжева подхода выражается через тензор напряжений Коши как  $\dot{P} = \sigma^H \equiv \dot{\sigma} - (v \nabla) \cdot \sigma + \sigma \nabla \cdot v$ . Критической ситуацией здесь необходимо считать потерю строгой эллиптичности тензора жесткости, связывающего  $\dot{P}$  с  $v \nabla$ , что в одномерном случае выражается в достижении пика на кривой зависимости “номинальных” напряжений  $P$  от деформаций. При этом на кривой зависимости “истинных” напряжений  $\sigma$  от деформации пика может вообще не быть, т.е. геометрические эффекты, вызванные мгновенным искажением напряженной конфигурации, могут дестабилизировать устойчивый (при их отсутствии) материал. Можно двояко интерпретировать геометрический механизм дестабилизации материала — как происходящей за счет мгновенного сокращения площади либо мгновенного поворота.

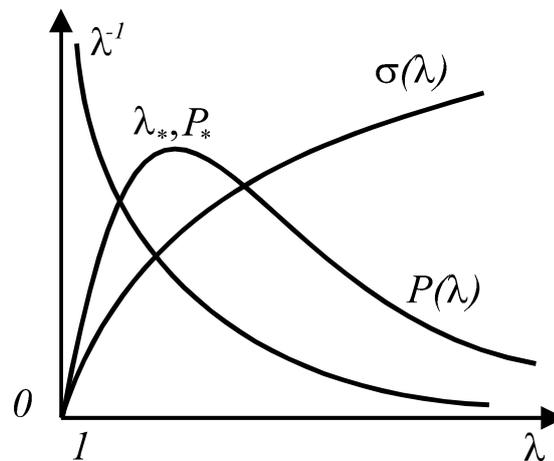


Рис. 10. Немонотонность зависимости нагрузки от удлинения.

Проиллюстрируем оба варианта простейшими одномерными ситуациями, в которых “флагом” неустойчивости материала является убывание прилагаемого напряжения. Пусть стержень с начальными площадью поперечного сечения  $F_0$  и длиной  $L_0$  растягивается под действием силы  $P$ . Примем для простоты, что материал стержня несжимаем, т.е.  $FL = F_0 L_0$ , если  $F, L$  — текущие его площадь поперечного сечения и длина. Пусть кривая зависимости напряжения Коши  $\sigma = P / F$  от кратности удлинения  $\lambda = L / L_0$ ,  $\sigma(\lambda)$ , на всем своем протяжении

<sup>28</sup> Хилл Р. Общая теория единственности и устойчивости для упруго-пластических тел // Механика — Период. сб. перев. ин. статей. 1958. №3. С. 81-95.

монотонно возрастает (рис. 10). Номинальное напряжение  $\sigma_0 = P/F_0$  можно выразить как  $\sigma_0 = \sigma(\lambda)/\lambda$ . При умеренном темпе роста кривой  $\sigma(\lambda)$  зависимость  $\sigma_0(\lambda)$  будет иметь максимум (рис. 10). Критическим моментом является  $P'_\lambda = 0$ , т.е. когда удлинение начнет самопроизвольно расти без увеличения приложенной силы. В этот же момент, конечно, и  $\sigma'_{0\lambda} = 0$ , откуда получаем

$$\lambda \sigma'_\lambda(\lambda) = \sigma(\lambda)$$

— условие Консидера<sup>29</sup>, по которому можно найти критическое удлинение и соответствующую ему нагрузку. В установленный нами критический момент скорость увеличения истинного напряжения за счет сокращения площади поперечного сечения начинает опережать скорость упрочнения (т.е. увеличения истинного напряжения, требуемого для дальнейшего деформирования материала).

Для второй иллюстрации рассмотрим плоский идеально пластический кристалл с одной системой скольжения, способный поворачиваться, так что градиент скоростей представим в виде  $\Omega + \dot{\gamma}sm$ , где  $\Omega$  — спин вращения решетки,  $s, m$  — кристаллографические векторы, образующие ортобазис в рассматриваемой плоскости, а  $\gamma$  — сдвиг вдоль данной системы скольжения. Мгновенный поворот решетки, скольжение сквозь которую обеспечивает пластическую деформацию, есть геометрически нелинейный эффект. Пусть данный кристалл монотонно растягивается вдоль неизменного в пространстве направления  $e$ , т.е.  $(\Omega + \dot{\gamma}sm) \cdot e = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} e$ , где  $\lambda$  — кратность удлинения вдоль этого направления (при этом кристалл может деформироваться и в каком-то другом направлении). Для осуществления скольжения касательное напряжение на рассматриваемой системе скольжения должно постоянно равняться пределу текучести, так что  $(\sigma : sm) = 0$ , для чего осуществляется приложение растягивающего напряжения  $\sigma = \sigma ee$ . Покажем, что такой процесс может сопровождаться разупрочнением, когда знак  $d\sigma/d\lambda$  отрицателен. Из последних двух уравнений следует  $\dot{\sigma} = -2\sigma \text{ctg} 2\alpha \dot{\alpha}$ , где  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  — угол ориентации оси растяжения относительно направления скольжения. Скалярным умножением первого уравнения на  $m$  получаем  $(m \cdot e) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} m \cdot e$  или  $\text{ctg} \alpha \dot{\alpha} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ . В результате имеем выражение  $\frac{d\sigma}{d\lambda} = -2 \frac{\sigma}{\lambda} \text{ctg} 2\alpha \text{tg} \alpha$ , при  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4})$  имеющее отрицательный знак, что и требовалось доказать. Признаки такого механизма наблюдают в металлических кристаллах<sup>30</sup>.

<sup>29</sup> Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. II. М: Мир, 1969. 863 с.

<sup>30</sup> Asaro R.J. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // Acta Metall. 1979. V. 27. P. 445-453.



## ТЕРМОДИНАМИКА КОНТИНУУМА

Данный раздел физики появляется в курсе механики не случайно — термодинамика является как бы связующим звеном механики с остальными разделами физики, химией, биологией.

Механика сплошной среды опирается на три основных феноменологических закона — сохранения массы, количества движения и момента количества движения. Для изучения определенного круга процессов в сплошных средах, сопровождаемых тепло- и массопереносом, химическими реакциями, электромагнитными, биологическими и прочими явлениями, и тем самым уже не являющихся чисто механическими, служит *термодинамика*. Как и механика, термодинамика — наука аксиоматическая, т.е. опирается на некоторые основания феноменологического характера, хорошо проверенные экспериментально и обоснованные статистико-физическими методами.

**Классическая термодинамика**<sup>31</sup>. *Классическая термодинамика* изучает равновесные процессы, всегда являющиеся обратимыми. За это ее называют еще *равновесной термодинамикой* или *термодинамикой обратимых процессов*.

Поясним смысл этих ограничений с точки зрения статистической физики<sup>32</sup>, рассматривающей среду состоящей из частиц. Термодинамика рассматривает объем среды, во-первых содержащий достаточно большое количество частиц, а во-вторых с определенными ограничениями на пространственное распределение их скоростей, позволяющими характеризовать его состояние несколькими осредненными (макроскопическими) параметрами. Такой макроскопически однородный объем называют термодинамической системой, а параметры — *переменными состояния* или *термодинамическими переменными*. При выполнении этих требований объем считается находящимся в состоянии термодинамического равновесия с окружением. Феноменологический смысл термодинамического равновесия мы выясним в термодинамике неравновесных процессов, забегаая вперед, лишь скажем, что это состояние характеризуется отсутствием диссипативных термодинамических сил.

*Равновесный процесс* есть непрерывная смена равновесных состояний. Для его реализации воздействие на среду должно прилагаться достаточно медленно по сравнению со скоростью установления в ней равновесия, т.е. *квазистатически*. Процесс называется *обратимым*, если его можно осуществить в обратном направлении простым обращением траектории нагружения в пространстве независимых термодинамических параметров, т.е. обратимые процессы описываются уравнениями, инвариантными относительно замены времени на

---

<sup>31</sup> Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука-Физматлит, 1972. 400 с.

<sup>32</sup> Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука-Физматлит, 1983. 416 с.; Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука-Физматлит, 1982. 608 с.

противоположное. В статистической физике установлено, что равновесный процесс должен быть обратимым.

Далее сформулируем принципы классической термодинамики, для определенности опираясь на закономерности, экспериментально зафиксированные на равновесных процессах в газах.

**Принципы температуры, энтропии и энергии.** Рассмотрим газ, при некоторой температуре имеющий давление  $p$  и занимающий объем  $v$ . Мы, конечно, умеем измерять температуру, объем и давление нашего газа с помощью известных приборов. Из этих трех переменных мы можем независимо контролировать только две, т.е. состояние газа характеризуется любыми двумя такими переменными.

*Термостатом* назовем массивное тело, температура которого не меняется при контакте с газом. Термостат позволит нам поддерживать желаемую температуру газа. Испытывая в термостате при заданной температуре объем газа, мы зарегистрируем кривую *изотермы*  $p(v)$ . Непрерывно изменяя температуру термостата, получим непрерывную сеть непересекающихся изотерм. Отсюда следует *принцип температуры*: существует функция состояния газа в процессах, протекающих в термостате, — *температура*.

*Адиабатом* назовем сосуд с теплонепроницаемыми стенками. Испытывая в адиабате объем газа, мы зарегистрируем кривую *адиабаты*  $p(v)$ . Непрерывно подкачивая в адиабат теплоту (приведением в контакт с телом более высокой температуры), мы получим непрерывную сеть непересекающихся адиабат. Отсюда следует *принцип энтропии*: существует функция состояния газа в процессах, протекающих в адиабате, — *энтропия*.

Сети изотерм и адиабат образуют систему криволинейных координат на плоскости  $(p, v)$ . Эти координатные кривые можно локально отградуировать так, чтобы якобиан преобразования к координатам  $(p, v)$  всюду равнялся бы единице

$$\frac{\partial(p, v)}{\partial(T, s)} = 1. \quad (1)$$

Тем самым по известным шкалам давления и объема мы определим шкалы *абсолютной температуры*  $T$  и *абсолютной энтропии*  $s$  (с точностью до их начал отсчета). Далее абсолютные температура и энтропия будут называться просто температурой и энтропией. Величины эти, как и  $p, v$ , положительны. Поскольку  $T$  и  $s$  являются независимыми переменными состояния, последнее можно однозначно описать не только парой  $(p, v)$ , но и любыми другими парами независимых переменных состояния:  $T, s$ ,  $p, T$ ,  $v, s$ ,  $p, s$  или  $v, T$ .

*Совершение работы* газом записывается

$$\delta A = p dv. \quad (2)$$

*Работа* газа тогда есть

$$A = \int_{v_1}^{v_2} p dv. \quad (3)$$

Поскольку давление определяется не объемом, а состоянием газа (объемом и температурой либо объемом и энтропией), работа не является функцией состояния, а является *функцией процесса*. Этот вывод справедлив для любой механической системы, не являющейся консервативной. Чтобы вычислить работу, нужно знать как в течение процесса изменялась температура или энтропия.

Определим функцию состояния  $U$ , для адиабатических процессов совпадающую с работой:

$$\delta A_s = p dv_s = -dU_s.$$

Для неадиабатических процессов очевидно

$$dU = -p dv + \alpha ds. \quad (4)$$

Правая часть должна представлять собой полный дифференциал, поэтому

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v = 0.$$

Производные  $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)_s$  и  $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$  есть якобианы преобразований систем координат  $(\alpha, s)$  к  $(v, s)$  и  $(p, v)$  к  $(s, v)$ , т.е. записанное условие эквивалентно

$$\frac{\partial(\alpha, s)}{\partial(v, s)} + \frac{\partial(p, v)}{\partial(s, v)} = 0.$$

С использованием элементарных свойств определителей полученное равенство записывается

$$\frac{\partial(\alpha, s)}{\partial(p, v)} = 1, \quad (5)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_s = 1,$$

т.е. интегрирующий множитель  $\alpha$  в (4) совпадает с  $T$  с той же точностью, с какой определена температура, и в результате

$$dU = T ds - p dv. \quad (6)$$

Очевидно, что (1) является условием интегрируемости (6). Функцию состояния  $U$  называют *адиабатическим потенциалом*. Ее естественными переменными состояния являются объем и энтропия, а из (6) вытекают выражения температуры и давления через  $U$ :

$$T = \left(\frac{dU}{ds}\right)_v, \quad p = -\left(\frac{dU}{dv}\right)_s, \quad (7)$$

Вид выражений оправдывает название переменных  $s, v$  термодинамическими координатами, а  $T, p$  — термодинамическими силами. Обратим внимание на то, что (6) предполагает

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

и тем самым связывает два термодинамических коэффициента — изменение температуры при ее адиабатическом расширении и изменение давления при изохорном сообщении теплоты системе.

Сформулируем далее *принцип энергии*: существует функция состояния термодинамической системы  $U$ , называемая *внутренней энергией*. Значение этой функции может быть изменено двумя независимыми способами: а) совершением работы  $\delta A$  газом или б) *подведением теплоты*  $\delta Q$ , т.е. приведение газа в контакт с телом, имеющим большую температуру, если в течение такого контакта газом не совершается работа.

В адиабате второй канал изменения внутренней энергии исключен, и поэтому ее изменение в этом случае равно  $dU_s$ . Но функцию состояния, сводящуюся к  $dU_s$  в адиабатических процессах мы уже строили — это адиабатический потенциал  $U$ . Поэтому адиабатический потенциал тождественен с внутренней энергией и последняя также будет обозначаться  $U$ .

Сформулированный выше принцип энергии может теперь быть записан в виде

$$dU = \delta Q - \delta A. \quad (8)$$

Этот принцип точно в такой же форме постулируют и в неравновесной термодинамике в отличие от принципов температуры и энтропии.

Из принципа энергии и определения адиабатического потенциала получаем выражение для подведения теплоты

$$\delta Q = T ds. \quad (9)$$

Явное сходство этого выражения с определением совершения работы дополнительно обосновывает название  $T$  термодинамической силой,  $s$  термодинамической координатой, а саму равновесную термодинамику — расширением механики путем введения тепловой степени свободы. В традиционном изложении классической термодинамики последнее равенство принимают за определение энтропии.

Равенство

$$dU = T ds - p dv, \quad (10)$$

объединяющее принципы температуры, энтропии и энергии, называют *основным термодинамическим тождеством* (или *фундаментальным уравнением Гиббса*) равновесной термодинамики.

Подведенная теплота находится как

$$Q = \int_{s_1}^{s_2} T ds. \quad (11)$$

Поскольку температура определяется не энтропией, а состоянием газа (энтропией и объемом либо энтропией и давлением), подведенная теплота не является функцией состояния, а является *функцией процесса*.

Определим понятие *теплоемкости*:

$$c = \frac{\delta Q}{\delta T} \quad (12)$$

— количества тепла, при котором температура изменяется на один градус. При помощи (9)

$$c = T \frac{\partial s}{\partial T}. \quad (13)$$

Так же, как и подведение теплоты, теплоемкость является функцией процесса и приобретает однозначный смысл при указании условий нагревания тела.

Трех сформулированных принципов оказывается достаточным для доказательства невозможности построения тепловой машины с предельно высоким коэффициентом полезного действия (вечного двигателя второго рода). Представим себе замкнутый цикл в плоскости  $(p, v)$ . Поскольку  $T$  и  $s$  являются функциями состояния и поскольку возврат в ту же точку при осуществлении цикла в  $(p, v)$  не меняет состояния, в плоскости  $(T, s)$  тоже реализуется цикл. Из принципа энергии следует, что в рассматриваемом цикле

$$\oint dU = \oint \delta Q - \oint \delta A,$$

а поскольку при осуществлении цикла мы опять приходим в то же состояние, а  $U$  есть функция состояния,

$$\oint \delta Q = \oint \delta A,$$

то есть площади циклов в  $(p, v)$  и  $(T, s)$  совпадают. Для осуществления цикла с точки зрения  $(T, s)$  необходимо получить теплоту  $Q_1 > 0$  от нагревателя и отдать теплоту  $0 < Q_2 < Q_1$  холодильнику, при этом только разница  $Q_1 - Q_2 = \oint \delta Q = \oint \delta A$  превращается в работу. КПД теплового двигателя  $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ . Довольно

легко показать, что наибольшим КПД обладает *цикл Карно*, описываемый прямоугольником в плоскости  $(T, s)$  со сторонами вдоль координатных осей. Описываем вокруг произвольного цикла в этой плоскости такой прямоугольник, для которого величины полученной и отданной теплоты суть  $q_1$  и  $q_2$ , а для произвольного цикла —  $q_1 - \delta q_1$  и  $q_2 + \delta q_2$ , и  $\eta = \frac{q_1 - q_2 - \delta q_1 - \delta q_2}{q_1 - \delta q_1} \leq \frac{q_1 - q_2}{q_1}$ .

Для цикла же Карно  $q_1 = T_1(s_2 - s_1)$ ,  $q_2 = T_2(s_1 - s_2)$  и  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . Видно, что

КПД всегда меньше единицы и приближается к ней, только если температуру холодильника устремить к абсолютному нулю.

Классическая термодинамика, основанная на трех феноменологических основаниях, продемонстрировала здесь свои возможности устанавливать причинно-следственные связи, не вникая в частные атомно-молекулярные механизмы.

**Другие термодинамические потенциалы.** Определим функцию состояния  $F$ , для изотермических (происходящих в термостате) процессов совпадающую с работой:

$$\delta A_T = pdv_T = -dF_T.$$

Для неизотермических процессов очевидно

$$dF = -pdv + \beta ds.$$

Интегрирующий множитель  $\beta$  определяем так, чтобы правая часть являлась полным дифференциалом:

$$dF = -sdT - pdv. \quad (14)$$

Функцию состояния  $F$  поэтому уместно назвать *изотермическим потенциалом*. Естественными переменными состояния этой функции являются объем и температура, а сопряженные им переменные находятся через  $F$  как

$$s = -\left(\frac{dF}{dT}\right)_v, \quad p = -\left(\frac{dF}{dv}\right)_T. \quad (15)$$

Равенство (14) предполагает

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

и тем самым связывает термодинамические коэффициенты изменения энтропии при изотермическом расширении и изменения давления при изохорном нагревании.

Выражение (14) можно получить и из других соображений. В дифференциальной форме (6)

$$dU = Tds - pdv$$

осуществляем переход от переменных  $s, v$  к переменным  $T, v$ , для чего используется *преобразование Лежандра*: вычитаем из обеих частей уравнения (6)  $d(Ts)$  и обозначая

$$F = U - Ts \quad (16)$$

получаем (14).

В изотермическом процессе принцип энергии

$$dU_T = \delta Q_T - \delta A_T,$$

т.е. в частности при убыли внутренней энергии газа последний совершает работу и требует подведения теплоты. Поскольку при этом  $\delta A_T = dF_T$  и  $\delta Q_T = d(Ts)_T$ , изотермический потенциал  $F$  называют *свободной энергией* (Гельмгольца) (последняя может совершить работу), а функцию состояния  $Ts$  — *связанной энергией* (последняя с неизбежностью теряется — эту часть внутренней энергии мы не можем заставить совершать работу).

Построим функцию состояния  $W$ , совпадающую с подведением теплоты для изобарных (происходящих при постоянном давлении) процессов:

$$\delta Q_p = Tds_p = dW_p.$$

Для произвольных процессов должно быть

$$dW = Tds + vdp. \quad (17)$$

Функция состояния

$$W = U + pv \quad (18)$$

называется *энтальпией*, ее естественными переменными являются энтропия и давление, а сопряженные им переменные, температура и объем, находятся через  $W$  как

$$T = \left(\frac{dW}{ds}\right)_p, \quad v = \left(\frac{dW}{dp}\right)_s. \quad (19)$$

Наконец, можно построить еще одну функцию состояния — *термодинамический потенциал* (Гиббса):

$$\Phi(p, T) \equiv U - Ts + pv, \quad (20)$$

$$d\Phi = -sdT + vdp, \quad (21)$$

$$s = -\left(\frac{d\Phi}{dT}\right)_p, \quad v = \left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_T. \quad (22)$$

Уравнения (17) и (21) также предполагают связь некоторых термодинамических коэффициентов.

Четырьмя функциями —  $U, F, W, \Phi$  — исчерпываются термодинамические потенциалы рассматриваемого нами идеального газа. Аналогичные функции могут быть введены для любых термодинамических систем с одной “нетепловой” степенью свободы, для которых только требуется заменить  $v$  и  $p$  на соответствующую пару обобщенных координаты и силы.

Термодинамические функции (функции состояния) определены для системы в равновесном состоянии. Знание одной из таких функций полностью определяет свойства такой системы: уравнения состояния (10), (14), (17) или (21) и термодинамические коэффициенты. Например, зная  $\Phi(p, T)$ , находим  $s = -(\partial\Phi / \partial T)_p$ ,  $v = (\partial\Phi / \partial p)_T$ ,  $c_p = T(\partial s / \partial T)_p = -T(\partial^2\Phi / \partial T^2)_p$ . Заметим, что если для какой-нибудь из этих функций перейти от “родной” пары переменных к любой другой, то получение уравнений состояния потенциального вида уже не представляется возможным. Построение термодинамических функций ведется

методами статистической физики. Знания уравнения состояния и выражения для одного термодинамического коэффициента (например, теплоемкости) достаточно для восстановления соответствующего термодинамического потенциала. Однако связи термодинамических коэффициентов вообще выводятся независимо от конкретного вида потенциалов, что было продемонстрировано выше.

В случае наличия у системы  $n$  нетепловых степеней свободы  $\alpha_j$  принцип энергии принимает вид

$$dU = \delta Q - \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad (23)$$

а вместо ранее сформулированных принципов температуры и энтропии принимают (9)

$$\delta Q = Tds.$$

Основное термодинамическое тождество тогда принимает вид

$$dU = Tds - \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \quad (24)$$

и гарантирует, что правая часть (24) является полным дифференциалом, т.е. выполнение  $n + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$  условий интегрируемости

$$\frac{\partial(x_i, \alpha_i)}{\partial(T, s)} = 1, \quad \frac{\partial(x_i, \alpha_i)}{\partial(x_j, \alpha_j)} = 1, \quad i \neq j, \quad (25)$$

связывающих термодинамические коэффициенты.

Из (25) вытекают, например, 15 условий симметрии тензора жесткости линейно-упругой среды:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

(рекомендуется показать).

Свободная энергия, энтальпия и термодинамический потенциал определяются как

$$F = U - Ts, \quad W = U + \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad \Phi = U - Ts + \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i. \quad (26)$$

В качестве нетепловых степеней свободы могут фигурировать векторы намагниченности магнитного поля в пара- и ферромагнетиках или поляризации в сегнетоэлектриках, тензор деформаций в деформируемых твердых телах, количество вещества определенного сорта в многокомпонентных или многофазных системах.

**Системы с переменным количеством вещества.** Примерами термодинамических систем с переменным количеством вещества определенного сорта или определенной фазы могут служить среды, в которых происходят те или иные химические, фазовые, структурные превращения (химические реакции, плавление, кристаллизация, испарение, трансформация кристаллической решетки,

переходы в сверхтекучее и сверхпроводящее состояния, образование структур и т.д.). Для газа переменного количества внутренняя энергия запишется в виде

$$dU = Tds - pdv + \mu dn, \quad (27)$$

где  $n$  — количество молей вещества, а сопряженная ему переменная  $\mu$  называется *химическим потенциалом* вещества. Напомним, что *молем* какого-либо вещества называется его количество, содержащее столько же молекул, сколько атомов содержится в 12 г. углерода 12 (число Авогадро  $N_A$ ); масса одного моля вещества называется молярной массой. Поскольку переменные  $v, s$  являются экстенсивными, т.е. линейно зависящими от количества вещества, вытекающее из

(27) выражение для химического потенциала  $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{v,s}$  не самое удобное для

понимания. То же можно сказать относительно выражений  $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{v,T}$ ,

$\mu = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{p,s}$ , вытекающих из определений

$$dF = -sdT - pdv + \mu dn, \quad (28)$$

$$dW = Tds + vdp + \mu dn. \quad (29)$$

Наиболее ясный смысл химического потенциала вытекает из определения

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{p,T} \quad (30)$$

через термодинамический потенциал

$$d\Phi = -sdT + vdp + \mu dn, \quad (31)$$

аргументами которого (кроме  $n$ ) являются интенсивные  $p$  и  $T$ . Таким образом, химический потенциал есть отнесенный к одному молю (молярный) термодинамический потенциал. Поскольку все потенциалы сами являются экстенсивными, из (30) следует, что если первыми двумя аргументами химического потенциала выбраны  $p$  и  $T$ , то третий аргумент,  $n$ , вообще пропадает:

$$\mu = \mu(p, T)$$

(подчеркнем, что только в равновесном состоянии). Кроме того, очевидно можем записать

$$d\mu = -\tilde{s}dT + \tilde{v}dp, \quad (32)$$

где  $\tilde{s}, \tilde{v}$  — молярные энтропия и объем. Иногда удобно вводить потенциал (не имеющий названия), аргументом которого вместо  $n$  является  $\mu$ .

**Рост энтропии в процессах выравнивания. Термодинамические неравенства.** Классическая термодинамика позволяет изучать равновесные процессы, но с ее помощью можно сделать важные выводы о направлении процессов, начальное и промежуточные состояния которых не являются равновесными, т.е. необратимыми. Вообразим себе теплоизолированную *закрытую* (не обменивающийся массой с окружением), короче *замкнутую*,

систему, состоящую из двух (или нескольких) частей, каждая из которых находится в равновесном состоянии, но между частями которой равновесие отсутствует. С течением времени данная система переходит в равновесное состояние. Поскольку начальные состояния подсистем и конечное состояние системы равновесны, а энтропия есть функция состояния, можно для конкретной системы рассчитать изменение энтропии. Такие расчеты показывают, что в процессах выравнивания в замкнутой системе энтропия возрастает.

Например, в качестве подсистем замкнутой системы можно рассмотреть два первоначально изолированных друг от друга резервуара, наполненные газом с параметрами  $p_1, T_1$  и  $p_2, T_2$ . Изолирующая прокладка убирается, и в системе устанавливается состояние с параметрами  $p, T$ . Расчет с использованием уравнения состояния совершенного газа, аддитивности энтропии по подсистемам в начальном состоянии и сохранения энергии при переходе от начального к конечному состоянию приводит к положительности приращения энтропии в данном процессе.

В качестве второго примера рассмотрим процесс Гей - Люссака — расширение газа в пустоту. Замкнутая система состоит из двух сосудов, в одном из которых находится газ в равновесном состоянии, а другой пуст. Перегородку, разделяющую сосуды, удаляют, и газ необратимо вырывается в пустой сосуд. По прошествии некоторого времени в сосудах устанавливается термодинамическое равновесие и становятся определенными параметры состояния. Поскольку система и ее окружение не обмениваются теплом и не совершают работу друг по отношению к другу, остается постоянной внутренняя энергия газа. Мысленно заменим реальный необратимый процесс воображаемым квазистатическим, ведущим к тому же конечному состоянию. Проще всего считать этот процесс бесконечно медленным изоэнергетическим расширением газа до нужного объема. Основное термодинамическое тождество для него дает

$$dU = Tds - pdv = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_U = \frac{p}{T} > 0$$

— в процессе необратимого расширения газа в пустоту энтропия возрастает.

Рассмотрим также процесс Джоуля — Томсона — газ в теплоизолированной трубе продавливается с помощью поршня сквозь пористую перегородку, причем слева и справа от этой перегородки поддерживаются постоянные давления  $p_1$  и  $p_2 < p_1$ . Нетрудно убедиться, что продавливание объема  $v_1$  газа сквозь мембрану потребует совершения над газом работы  $p_1 v_1 - p_2 v_2$  и увеличит его внутреннюю энергию на  $U_2 - U_1$ . Поэтому в таком процессе остается неизменной энтальпия:

$$U_1 + p_1 v_1 = U_2 + p_2 v_2 \Leftrightarrow W_1 = W_2.$$

Мысленно заменим реальный необратимый процесс воображаемым квазистатическим изоэнтальпическим, ведущим к тому же конечному состоянию. Основное термодинамическое тождество для такого процесса

$$dW = Tds + vdp = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_W = -\frac{v}{T} < 0.$$

Так как газ просачивается в область с пониженным давлением, энтропия возрастает.

В рассмотренных процессах выравнивания в замкнутых системах энтропия возрастает. В статистической физике энтропия системы определяется независимо от ее равновесности как логарифм вероятности микросостояний частиц и доказывається, что система стремится в состояние с наиболее вероятным статистическим распределением параметров. Таким образом, статистико-физическими методами закон возрастания энтропии может быть доказан в общем виде. В состоянии равновесия энтропия замкнутой системы достигает своего максимального значения.

Закон сохранения энергии оставляет равновероятными состояния системы с равной энергией. Закон же возрастания энтропии разрешает течение необратимых процессов в одном направлении и запрещает в другом. По выражению Зоммерфельда, “в гигантской фабрике естественных процессов принцип энтропии занимает место директора, который предписывает вид и течение всех сделок. Закон сохранения энергии играет лишь роль бухгалтера, который приводит в равновесие дебет и кредит”.

Рассмотрим теперь необратимый процесс в нетеплоизолированной системе, получающей или отдающей количество тепла  $\delta Q$ . Представим себе такой процесс как последовательность двух процессов — перехода системы в равновесное состояние в условиях теплоизоляции и равновесного подвода или отвода тепла. На первой стадии энтропия системы возрастает:  $ds_i > 0$ , а на второй — изменяется на величину  $ds_e = \delta Q / T$ , в результате чего суммарная энтропия

$$ds = ds_i + ds_e \geq \delta Q / T \quad \text{или} \quad \delta Q \leq Tds. \quad (33)$$

Используя принцип энергии (8)

$$dU = \delta Q - pdv,$$

получим неравенство

$$dU \leq Tds - pdv, \quad (34)$$

заменяющее в случае необратимых процессов основное термодинамическое тождество. С помощью (34) и определений термодинамических потенциалов  $F = U - Ts$ ,  $W = U + pv$ ,  $\Phi = U - Ts + pv$  получаем неравенства

$$dF \leq -sdT - pdv, \quad (35)$$

$$dW \leq Tds + vdp, \quad (36)$$

$$d\Phi \leq -sdT + vdp. \quad (37)$$

Параметры и функции в (34) - (37) соответствуют равновесному отрезку процесса, а знаки неравенства здесь появились благодаря тому, что под  $ds$  теперь понимается сумма приращений энтропии, полученной извне или отданной внешности на равновесной стадии процесса и произведенной внутри системы в процессе релаксации. Благодаря этому термодинамические функции в необратимых процессах приобретают экстремальные свойства.

Практическое значение имеют лишь неравенства для свободной энергии и термодинамического потенциала, поскольку эти функции монотонно зависят от энтропии и тем самым содержат в себе внутренний источник (точнее, сток) энтропии, производящейся в необратимом процессе релаксации. Из (35), (37) следует

$$dF \leq 0 \quad \text{при} \quad T = \text{const} \quad \text{и} \quad v = \text{const}, \quad (38)$$

$$d\Phi \leq 0 \quad \text{при} \quad T = \text{const} \quad \text{и} \quad p = \text{const}. \quad (39)$$

При протекании необратимого процесса приближения к равновесию при  $T = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  убывает свободная энергия, а при  $T = \text{const}$  и  $p = \text{const}$  — термодинамический потенциал. Равенства достигаются в равновесном состоянии. Другие же два потенциала могут только подводиться к системе извне или отводиться из нее наружу. Для внутренней энергии это очевидно непосредственно из принципа энергии:  $U$  может меняться только за счет внешнего подвода или отвода тепла и работы внешних сил. Обе функции поэтому не чувствуют неравновесных процессов. Формальное же применение неравенств (34), (36) требует поддержания  $ds = 0$ , что может быть осуществлено только с помощью устройства с обратной связью, постоянно отводящего тепло, произведенное системой в необратимом процессе ее релаксации.

Если в равновесном состоянии при постоянных температуре и давлении энтропия и объем получают малые приращения (конечно, соответствующие нарушению равновесия),

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \delta(U - Ts + pv) = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_v \delta s + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_s \delta v + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)_v (\delta s)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} \delta s \delta v + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right)_s (\delta v)^2 \right] - T \delta s + p \delta v = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)_v (\delta s)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} \delta s \delta v + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right)_s (\delta v)^2 \right] = \\ &\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v (\delta s)^2 + 2 \frac{\partial T}{\partial v} \delta s \delta v - \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s (\delta v)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Это условие эквивалентно двум следующим:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v > 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s < 0. \quad (40)$$

Из (13) первое неравенство требует

$$T / c_v > 0, \quad (41)$$

откуда  $c_v > 0$ . Второе с помощью

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = \frac{\partial(T,s)}{\partial(v,s)} = \frac{\partial(T,s)}{\partial(p,v)} \frac{\partial(p,v)}{\partial(v,s)} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v$$

может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial(T,p)}{\partial(s,v)} < 0$$

и далее

$$\frac{\partial(T,p)}{\partial(T,v)} \frac{\partial(T,v)}{\partial(s,v)} = \frac{T}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0.$$

Вследствие (41) это дает

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T < 0, \quad (42)$$

т.е. изотермическое сжатие приводит к росту давления и наоборот — газ “пружинит”. Таким образом, термодинамика позволяет получить некоторые ограничения на термодинамические коэффициенты.

Далее рекомендуется получить из термодинамических неравенств (38) или (39) требование положительной определенности тензора жесткости линейно-упругой среды.

**Фазовые переходы.** С помощью классической термодинамики мы изучим (в указанных выше рамках) некоторые необратимые процессы: фазовые переходы, растворение и химические реакции. Перед этим мы дадим необходимые определения. *Фазой* назовем физически однородную часть системы, отличающуюся своими физическими свойствами от окружения и отделенную от него границей раздела. Фаза может состоять из нескольких компонентов. Под *компонентами* понимаются химически различные вещества, количество каждого из которых не зависит от содержания других. Любое *химическое соединение* содержит химические вещества в строго определенной пропорции и поэтому является однокомпонентным. *Раствор* есть молекулярная или атомная смесь нескольких веществ, однородная относительно своих макроскопических свойств. Количество каждой из составных частей раствора ограничено только ее растворимостью, поэтому составные части раствора являются компонентами. Компоненты растворов могут находиться в различных агрегатных состояниях (например, есть растворы жидкости или газа в твердой компоненте, газа в жидкости и т.д.). Заметим, что газы имеют неограниченную растворимость друг в друге, твердые же тела, напротив, редко растворяются друг в друге, но золото и серебро, а также серебро и медь растворяются друг в друге неограниченно, образуя твердые растворы замещения; твердый раствор внедрения образует углерод в железе. В *механических смесях* перемешаны макроскопические частицы веществ.

Примером механических смесей служат гранит, металлы в обычном, поликристаллическом, состоянии, суспензии. Раствор нельзя считать механической смесью атомных или молекулярных компонент, поскольку последние в значительной мере химически взаимодействуют друг с другом, в результате чего растворение обычно сопровождается тепловым или объемным эффектами.

Для примера, обычная вода есть однофазная и однокомпонентная система, а вода и насыщенный водяной пар — двухфазная однокомпонентная. Если же водяной пар смешан с воздухом, то газообразная фаза уже многокомпонентная. Система не может иметь более одной газообразной фазы. Если в воду налить спирт (смешиваемый с водой) и ртуть (с водой не смешиваемую), будем иметь двухфазную систему раствора спирта в воде и ртути.

Обратимся к фазовым превращениям, к которым относятся все изменения агрегатного состояния вещества — плавление, кристаллизация, испарение, конденсация, полиморфные превращения кристаллических модификаций твердого вещества, переходы в ферромагнитное, сверхтекучее и сверхпроводящее состояния. Термодинамика различает фазовые переходы первого и второго родов, в ходе которых претерпевают разрывы соответственно первые или вторые производные термодинамического (и химического) потенциала. В этой классификации подразумеваются переходы, происходящие сразу во всем объеме, в котором располагается либо только одна фаза, либо только вторая, и граница раздела фаз отсутствует. Такая идеализация служит, чтобы показать существенные различия переходов; условия ее реализации укажем ниже. Как известно, первые производные термодинамического потенциала по переменным состояния есть также переменные состояния, поэтому в фазовых переходах первого рода скачком меняется состояние системы. В фазовых же переходах второго рода состояние системы меняется непрерывно, а разрыв претерпевают термодинамические коэффициенты, т.е. свойства системы. В обоих случаях термодинамический (и вместе с ним химический) потенциал системы изменяется непрерывно. Скачкообразное изменение термодинамических сил в переходах первого рода означает потерю устойчивости системы, поэтому на протекание таких переходов существенную роль оказывают несовершенства (флуктуации). Относительно переходов второго рода этого сказать нельзя, в них состояние изменяется непрерывно. Такие переходы обуславливаются некоторыми малыми изменениями системы (не влекущими скачкообразного изменения состояния), характеризующимися изменениями ее симметрии, в ходе которых появляется либо исчезает некоторый набор ее элементов, так что группа симметрии одной фазы является подгруппой группы симметрии второй. Поскольку симметрия изменяется скачком (иначе быть не может), скачок испытывают и чувствительные к симметрии свойства системы. Фазовыми переходами первого рода оказываются все изменения агрегатного состояния вещества и некоторые полиморфные превращения, переходы в ферромагнитное, сверхтекучее и сверхпроводящее состояния при наличии внешнего поля, а фазовыми переходами второго рода — некоторые

полиморфные превращения и переходы в ферромагнитное, сверхтекучее и сверхпроводящее состояния при отсутствии внешнего поля. В трех последних случаях, например, при переходе появляется вектор (намагниченности, тока), изменяющий симметрию среды. Количественной мерой развития перехода второго рода (удаленности от точки перехода) в этих случаях является модуль этого вектора, а в общем случае — скаляр, называемый *параметром порядка*, в одной из фаз имеющий нулевое значение, а во второй — монотонно увеличивающийся от нулевого значения по мере развития процесса.

Рассмотрим подробнее фазовые переходы первого рода. Термодинамический потенциал однокомпонентной двухфазной системы зависит, кроме давления и температуры, от числа молей вещества каждой фазы  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\Phi = \Phi(p, T, n_1, n_2), \quad n_1 + n_2 = \text{const},$$

$$d\Phi = -sdT + vdp + (\mu_1 - \mu_2)dn_1.$$

Пусть в системе уже установилось механическое и тепловое равновесие (давление и температура) и теперь происходит необратимый процесс установления равновесия по отношению к взаимному превращению фаз. Термодинамический потенциал при этом уменьшается:

$$d\Phi = (\mu_1 - \mu_2)dn_1 < 0, \quad (43)$$

откуда следует что  $dn_1 < 0$  при  $\mu_1 > \mu_2$  и  $dn_1 > 0$  при  $\mu_1 < \mu_2$ , т.е. поток вещества направлен от фазы с большим к фазе с меньшим химическими потенциалами. В состоянии равновесия термодинамический потенциал имеет минимум,  $d\Phi = 0$ , и должно быть

$$\mu_1 = \mu_2. \quad (44)$$

Поскольку (44) соответствует равновесию, химические потенциалы в этом состоянии зависят только от давления и температуры и не зависят от чисел молей фаз. Поэтому (44) дает уравнение

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T), \quad (45)$$

решением которого является кривая на плоскости  $(p, T)$ , называемая *кривой равновесия фаз* и позволяющая по значению одного контролируемого параметра найти значение второго, обеспечивающее равновесие. Заметим, что если давление и температура не соответствуют какой-либо точке кривой равновесия фаз, неравенство (43) позволяет существовать в равновесном состоянии только одной из двух фаз в зависимости от положения точки относительно кривой (слева от нее либо справа безразлично от близости к ней). В точках кривой концентрация фаз однозначно не определяется. Читателю будет полезно изобразить зависимость термодинамического потенциала от  $n_1$  и  $n_2$  при различных значениях  $p, T$ .

Условие (43) показывает, что при фазовом переходе химический потенциал изменяется непрерывно. Однако некоторые его производные могут претерпевать разрыв. При фазовых переходах первого рода терпят конечный разрыв первые производные химического потенциала,  $(\partial\mu / \partial T)_p = -\tilde{s}$  — молярная энтропия и

$(\partial\mu / \partial p)_T = \tilde{v}$  — молярный объем. Поскольку при неизменной температуре  $ds = T\delta Q$ , скачок энтропии связан с *молярной теплотой перехода*  $\lambda = T[\tilde{s}]$ ,  $[x] \equiv x_2 - x_1$ . Таким образом, фазовые превращения первого рода сопровождаются скачкообразным изменением объема и поглощением или выделением теплоты. Для таких превращений выведем дифференциальное уравнение Клапейрона - Клаузиуса, решением которого является кривая равновесия фаз. Вдоль этой кривой

$$d\mu_1(p, T) = d\mu_2(p, T)$$

и пользуясь (32)

$$d\mu = -\tilde{s}dT + \tilde{v}dp$$

получаем искомое уравнение

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T[\tilde{v}]}, \quad (45)$$

где зависимость молярной теплоты перехода  $\lambda$  и молярного объема перехода  $[\tilde{v}] \equiv \tilde{v}_2 - \tilde{v}_1$  от давления и температуры нужно определить экспериментально.

На плоскости  $(s, v)$  сеть, образованная изобарами и изотермами обеих фаз, разорвана по области, ограниченной двумя прообразами кривой равновесия фаз на плоскости  $(p, T)$ . На плоскостях  $(p, v)$  и  $(T, s)$  фазовый переход первого рода подчиняется *правилу Максвелла*, для уяснения которого возьмем уравнение Ван-дер-Ваальса, описывающее газообразное и жидкое состояния вещества. Изотермы этого уравнения на плоскости  $(p, v)$  имеют s-образный вид. Как мы знаем, работа в изотермическом процессе равна убыли свободной энергии:

$$A_T = \int_{12} p d\tilde{v} = \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2.$$

С другой стороны, равенство химических потенциалов дает

$$\tilde{F}_1 + p\tilde{v}_1 = \tilde{F}_2 + p\tilde{v}_2$$

(поскольку  $\mu = \tilde{\Phi} = \tilde{F} + p\tilde{v}$ ), откуда находим

$$\int_{12} p d\tilde{v} = p(\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1),$$

т.е. интеграл по изотерме Ван-дер-Ваальса на плоскости  $(p, v)$  равен площади прямоугольника, лежащего под изобарой, откуда однозначно находится давление и скачок молярного объема (найти графически самостоятельно). Кстати, если о состоянии некоторого вещества известны лишь две изолированные ветви изотермы, то положение равновесной изобары определяется непосредственно условием (44). На плоскости  $(T, s)$  изобары Ван-дер-Ваальса также имеют s-образный вид. Согласно (17), тепло, подведенное в ходе изобарического процесса равно изменению энтальпии:

$$Q = \int_{12} T d\tilde{s} = \tilde{W}_2 - \tilde{W}_1.$$

С другой стороны, равенство химических потенциалов дает

$$\tilde{W}_1 - T\tilde{s}_1 = \tilde{W}_2 - T\tilde{s}_2$$

(поскольку  $\mu = \tilde{\Phi} = \tilde{W} - T\tilde{s}$ ), откуда находим

$$\int Td\tilde{s} = T(\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1),$$

т.е. интеграл по изобаре Ван-дер-Ваальса на плоскости  $(T, s)$  равен площади прямоугольника, лежащего под изотермой, откуда однозначно находится температура и скачок молярной энтропии.

Итак, условие равновесия фаз (43) в среде Ван-дер-Ваальса говорит о том, что давление “умеет” преодолевать горб изотермы, т.е. молчаливо предполагается наличие в системе достаточно сильных флуктуаций давления. Если же величина флуктуаций недостаточна, фазовый переход произойдет не при критическом, а при большем давлении, т.е. будет иметь место “затяжка” фазового перехода. Для фазовых переходов первого рода характерно существование химического потенциала фазы в области  $(p, T)$ , где эта фаза неустойчива, а устойчива вторая. Примерами неустойчивых фаз являются перегретая жидкость, пересыщенный пар. Переходы второго рода не имеют дело с неустойчивостью, поэтому там такая ситуация невозможна.

Для зависимостей  $\mu_i(p)$  при заданной температуре  $T$  имеем

$$\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial p}\right)_T = \tilde{v}_i > 0, \quad \left(\frac{\partial^2\mu_i}{\partial p^2}\right)_T = \left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial p}\right)_T < 0,$$

т.е. кривые  $\mu_i(p)$  пересекаются в одной точке  $p_*$  и имеют в ней разный наклон (молярные объемы фаз неодинаковы). (Точка  $p_*$ ,  $T$ , конечно, принадлежит кривой равновесия фаз.) Минимальность термодинамического потенциала требует, чтобы при увеличении давления над  $p_*$  фаза с большим молярным объемом (и более крутым наклоном  $\mu(p)$ ) превращалась в фазу с меньшим, а при уменьшении давления происходило бы обратное превращение. Для зависимостей же  $\mu_i(T)$  при заданном давлении  $p$  имеем

$$\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial T}\right)_p = -\tilde{s}_i < 0, \quad \left(\frac{\partial^2\mu_i}{\partial T^2}\right)_p = -\frac{c_p}{T} < 0,$$

т.е. кривые  $\mu_i(T)$  также пересекаются в одной точке  $T_*$  и имеют в ней разный наклон (молярные энтропии фаз неодинаковы). Увеличение температуры над  $T_*$  ведет к превращению фазы с меньшей молярной энтропией в фазу с большей, уменьшение — наоборот.

Равновесие трех фаз должно одновременно удовлетворять условиям

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T), \quad \mu_2(p, T) = \mu_3(p, T), \quad \mu_1(p, T) = \mu_3(p, T), \quad (46)$$

задающим точку на плоскости  $(p, T)$ , называемую *тройной точкой*. Кривые (46), сходящиеся в этой точке, разделяют данную плоскость на области существования

фаз (например, агрегатных состояний вещества) и образуют *диаграмму состояния*. Отметим некоторые особенности: 1) кривая равновесия жидкой и газообразной фаз оканчивается в *критической точке*, в которой исчезает разница между этими состояниями вещества; 2) кривая равновесия твердой и газообразной фаз подходит к началу координат и 3) кривая равновесия твердой и жидкой фаз нигде не оканчивается, поскольку эти фазы имеют различную симметрию и это различие не может исчезнуть.

В заключение выведем дифференциальное уравнение кривой фазового перехода второго рода. Для этого разложим в ряд

$$\begin{aligned} [\mu] &= [(\frac{\partial \mu}{\partial p})_T] dp + [(\frac{\partial \mu}{\partial T})_p] dT + \frac{1}{2} [(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2})_T] (dp)^2 + \\ &+ [(\frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T})] dpdT + [(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2})_p] (dT)^2 = [\tilde{v}] dp + [\tilde{s}] dT + \\ &+ \frac{1}{2} [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p})_T] (dp)^2 + [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T})_p] dpdT - \frac{1}{2} \frac{[c_p]}{T} (dT)^2 = \\ &= \frac{1}{2} [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p})_T] (dp)^2 + [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T})_p] dpdT - \frac{1}{2} \frac{[c_p]}{T} (dT)^2. \end{aligned}$$

Вдоль кривой равновесия фаз  $[\mu] = 0$  и поэтому

$$[(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p})_T] (dp)^2 + 2[(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T})_p] dpdT - \frac{[c_p]}{T} (dT)^2 = 0.$$

Для того, чтобы значение  $dp/dT$  было единственным, дискриминант этого квадратного уравнения должен равняться нулю:

$$[c_p] [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial p})_T] + T [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T})_p]^2 = 0. \quad (47)$$

Тогда

$$\frac{dp}{dT} = \frac{[c_p]}{T} [(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial T})_p]^{-1}. \quad (48)$$

Искомые уравнения (47), (48) носят названия уравнений Эренфеста.

**Теория Ландау фазовых переходов второго рода**<sup>33</sup>. Осуществимость фазовых превращения первого рода не накладывает каких-либо ограничений на симметрию фаз, фазовых же превращения второго рода могут происходить только при повышении или понижении симметрии (это лишь необходимое условие). Такое скачкообразное изменение симметрии способно произойти при малых изменениях в системе. Например, упорядоченный сплав CuZn состоит из двух вложенных друг в друга простых кубических решеток, состоящих из атомов Cu и Zn. При повышении температуры до определенного значения вероятность нахождения чужих атомов в узлах кубической решетки сравнивается (появляется новый

<sup>33</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.

трансляционный период из вершины в центр ячейки) и решетка кристалла становится кубической объемноцентрированной. При таком деликатном переходе термодинамическое состояние системы не претерпевает какого-либо скачка. В аргументы термодинамического потенциала вводят *параметр порядка*  $\eta$ , определяя его таким образом, чтобы он равнялся нулю в более симметричной фазе, а в менее симметричной бы монотонно изменялся по мере разупорядочивания. Отметим, что симметрия повышается лишь в момент, когда  $\eta$  в точности обращается в ноль, любая сколь угодно малая его величина соответствует другой, меньшей симметрии. В отличие от других аргументов термодинамического потенциала  $(p, T)$  параметр порядка есть не контролируемая переменная. Непрерывное изменение состояния вблизи точки фазового перехода второго рода ведет к гладкости термодинамического потенциала по  $\eta$  в этой точке. Тогда в окрестности этой точки записываемо разложение, начинающееся с

$$\Phi(p, T, \eta) = \Phi_0(p, T) + \alpha\eta + \beta\eta^2 + \gamma\eta^3 + \delta\eta^4 + \dots, \quad (49)$$

где коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  зависят от давления и температуры. Переход устойчивого равновесного состояния  $\eta = 0$  в устойчивое равновесное состояние с  $\eta \neq 0$  описывается при  $\alpha \equiv 0, \gamma \equiv 0, \delta > 0$  в момент, когда  $\beta$  меняет знак с положительного на отрицательный (см. рис.), т.е. при

$$\Phi(p, T, \eta) = \Phi_0(p, T) + \beta\eta^2 + \delta\eta^4, \quad \beta = 0, \quad \delta > 0. \quad (50)$$

Вообще говоря, термодинамический потенциал строится как функция, инвариантная относительно преобразований группы симметрии среды, и к разложению (49) нужно еще прийти от более общего, построенного с помощью теории представлений групп. Здесь мы этим заниматься не будем, но укажем, что  $\alpha \equiv 0$  есть просто результат этой теории. А вот выполнимость требования  $\gamma \equiv 0$  из соображений симметрии не следует. Поэтому можно рассмотреть два случая: 1)  $\gamma \equiv 0$  и 2) этот коэффициент обращается в ноль одновременно с обращением в ноль коэффициента  $\beta$  в момент перехода. В первом случае условие  $\beta(p, T) = 0$  дает линию фазового перехода второго рода, во втором условия  $\beta(p, T) = 0, \gamma(p, T) = 0$  дают изолированную точку. В первом случае к линии фазового перехода второго рода может подходить линия фазового перехода первого рода, разделяющая фазы более низкой симметрии. Изолированная же точка фазового перехода второго рода лежит в месте пересечения линий фазовых переходов первого рода.

Покажем, что переход (50) сопровождается непрерывным изменением переменных состояния и скачкообразным изменением термодинамических коэффициентов. Нас интересуют лишь равновесные состояния:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 2\beta\eta + 4\delta\eta^3 = 0, \quad (51)$$

среди которых  $\eta = 0$  соответствует состоянию с более симметричной фазой, а  $\eta^2 = -\frac{1}{2}\beta / \delta$  — с менее симметричной. Исследование второй производной

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 2\beta + 12\delta\eta^2$$

приводит нас к выводу, что состояние с  $\eta = 0$  в момент перехода обменивается устойчивостью с  $\eta^2 = -\frac{1}{2}\beta / \delta$ . Действительно, при переходе в точке  $\eta = 0$  вторая производная вместе с  $\beta$  меняет свой знак с положительного на отрицательный, появляющаяся же равновесная точка  $\eta^2 = -\frac{1}{2}\beta / \delta$  имеет положительный знак второй производной. Переход сопровождается скачком  $\Phi''$  величиной  $-6\beta$  в устойчивом состоянии. Следует заметить, что в отличие от переходов первого рода никакими скачками состояния это не сопровождается, поскольку устойчивое состояние не “выстреливается”, а монотонно с изменением  $\eta$  и  $\beta$  отделяется от точки  $\eta = 0$ . Дифференцируя (50) с учетом (51) по температуре, получаем выражение для энтропии:

$$s = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = s_0 + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\beta^2}{\delta} = s_0 + \frac{1}{4} \frac{2\beta\beta'_T \delta - \delta'_T \beta^2}{\delta^2}, \quad s_0 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial T}. \quad (52)$$

Поскольку в момент перехода  $\beta = 0$ , а  $\delta > 0$ , скачка энтропии не происходит. Теплоемкость же смеет скачок

$$[c_p] = T_0 \frac{\partial [s]_{T_0}}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{(\frac{\partial \beta}{\partial T})^2 T_0}{2\delta_0}. \quad (53)$$

Аналогичные выводы можно сделать о характере изменения объема и сжимаемости. Скачок третьего термодинамического коэффициента можно определить с помощью формулы Эренфеста.

**Растворы и химические реакции.** Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  компонентов и  $r$  фаз. Условие химического равновесия записывается через химические потенциалы каждой компоненты в каждой фазе и включает  $n(r-1)$  уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= \mu_1^{(2)} = \dots = \mu_1^{(r)}, \\ \mu_2^{(1)} &= \mu_2^{(2)} = \dots = \mu_2^{(r)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mu_n^{(1)} &= \mu_n^{(2)} = \dots = \mu_n^{(r)}, \end{aligned} \quad (54)$$

означающих, что все фазы каждой компоненты должны находиться в равновесии. Даже не зная химических потенциалов отсюда можно сделать некоторые выводы. Подсчитаем число независимых переменных. Кроме  $p$  и  $T$ , имеется  $(n-1)r$  независимых концентраций компонент в фазах. В итоге число параметров, которые

можно свободно изменять, не нарушая равновесия, равно  $N \equiv 2 + (n-1)r - n(r-1) = 2 + n - r \geq 0$ , откуда

$$r \leq n + 2.$$

В этом неравенстве заключено *правило фаз Гиббса*, из которого, например, следует, что в однокомпонентной системе могут находиться в состоянии равновесия не более трех фаз. Если фаза одна,  $p$  и  $T$  могут быть заданы независимо, если фаз две, то  $p = p(T)$  (например, температура плавления есть функция только давления), если же фаз три, то значения давления и температуры соответствуют тройной точке.

Пусть в однородной термодинамической системе протекает химическая реакция, которую мы запишем в виде

$$\sum_i \chi_i A_i = 0, \quad (55)$$

где  $A_i$  — химические символы участвующих в реакции веществ, а  $\chi_i$  — стехиометрические коэффициенты, указывающие сколько молекул  $i$ -го вещества возникает ( $\chi_i > 0$ ) или исчезает ( $\chi_i < 0$ ) в результате одного акта реакции. Наряду с прямой в системе протекает и обратная химическая реакция. Пока не достигнуто равновесие, одна из этих реакций преобладает над другой. В состоянии термодинамического равновесия концентрации исходных и конечных продуктов становятся постоянными. Если реакция протекает при постоянных давлении и температуре, равновесие наступает при минимуме термодинамического потенциала

$$d\Phi = -s dT + v dp + \sum_i \mu_i dn_i,$$

т.е. при условии

$$\sum_i \mu_i dn_i = 0. \quad (56)$$

Число молей  $i$ -го вещества в химии выражают через число актов реакции  $dz$  как  $dn_i = \chi_i dz / N_A$  ( $\dot{z}$  есть скорость реакции), поэтому (56) принимает форму

$$\sum_i \chi_i \mu_i = 0, \quad (57)$$

совпадающую с формой (55) уравнения реакции, в котором символы химических веществ заменены их химическими потенциалами. Если в системе протекают несколько химических реакций, равновесие определяется рядом уравнений вида (57).

Рассмотрим для примера химическую реакцию в смеси совершенных газов. Для смеси совершенных газов

$$\begin{aligned}
\Phi &= U - Ts + pV, \\
U &= \sum_i n_i (c_{v_i} T + u_i), \\
s &= \sum_i n_i (c_{p_i} \ln T - R \ln p_i + s_{0i}), \\
pV &= \sum_i n_i RT,
\end{aligned} \tag{58}$$

где  $p_i = p c_i$  — парциальное давление газа, а  $c_i = n_i / \sum_i n_i$  — концентрация  $i$ -го газа,  $u_i$  — внутренняя энергия моля газа при  $T=0$  (химическая энергия, включающая энергию связи молекул и атомов газа),  $s_{0i}$  — постоянная энтропии. Отсюда

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = c_{v_i} T + u_i - c_{p_i} T \ln T + R T \ln p_i + s_{0i} T + RT = \\
&= R T \ln p_i + \vartheta_i(T).
\end{aligned} \tag{59}$$

Подставляя (59) в (57), получим

$$\sum_i \chi_i (R T \ln(c_i p) + \vartheta_i(T)) = 0,$$

откуда

$$\sum_i \chi_i \ln c_i = - \sum_i \chi_i \ln p - R^{-1} T^{-1} \sum_i \chi_i \vartheta_i(T)$$

и

$$\prod_i c_i^{\chi_i} = p^{-\sum_i \chi_i} \exp(-R^{-1} T^{-1} \sum_i \chi_i \vartheta_i(T)) \equiv K(p, T). \tag{60}$$

*Постоянная реакции  $K(p, T)$  зависит от давления, температуры и самой реакции. Формула (60) выражает закон действующих масс. Левая часть этой формулы представляет собой дробь, в числителе которой стоят концентрации возникающих, а в знаменателе — исчезающих веществ. Поэтому чем больше постоянная реакции, тем больше равновесие смещено в сторону конечных продуктов реакции и наоборот. Если  $\sum_i \chi_i > 0$  ( $< 0$ ), т.е. число молекул, а следовательно объем газа возрастает (убывает) и увеличение давления приводит к уменьшению (увеличению) постоянной реакции и выхода конечных продуктов. Можно показать, что  $\partial K(p, T) / \partial T \sim Q$  — тепло, выделяющееся или поглощаемое в ходе реакции. При  $Q > 0$  ( $< 0$ ) реакция эндотермическая (экзотермическая) и с ростом температуры постоянная реакции и выход конечных продуктов возрастают (убывают).*

**Термодинамика необратимых процессов** Как мы знаем, классическая термодинамика позволяет количественно изучать равновесные, обратимые процессы, а также судить о направлении необратимых процессов и получать вытекающие отсюда ограничения на определяющие уравнения. Для

количественного описания необратимых процессов — диффузии, теплопроводности, электрического тока, течения вязких и пластических сред, химических реакций, роста биологических популяций, — служит другая разновидность термодинамики — *термодинамика необратимых процессов*<sup>34</sup>. Неравновесные процессы можно изучать с помощью систем с однородно или неоднородно распределенными по пространству параметрами. В качестве первых используют два сосуда, соединенных капилляром или мембраной так, чтобы в каждом из сосудов было равновесие, но в системе происходил необратимый процесс (примером может служить процесс Джоуля — Томсона). Здесь же будут рассматриваться вторые, континуальные системы.

Грубо говоря, термодинамика необратимых процессов базируется на двух основаниях — существовании (локальных) термодинамических функций для неравновесных процессов (в сплошных средах) и соотношения взаимности Онзагера. Оба основания обосновываются методами статистической физики.

Указанные термодинамические функции позволяют установить понятия потока и производства энтропии и получить балансовое уравнение для нее. Их существование опирается на *принцип локального равновесия*, означающий возможность выделения в континуальной системе малого объема, находящегося в термодинамическом равновесии с окружением. Для такого объема очевидно существуют термодинамические функции. Для обоснования принципа локального равновесия И.Р. Пригожин построил функцию распределения скоростей частиц газа Чэпмена - Энскога в виде ряда, первый член которого представляет собой Максвелл - Больцмановское распределение, соответствующее термостатическому состоянию системы (энтропия не возникает), а использование двух первых членов ряда приводит к допустимости введения термодинамических функций в малом и производству энтропии. Если состояние системы далеко от термостатического равновесия, ряд медленно сходится и макроскопическое (т.е. термодинамическое) описание системы делается невозможным. Такими расчетами могут быть получены количественные пределы применимости термодинамики необратимых процессов.

Гипотеза локального равновесия применялась еще У. Томсоном в 1854 году при изучении необратимых явлений в термоэлектричестве. В изучаемом процессе, происходящем в локальном объеме тела, выделяются обратимая и необратимая части. Обратимая часть описывается классической термодинамикой, т.е. параметрами и функциями состояния и вторым началом термодинамики в форме равенства. Пишутся локальные законы сохранения массы, количества движения и энергии, с использованием которых комбинируется локальное уравнение баланса энтропии, в котором выделяется поток и источник. Источник отвечает за производство энтропии в локальном объеме среды в процессе установления термодинамического равновесия в теле, при этом требование положительности такого производства энтропии есть результат известной в теоретической физике *H*-

---

<sup>34</sup> Де Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956. 280 с.

теоремы Больцмана. Здесь нет необходимости сопровождать эту процедуру примерами, поскольку ниже они будут подробно рассмотрены.

Изложенный метод применения принципа локального равновесия для установления уравнения баланса энтропии и последующего получения ограничений на кинетические законы диссипативных процессов, однако, не имеет теоретического обоснования. Успех его зависит от удачной разбивки процесса на обратимую и необратимую части и от самой возможности такой разбивки, ведь она по сути означает, что связи между термодинамическими параметрами не зависят от наличия необратимых процессов.

В результате применения принципа локального равновесия мы получаем выражение для локального производства энтропии вблизи состояния термодинамического равновесия. Для простоты рассмотрим замкнутый локальный объем среды, поток энтропии в который или из которого таким образом оказывается исключенным и остается только массовый источник энтропии. В состоянии равновесия энтропия имеет максимальное значение. Если малые отклонения термодинамических координат от равновесных значений обозначить как  $\alpha_j$ , то для неравновесного состояния это позволяет записать изменение энтропии от ее максимального значения в первом приближении как

$$\Delta s = -\frac{1}{2} g_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad (61)$$

где матрица  $g_{ij}$  неотрицательно определена. Для необратимого явления величины

$$j_i \equiv \dot{\alpha}_i, \quad (62)$$

называемые *термодинамическими потоками*, ненулевые. Эти потоки вызываются некоторыми причинами, называемыми *термодинамическими силами*. В роли последних выступают локальные градиенты термодинамических параметров, напряжения или разности потенциалов или сил в точке, химическое сродство. Например, в явлении диффузии поток массы вызывается градиентом концентрации, в теплопроводности тепловой поток — градиентом температуры, в химии поток компонента — градиентом химического потенциала или химическим сродством, в электричестве поток электрического заряда — разностью потенциала, в вязком или пластическом течении скорость деформации — напряжением и т.д. В отличие от консервативных термодинамических сил, введенных в классической термодинамике, данные силы определяют диссипативные процессы. Определяются они следующим образом:

$$x_i \equiv \frac{\partial \Delta s}{\partial \alpha_i} = -g_{ij} \alpha_j. \quad (63)$$

Тогда производство энтропии записывается в виде

$$\chi_s \equiv \Delta \dot{s} = x_i j_i. \quad (64)$$

Переменные  $\alpha_j$  и  $x_j$  с одинаковым индексом называют *термодинамически сопряженными*.

Более справедливо было бы рассматривать нелинейные соотношения между термодинамическими силами и потоками, но ограничиваются обычно линейными:

$$j_i = L_{ij} x_j. \quad (65)$$

В этом случае Л. Онзагером (1931) доказана симметрия матрицы кинетических коэффициентов  $L_{ij}$  (*соотношения взаимности Онзагера*):

$$L_{ji} = L_{ij}. \quad (66)$$

Поскольку недиагональные компоненты этой матрицы отвечают за перекрестные эффекты, тем самым установлен замечательный экспериментально подтверждаемый физический факт о связи различных эффектов. Соотношения взаимности Онзагера логически и количественно связывают, например, эффект Соре (градиент температуры вызывает массоперенос) и эффект Дюфора (градиент концентрации вызывает тепловой поток).

Вообще, выделение в выражении производства энтропии термодинамических потоков и сил неоднозначно; оно может быть осуществлено с точностью до линейного обратимого преобразования. Тем не менее, легко показать, что требованию симметрии будет удовлетворять любая матрица кинетических коэффициентов. Действительно, пусть

$$j' = b \cdot j,$$

тогда из требования

$$\sigma = j \cdot x = j' \cdot x'$$

следует

$$x' = b^{-T} \cdot x.$$

Отсюда и из

$$j = L \cdot x$$

получаем

$$L' = b \cdot L \cdot b^T$$

и затем с использованием соотношений взаимности Онзагера  $L^T = L$

$$L'^T = b \cdot L^T \cdot b^T = b \cdot L \cdot b^T = L'.$$

Доказательство соотношений взаимности Онзагера базируется на статистическом рассмотрении микропараметров системы вблизи состояния термодинамического равновесия (флуктуаций), микроскопической обратимости и гипотезе о том, что затухание флуктуаций подчиняется макрофеноменологическому закону (65).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных термодинамических систем, подведем итог. Термодинамика необратимых процессов основывается на следующих постулатах, имеющих статистико-физическое обоснование:

- а) принципе локального равновесия;
- б) положительности производства энтропии;

в) феноменологических линейных кинетических соотношений, связывающих термодинамические потоки и силы;

г) симметрии матрицы кинетических коэффициентов.

Процедура термодинамического рассмотрения системы состоит в последовательном использовании перечисленных постулатов. Первый в сочетании с законами сохранения дает балансовое уравнение энтропии, остальные накладывают ограничения на определяющие соотношения. Успех построения определяющих соотношений связывается с удачным разделением локального процесса на обратимую и необратимую части, что эквивалентно выбору переменных состояния в п. (а).

Выше первое начало термодинамики (“принцип энергии”) было сформулировано для равновесных обратимых процессов в газах. Переформулируем сейчас его для произвольных процессов в произвольных системах:

$$W = \dot{U} + Q, \quad (67)$$

где  $W$  — мощность внутренних сил,  $U$  — внутренняя энергия — функция состояния системы,  $Q$  — приток тепла извне. Для континуума данные величины записываются через локальные плотности:  $W = \int_{\hat{V}} w d\hat{V}$ ,  $U = \int_{\hat{V}} \hat{\rho} u d\hat{V}$ ,

$$Q = - \int_{\hat{S}} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \chi_q d\hat{V},$$

где  $\mathbf{J}$  обозначает кондуктивный поток величины

через поверхность внутрь тела,  $\chi$  — массовая плотность поступающей извне величины.

Выражение для  $w$  выводится для любого континуума из механических уравнений — баланса количества и момента количества движения (т.н. “теорема живых сил”). Для классического континуума  $w = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$  и называется мощностью напряжений. Для него (67) в локальной форме принимает вид

$$\hat{\rho} \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q + \hat{\rho} \chi_q. \quad (68)$$

Нетрудно показать, что в идеальных жидкости или газе  $w = \frac{1}{\rho^2} p \dot{\rho}$ , а в идеальных

многокомпонентных жидкости или газе  $w = \frac{1}{\hat{\rho}^2} p \dot{\hat{\rho}} + \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{J}_i$ , где  $\mathbf{J}_i = \hat{\rho}_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$ ,

$$\mathbf{v} = \hat{\rho}^{-1} \sum_i \hat{\rho}_i \mathbf{v}_i, \quad \hat{\rho} = \sum_i \hat{\rho}_i, \quad \hat{\rho}_i — \text{текущая плотность массы } i\text{-го компонента.}$$

Например, электрическое поле действует на различные компоненты электролита или магнитное поле — на частицы ферромагнетика в тяжелой жидкости. Читателю полезно получить эти результаты (для получения второй массовой силы в балансовом уравнении количества движения необходимо положить равной  $\sum_i \hat{\rho}_i \mathbf{f}_i$ ,

а работу массовых сил в балансовом уравнении энергии —  $\sum_i \hat{\rho}_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i$ ). Ранее мы

находили выражения для мощности внутренних сил в континууме Коссера, двойном и многокомпонентном континуумах.

Вместо выбора локальных переменных состояния — аргументов внутренней энергии и записи второго начала термодинамики в форме равенства обычно используют т.н. *уравнение Гиббса*, называемое также *фундаментальным термодинамическим тождеством*. Например, для смеси идеальных жидкостей или газов оно имеет вид:

$$Ts = \dot{u} + \frac{1}{\hat{\rho}^2} p \dot{\hat{\rho}} - \mu_i \dot{c}_i, \quad (69)$$

$c_i = \hat{\rho}^{-1} \hat{\rho}_i$  — *концентрация*  $i$ -го компонента. Это уравнение эквивалентно выбору локальных переменных состояния — аргументов внутренней энергии. Например, для смеси идеальных жидкостей или газов внутренняя энергия очевидно зависит от плотности, энтропии и концентрации компонентов:  $u = u(\hat{\rho}, s, c_i)$ . Отсюда

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial s} \dot{s} + \frac{\partial u}{\partial \hat{\rho}} \dot{\hat{\rho}} + \frac{\partial u}{\partial c_i} \dot{c}_i.$$

Интегрирующие множители этом в выражении мы обозначаем

$$\frac{\partial u}{\partial s} \equiv T, \quad \frac{\partial u}{\partial c_i} \equiv \mu_i$$

и называем соответственно *абсолютной температурой* и *химическим потенциалом*, а

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{\rho}} = -\frac{p}{\hat{\rho}^2}$$

есть просто результат, получаемый методами механики сплошной среды. В результате мы и получаем (69). Это уравнение годится для случаев химически реагирующих и не реагирующих компонент в закрытой либо открытой (т.е. с неизменной или переменной массой) термодинамической системе (в качестве которой у нас выступает элементарный объем идеального газа или жидкости).

Второй закон термодинамики для необратимого процесса записывается в виде

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_i S \geq 0,$$

где  $d_e S$  и  $d_i S$  — не дифференциалы, а соответственно приток энтропии извне за счет обмена системой массой или теплом и производство энтропии внутри самой системы в ходе необратимого процесса установления в ней равновесия (равенство имеет место только для обратимого процесса). Если массообмена системой с ее окружением нет, то

$$d_e S = - \int_{\hat{S}} \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} \frac{1}{T} \hat{\rho} \chi_q d\hat{V}$$

и второй закон термодинамики принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} s d\hat{V} = - \int_{\hat{S}} \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} \frac{1}{T} \hat{\rho} \chi_q d\hat{V} + \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \frac{d_i s}{dt} d\hat{V}, \quad \theta \equiv \frac{d_i s}{dt} \geq 0$$

или в локальной форме

$$\dot{s} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \frac{J_q}{T} + \frac{1}{T} \hat{\rho} \chi_q + \theta, \quad \theta \geq 0,$$

где  $\theta$  есть скорость производства энтропии. Объединяя его с законом сохранения энергии (68), получаем *неравенство Клаузиуса - Дюгема*:

$$\dot{u} - \hat{\rho}^{-1} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - T\dot{s} + \hat{\rho}^{-1} T^{-1} \mathbf{J}_q \cdot \hat{\nabla} T \leq 0.$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера недеформируемое теплопроводное тело. Для него закон сохранения энергии (68) в отсутствии излучения очевидно записывается в виде

$$\hat{\rho} \dot{u} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q,$$

а уравнение Гиббса (69) —

$$T\dot{s} = \dot{u}.$$

Из этих двух уравнений и тождества

$$\nabla \cdot (T^{-1} \mathbf{J}_q) = T^{-1} \nabla \cdot \mathbf{J}_q + T^{-2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T$$

получаем балансовое уравнение энтропии

$$\hat{\rho} \dot{s} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_s + \chi_s, \tag{70}$$

$$\mathbf{J}_s = T^{-1} \mathbf{J}_q,$$

$$\chi_s = -T^{-2} \mathbf{J}_q \cdot \hat{\nabla} T > 0.$$

В линейном случае термодинамика допускает связь

$$\mathbf{J}_q \sim -\hat{\nabla} T,$$

которой удовлетворяет закон Фурье:

$$\mathbf{J}_q = -k \hat{\nabla} T,$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности.

Для вязких теплопроводных жидкости или газа будем иметь

$$\hat{\rho} \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q,$$

$$T\dot{s} = \dot{u},$$

откуда в балансовом уравнении энтропии

$$\mathbf{J}_s = T^{-1} \mathbf{J}_q,$$

$$\chi_s = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - T^{-2} \mathbf{J}_q \cdot \hat{\nabla} T > 0.$$

Рассматривая независимо ситуации с однородным полем температуры и отсутствующими напряжениями, получаем в рамках линейности то же ограничение на связь потока тепла и градиента температуры и ограничение на тензор четвертого ранга вязких свойств  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma},$$

обязанный быть положительно определенным. Заметим, что в данном случае в качестве одного из потоков фигурирует скорость вязких деформаций  $\mathbf{D}$ , не

связанная, как  $\mathbf{J}_q$ , с переносом какой-либо субстанции. Соотношения взаимности Онзагера в данном случае не накладывают ограничений на связи  $\boldsymbol{\sigma}$  с  $\mathbf{D}$  и  $\hat{\nabla}T$  с  $\mathbf{J}_q$  по причине их различного тензорного ранга, что есть следствие *принципа Кюри*. В силу этого принципа в рамках принятой модели перекрестных эффектов вообще не должно наблюдаться.

Пусть теперь мы имеем теплопроводную недеформируемую среду, в которой может диффундировать некая примесь. Тогда

$$\begin{aligned}\rho \dot{u} &= -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q, \\ Ts &= \dot{u} - \mu \dot{c}.\end{aligned}$$

уравнений неразрывности

$$\dot{c} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_c,$$

где  $\mathbf{J}_c = c\mathbf{v}$  — поток примеси. Последние три уравнения приводятся к виду (70) с

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_s &= \frac{1}{T}(\mathbf{J}_q - \rho\mu\mathbf{J}_c), \\ \chi_s &= -T^{-2}\mathbf{J}_q \cdot \hat{\nabla}T - \rho\mathbf{J}_c \cdot \hat{\nabla}\left(\frac{\mu}{T}\right) > 0.\end{aligned}$$

Рассматривая независимо ситуации с однородными полями температуры и концентрации примеси, получаем в линейном и изотропном случае

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_q &= -\frac{k}{T^2}\nabla T + \alpha\rho\nabla\frac{\mu}{T}, \\ \mathbf{J}_c &= \frac{\gamma}{T^2}\nabla T - \beta\rho\nabla\frac{\mu}{T},\end{aligned}$$

где  $k > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha\gamma < k\beta$ . Соотношения взаимности Онзагера дополнительно требуют, чтобы  $\alpha = \gamma$ .

Рассмотрим далее твердое теплопроводное многокомпонентное тело, способное испытывать упругие и какие-либо неупругие деформации. В этом случае вместо (69) в случае малых упругих деформаций, описываемых тензором  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , очевидно мы должны написать

$$Ts = \dot{u} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mu_i\dot{c}_i.$$

Например, для упругого металлического кристалла, содержащего вакансии, внутренняя энергия есть функция переменных состояния упругой деформации, энтропии и концентрации вакансий:  $u = u(\boldsymbol{\varepsilon}^e, s, c)$ , откуда

$$Ts = \dot{u} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mu\dot{c}, \quad (72)$$

где  $\mu$  — химический потенциал вакансий. Первое начало термодинамики (69) в отсутствии излучения принимает вид

$$\hat{\rho}\dot{u} = \boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} - \hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q. \quad (73)$$

Из закона сохранения массы можно получить уравнение неразрывности для  $c$ :

$$\rho \dot{c} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_c, \quad (74)$$

где  $\mathbf{J}_c = \hat{\rho}c(\mathbf{v}_c - \mathbf{v})$  — (кондуктивный) поток вакансий. Последние три уравнения дают

$$\rho \dot{s} = -\frac{1}{T} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \mu \hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_c + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v, \quad (75)$$

где  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v = \mathbf{D} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$  — скорости неупругих (вязких) деформаций, вызванных диффузией вакансий — необратимым процессом. Примем еще одну упрощающую гипотезу — о локальной однородности поля температуры, с помощью которой внесем  $T^{-1}$  под знак операторов дивергенции в (75). Используя тождество

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{J}_c) = \mathbf{J}_c \cdot \nabla \mu + \mu \nabla \cdot \mathbf{J}_c,$$

из (75) тогда получаем

$$\rho \dot{s} = -\hat{\nabla} \cdot \mathbf{J}_s + \chi_s, \quad (76)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} (\mathbf{J}_q - \mu \mathbf{J}_c), \quad (77)$$

$$T \chi_s = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v - \mathbf{J}_c \cdot \hat{\nabla} \mu. \quad (78)$$

Уравнение (76) имеет стандартный вид для уравнения баланса. Используя теперь неотрицательность производства энтропии (78), можно получить термодинамические ограничения на диссипативные определяющие уравнения, связывающие  $\boldsymbol{\sigma}$  с  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v$  и  $\hat{\nabla} \mu$  с  $\mathbf{J}_c$ . Рассматривая процесс с  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  (нагружение мгновенно снимается, при этом химический потенциал кристалла мгновенно измениться не может по причине диффузионности, медленности выравнивания плотности вакансий в разных его частях), получаем, что в простейшем линейном случае связь  $\hat{\nabla} \mu$  с  $\mathbf{J}_c$  должна быть

$$\mathbf{J}_c = -D \nabla \mu, \quad D > 0.$$

При однородном распределении вакансий в кристалле аналогичным образом получаем

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^v = \mathbf{A} : \boldsymbol{\sigma},$$

с положительно определенным  $\mathbf{A}$ .

Рассмотрим многокомпонентную среду, в которой происходит химическая реакция. Для простоты деформируемостью ее пренебрежем. Уравнение закона сохранения массы для каждого компонента имеет вид

$$\rho \dot{c}_i = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i + \nu_i J_c, \quad (80)$$

где

$$\mathbf{J}_i \equiv \rho c_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}),$$

$$\nu_i J_c \equiv \rho \dot{c}_i, \quad (81)$$

а величина  $\nu_i$ , деленная на молекулярный вес  $m_i$   $i$ -го компонента, пропорциональна стехиометрическому коэффициенту  $\chi_i$ , с которым этот

компонент входит в уравнение реакции (для коэффициентов в правой части берется знак плюс, а в левой — минус), т.е.

$$v_i = \alpha \chi_i m_i, \quad (82)$$

где  $\alpha$  — некоторый коэффициент пропорциональности.

$J_c$  называется *скоростью реакции*. Закон сохранения массы влечет

$$\sum_i v_i = 0. \quad (83)$$

Например, для спонтанно происходящей диссипативной химической реакции



пусть  $m_1, m_2, m_3$  — молекулярные массы соответственно  $\text{H}_2, \text{O}_2, \text{H}_2\text{O}$ , а  $\chi_1 = -2, \chi_2 = -1, \chi_3 = 2$  — их стехиометрические коэффициенты в данной реакции. Тогда  $v_1 = -2m_1, v_2 = -m_2, v_3 = 2m_3$ . Из (84) следует

$$-2m_1 - m_2 + 2m_3 = 0, \quad (85)$$

т.е. закон (83). Если в реакции участвуют  $d\xi$  моль/литр веществ, то очевидно

$$v_i d\xi = dp_i. \quad (86)$$

Скорость реакции  $J_c$ , измеряемая в моль/(литр×с), определяется как

$$d\xi = J_c dt. \quad (87)$$

Уравнения энергии и Гиббса принимают вид

$$\dot{u} = 0,$$

$$T\dot{s} = \dot{u} - \mu_i \dot{c}_i,$$

откуда с использованием ( )

$$J_s = -\frac{1}{T} \mu_i J_i,$$

$$T\chi_s = -J_i \cdot \nabla \mu_i + AJ_c > 0, \quad (88)$$

где  $A = -\mu_i v_i$  — введенная де Донде (1927) термодинамическая сила, называемая *химическим средством*. Этой термодинамической силе сопряжена скорость реакции, являющаяся потоком в пространстве концентраций. Для спонтанности реакции химическое средство очевидно должно быть положительным. Пространственным потокам концентраций реагирующих компонент сопряжены градиенты их химических потенциалов. Из (88) обычным методом получаем ограничения на линейные изотропные соотношения

$$J_i = -L_{ij} \nabla \mu_j,$$

$$J_c = \lambda A,$$

выражающиеся в положительной определенности матрицы  $L_{ij}$  и положительности  $\lambda$ . Соотношения Онзагера сводятся к требованию симметрии  $L_{ij}$ .

Рассматриваемые до сих пор системы являлись закрытыми (не обменивались с окружением массой). В открытых системах по отношению к аналогичным

закрытым производством энтропии не изменяется, появляется только дополнительная составляющая потока энтропии за счет потока массы (конечно, являющегося внешним). Кроме того, меняется смысл  $d\xi$ , перестающей быть полным дифференциалом. В системах, обменивающихся с окружением теплом и массой, возможно течение реакций в противоположном направлении. Рассмотрение же замкнутых систем ужесточает условия и используется для получения ограничений на кинетические определяющие уравнения, вообще говоря, не зависящие от рассматриваемого процесса.

Таким же способом можно рассматривать диссипативные процессы в обобщенных континуумах и средах с внутренними параметрами, характеризующими распределение дефектов, от которых существенно зависит внутренняя энергия.

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

Предмет статистической физики составляет описание равновесного состояния макроскопической системы, обусловленное тем, что она состоит из большого числа микроскопических частиц. Хотя движение частиц этой системы и описывается уравнениями механики, ее макроскопическое поведение приобретает новые, статистические, свойства. Например, после заполнения сосуда газом в нем необратимо устанавливается состояние равновесия, несмотря на то, что уравнения механики обратимы. Дело здесь в том, что на первый план начинают выступать статистические свойства системы, т.е. микросостояния, в которых система проводит наибольшее время в течении длительного наблюдения за ней. Со статистической точки зрения равновесное состояние есть наиболее вероятное состояние, в котором система проводит наибольшее время. Состояния, сильно отличающиеся от наиболее вероятного, время от времени реализуются, но система проводит в них исключительно малую долю времени. Говоря о макроскопических свойствах системы, мы усредняем ее микросостояния по времени, отсюда и появляются свойства, прямо не вытекающие из уравнений движения частиц. Итак, перед нами возникает задача отыскания плотности распределения микросостояний системы.

**Системы невзаимодействующих частиц — метод Больцмана.** Прежде чем заниматься произвольными системами, рассмотрим простейшую — систему невзаимодействующих частиц, называемую идеальным газом. Если в качестве частиц берутся материальные точки, то состояние каждой из них характеризуется тремя координатами и тремя импульсами или точкой в шестимерном фазовом пространстве. Поскольку взаимодействие между частицами отсутствует, состояние всей системы  $N$  частиц может быть представлено в этом пространстве, называемом  $\mu$ -пространством<sup>35</sup>. В более общем случае размерность  $\mu$ -пространства равна  $2n$ , где  $n$  — число степеней свободы частицы. Если данное пространство разбить на одинаковые ячейки, то при отсутствии ограничений нахождение частицы в любой ячейке считается имеющим одинаковую вероятность. Этот принцип, выдвинутый Л. Больцманом, позволяет свести задачу к задаче теории вероятностей подсчета числа состояний, соответствующих некоторому произвольному распределению частиц по ячейкам, причем события нахождения частиц в ячейках считаются независимыми. Необходимо найти распределение частиц по ячейкам в  $\mu$ -пространстве, реализуемое наибольшим числом способов. Именно это распределение и будет наиболее ожидаемым во временном ряде всевозможных состояний системы или, при макроскопическом восприятии системы, соответствующим ее равновесному состоянию. Если символом  $W$  обозначить число состояний системы, соответствующих некоторому распределению (эта величина называется *вероятностью состояния*, но к единице не нормируется), то

<sup>35</sup> Название предложено П.С. Эренфестом.

сформулированная задача сводится к поиску максимального  $W$  по всевозможным допустимым распределениям. Поскольку при стремлении системы к равновесию одна из ее макроскопических характеристик — энтропия — также стремится к максимуму, Больцман предложил считать, что энтропия системы  $S$  связана с вероятностью состояния  $W$ . Учитывая, что энтропия аддитивна по подсистемам, а вероятность состояния — мультипликативна (подсистемы статистически независимы),

$$S = k \ln W. \quad (1)$$

Данное уравнение, выражающее принцип Больцмана, впервые записал М. Планк. Константа  $k$  называется постоянной Больцмана. Здесь необходимо сделать некоторые комментарии. Посылка о невзаимодействии частиц, позволившая нам просто считать вероятности состояний, находится в противоречии с рассматриваемым нами процессом установления равновесия, ибо для этого частицам взаимодействовать просто необходимо. Принцип, однако, имеет смысл, если взаимодействие исчезающе слабое, ведь даже в таком случае равновесие когда-нибудь установится.

Для нахождения статистического распределения введем переменные  $n_i$  — числа частиц в  $i$ -й ячейке. Число частиц системы будем считать фиксированным

$$\sum_i n_i = N \quad (2)$$

(а систему тем самым закрытой). Число всевозможных распределений частиц по ячейкам

$$W = \frac{N!}{\prod_i n_i!}.$$

Полагая, что и  $N$ , и  $n_i$  — числа большие, будем пользоваться формулой Стирлинга

$$\ln N! \approx N(\ln N - 1).$$

Применяя ее к  $W$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{S}{k} = \ln W &= \ln N! - \sum_i \ln n_i! \approx N(\ln N - 1) - \sum_i n_i \ln n_i + \sum_i n_i = \\ &= -\sum_i n_i \ln n_i + N \ln N = -N \sum_i \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} + \text{const}(N). \end{aligned} \quad (3)$$

Следует отыскать распределение  $n_i$ , встречающееся чаще всего и соответствующее максимуму функции (3) при ограничении на число частиц (2) и на энергию системы

$$\sum_i n_i \varepsilon_i = E, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_i$  — энергия частицы, находящейся в  $i$ -й ячейке. Вместо замкнутости системы можно рассмотреть иное ограничение, но какое-то ограничение добавить

необходимо, ибо без него очевидное решение задачи  $n_i = 1$  будет соответствовать неинтересным и нереальным условиям. Решением задачи

$$-N \sum_i \frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \rightarrow \max$$

$$\sum_i n_i = N,$$

$$\sum_i n_i \varepsilon_i = E$$

будет

$$n_i = \exp(-\alpha - \beta \varepsilon_i) \quad (5)$$

(константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из ограничений), при котором значение функции равно

$$MnN + \alpha N + \beta E$$

и, следовательно, энтропия равновесного состояния —

$$S = k(MnN + \alpha N + \beta E). \quad (6)$$

С помощью (5)

$$N = \sum_i n_i = e^{-\alpha} Z = \text{const}, \quad (7)$$

где

$$Z = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (8)$$

— статистическая сумма. Из (7)

$$\alpha = \ln \frac{Z}{N} \quad (9)$$

и поэтому (6) приобретает вид

$$S = k(MnZ + \beta E), \quad (10)$$

(5) превращается в

$$n_i = \exp(-\alpha) \exp(-\beta \varepsilon_i) = -\frac{N}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_i}, \quad (11)$$

а (4) — в

$$E = \exp(-\alpha) \sum_i \varepsilon_i \exp(-\beta \varepsilon_i) = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (12)$$

Пусть  $N = \text{const}$ , а  $E$  квазистатически меняется, тогда из (10) и (12)

$$dS = k\beta dE. \quad (13)$$

В изохорическом процессе и в отсутствие действия на систему внешних полей основное термодинамическое тождество имеет вид

$$dS = T^{-1} dE,$$

откуда сравнением с (13) получаем

$$\beta = (kT)^{-1}. \quad (14)$$

При выводе соотношений мы полагали, что в каждой ячейке находится большое число частиц. Как показывает опыт, это предположение недопустимо. Однако мы можем объединить ячейки так, чтобы в объединенных ячейках находилось достаточно большое число частиц. Как показывает расчет, основные результаты при этом не изменяются. Однако этот прием в принципе показывает путь, следуя которому могут быть рассмотрены системы, далекие от идеального газа. Действительно, мы можем допустить взаимодействие частиц в ячейке, главное, чтобы взаимодействие подсистем, находящихся в граничащих ячейках оставалось сравнительно слабым. Эту идею, проливающую новый свет на метод Больцмана, в достаточно общей постановке развил Дж. В. Гиббс в 1902 г.

**Системы взаимодействующих частиц — метод Гиббса.** Изложим более строго принимаемые гипотезы. Изучается *гамильтонова* система большого числа  $N$  частиц, мгновенное состояние каждой из которых характеризуется парой  $n$ -мерных векторов обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных импульсов  $p_i$ , а стало быть мгновенное состояние всей системы — множествами  $q \equiv (q_1, \dots, q_N)$  и  $p \equiv (p_1, \dots, p_N)$ . Частицы системы в зависимости от их природы могут иметь поступательные, вращательные и другие степени свободы и соответствующие обобщенные координаты и импульсы. Движение системы описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i}, \quad (15)$$

где полная энергия (гамильтониан) системы  $E$  учитывает суммарную кинетическую энергию частиц системы и потенциальную энергию, в общем зависящую от конфигурации частиц и внешнего поля  $\lambda$ :

$$E = \sum_i K(q_i, p_i) + U(q, \lambda).$$

В частном случае *идеального газа* потенциальная энергия представляется в виде  $U = \sum_i U(q_i, \lambda)$ , в этом случае, как видно, частицы не взаимодействуют между собой, а энергия может быть представлена суммой энергий отдельных частиц. Рассматриваемая система считается *консервативной*, т.е. коэффициенты ее гамильтониана — не зависящими явно от времени:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

или  $E = E(p, q, \lambda)$ . Если внешнее воздействие постоянно во времени  $\lambda(t) \equiv \lambda$ , то из (15) и (16) следует

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (17)$$

т.е.  $E$  есть интеграл движения системы ( $g(q, p)$  — интеграл движения системы, если  $\frac{dg}{dt} = 0$ ). Для упрощения обозначения “спрячем” аргумент  $\lambda$  функции  $E$  до тех пор, пока с ним ни придется считаться. Пусть для определенности система находится внутри некоторого сосуда с неподвижными стенками.

Мы ограничимся рассмотрением систем, для которых полная энергия  $E$  аддитивна относительно разбиения их на части, т.е. энергией взаимодействия частей можно пренебречь. Эта гипотеза физически может соответствовать ситуации слабого взаимодействия частиц с малым радиусом их взаимодействия по отношению к среднему расстоянию между ними. В таком почти идеальном газе допускается разбиение системы на достаточно мелкие подсистемы, в пределе идеального газа — вплоть до отдельных частиц. При существенном взаимодействии подсистемы, конечно, должны быть достаточно большими. С точки зрения статистики принимаемая гипотеза означает весьма слабую статистическую зависимость подсистем, пренебрегаемую в наших расчетах. Эта слабая связь тем не менее и приводит к установлению с течением времени равновесного распределения. Например, в идеальном газе это время от времени происходящие столкновения частиц, не учитываемые в выражении энергии.

Мы будем рассматривать систему, находящуюся в состоянии равновесия с окружением в некотором смысле. Для идеального газа состояние системы определяется состояниями всех частиц, взятых по отдельности, и поэтому оно может быть изображено в  $2n$ -мерном фазовом  $\mu$ -пространстве. Для системы, далекой от идеального газа, тем не менее можно рассматривать идеальный газ достаточно представительных подсистем, чтобы энергией их взаимодействия в сравнении с энергиями самих подсистем можно было пренебречь, как и их статистической зависимостью. Фазовое пространство, в котором будут представлены состояния квазичастиц-подсистем для изучения статистических свойств системы методом Больцмана, конечно будет иметь расширенную размерность, равную  $2nm$ , где  $m$  — число частиц подсистем. В наиболее общем случае размерность фазового пространства будет равняться  $2nN$ . Такое пространство мы будем называть  $\Gamma$ -пространством<sup>36</sup>.

Итак, рассматривается фазовое  $\Gamma$ -пространство  $(q, p)$ , в котором состояния системы изображаются точками. При движении системы ее траектория за достаточно длительный период времени многократно пройдет через любой произвольно расположенный в фазовом пространстве элементарный объем, так что можно говорить о суммарном времени нахождения системы в этом объеме и о распределении этой величины в фазовом пространстве. Это распределение мы будем представлять континуальной плотностью статистического распределения

<sup>36</sup> Название предложено Эренфестом.

состояний системы  $f(q, p)$ . В этом обозначении уже учтено, что рассматривается распределение в состоянии равновесия

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Для определения  $f(q, p)$  Гиббс предложил считать множество состояний, через которые проходит в ходе своей эволюции изучаемая система, сплошной средой, движущейся в фазовом пространстве в соответствии с уравнениями (15). Этих уравнений столько, сколько координат у фазового пространства, а вот начальных условий рассматривается континуум. Таким образом мы переходим к изучению движения континуума невзаимодействующих экземпляров исходной системы, распределенных в фазовом пространстве с некоторой искомой нами плотностью  $f(q, p)$ , считая распределение по времени эквивалентным распределению по реализациям (*гипотеза эргодичности*). Данное множество экземпляров системы называют *каноническим ансамблем Гиббса*. В силу (15) континуум этот несжимаем:

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \quad (19)$$

(суммировать по  $i=1, \dots, N$ ). Условие, налагаемое на функцию плотности статистического распределения

$$\int f(q, p) dq dp = 1 \quad (20)$$

дает нам уравнение неразрывности континуума

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i} (f \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i} (f \dot{p}_i) = 0 \quad (21)$$

(условие сохранения количества элементов канонического ансамбля Гиббса). Из (18), (19) и (21) следует

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0, \quad (22)$$

откуда еще раз с применением (18) получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0, \quad (23)$$

Интерпретировать этот результат можно следующим образом: если точки, изображающие состояния экземпляров канонического ансамбля Гиббса, однородно распределить в  $\Gamma$ -пространстве, то они будут двигаться как однородная несжимаемая жидкость. В этом случае два произвольных элемента в  $\Gamma$ -пространстве, имеющие равный объем в некоторый момент времени, будут иметь равную плотность  $f$  в любой момент времени. Важно, что это обобщение принципа Больцмана о равновероятности состояний, изображаемых элементами равного объема в фазовом пространстве, совместимо с уравнениями механики.

С другой стороны равенство (23) означает, что  $f$  есть интеграл движения системы. Поскольку мы хотим решить вопрос в общем, а не частном, случае,  $f$  должна зависеть от таких функций  $p, q$ , которые сами являются интегралами ее движения, просто иначе (23) не выполнится. У рассматриваемой системы существует  $2nN-1$  интегралов движения. Однако оказывается возможным чрезвычайно сузить число тех из них, которые могут выступать аргументами функции  $f$ . Учтем, что при в силу ранее принятой гипотезы при разделении рассматриваемой системы частиц в сосуде на некоторые достаточно представительные подсистемы распределение состояний любой такой части в прежнем резервуаре не изменится, т.е. имеет место статистическая независимость этих распределений, влекущая умножение вероятностей

$$f(q, p)d\Gamma = f_1(q_1, p_1)d\Gamma_1 f_2(q_2, p_2)d\Gamma_2, \quad d\Gamma = d\Gamma_1 d\Gamma_2,$$

откуда

$$f(q, p) = f_1(q_1, p_1) f_2(q_2, p_2),$$

поэтому  $\ln f$  есть аддитивный интеграл движения системы, в том же смысле, как и  $E$ . Обе эти функции обладают этими свойствами универсально, т.е. для любой системы рассматриваемого нами типа. Пока, кроме  $E$ , других аддитивных интегралов движения для произвольной системы мы не знаем (количество движения, момент количества движения и тому подобные интегралы мы будем считать тождественно равными нулю, считая что система макроскопически не движется), искомая нами функция  $f$  должна непосредственно зависеть от  $E$ :

$$f(q, p) = f(E(q, p)). \quad (24)$$

**Каноническое распределение Гиббса.** Рассмотрим простейший — линейный — случай зависимости одного аддитивного интеграла движения ( $\ln f$ ) от другого ( $H$ ):

$$\ln f(q, p, \lambda) = -\alpha - \beta E(q, p, \lambda), \quad (25)$$

где знак перед аргументом выбран из возможности удовлетворения условию нормировки

$$\int \exp(-\alpha - \beta E(q, p, \lambda)) d\Gamma = 1, \quad (26)$$

а  $\alpha$  и  $\beta$  — константы распределения. Из последнего равенства имеем связь

$$\exp(-\alpha) = \int \exp(-\beta E(q, p, \lambda)) d\Gamma \equiv Z(\beta, \lambda). \quad (27)$$

Термодинамический потенциал  $Z$  системы называется *статистическим интегралом*. Найдем дифференциал его логарифма

$$\begin{aligned} d \ln Z &= Z^{-1} d \int \exp(-\beta E) d\Gamma = -\bar{E} d\beta - Z^{-1} \beta \int \frac{\partial E}{\partial \lambda} \exp(-\beta E) d\Gamma = \\ &= -\bar{E} d\beta - \beta \bar{\Lambda} d\lambda, \end{aligned} \quad (28)$$

где введено обозначение сопряженной к  $\lambda$  переменной

$$-\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \Lambda \quad (29)$$

и чертой обозначено среднее по ансамблю:

$$\bar{\chi} = \int \chi(q, p) f(q, p) d\Gamma. \quad (30)$$

С другой стороны, основное термодинамическое тождество дает

$$d\bar{E} = TdS - \bar{\Lambda}d\lambda. \quad (31)$$

Комбинируя (28) с (31), получим равенство линейных дифференциальных форм

$$TdS = \beta^{-1}d(\beta\bar{E} - \ln Z), \quad (32)$$

откуда получаем, что

$$\beta^{-1} = \kappa T, \quad (33)$$

т.е. абсолютная температура, выраженная в некоторых единицах, и

$$S = \kappa(\beta\bar{E} - \ln Z) + c. \quad (34)$$

Используя для последнего выражения (25), (27), (30), получаем

$$\begin{aligned} S &= \kappa(\alpha + \beta\bar{E}) + c = \kappa(\overline{\alpha + \beta E}) + c = \\ &= -\kappa\overline{\ln f} + c = -\kappa \int \ln f d\Gamma + c, \end{aligned} \quad (35)$$

и сравнение этого выражения с (3) позволяет сделать вывод, что

$$\kappa = k. \quad (36)$$

С использованием (33), (35), (36) можно получить выражение для свободной энергии системы:

$$F = \bar{E} - TS = -kT \ln Z, \quad (37)$$

откуда

$$\alpha = -\frac{F}{kT}.$$

Итак, наше распределение принимает вид

$$f(q, p, \lambda) = Z^{-1} \exp\left(\frac{F - E(q, p, \lambda)}{kT}\right). \quad (38)$$

Перепишем также (34) с учетом (36) с точностью до константы

$$S = k(\ln Z + \frac{\bar{E}}{kT}). \quad (39)$$

и укажем элементарно проверяемую формулу, следующую из (27) с учетом (36),

$$\bar{E} = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (40)$$

Распределение (38), называемое *каноническим распределением Гиббса*, предполагает, что рассматриваемая система частиц закрыта, находится в термостате (т.е. не изолирована) и занимает фиксированный объем. Первую гипотезу мы фактически ввели с самого начала, фиксируя число частиц, вторая и третья появились из записи в определенной форме (31) основного термодинамического тождества. В общем, нет никаких препятствий для

ослабления некоторых из этих ограничений. В *большом каноническом ансамбле Гиббса* системы не изолированы (помещены в термостат) и незамкнуты, а в *расширенном ансамбле Гиббса* системы не изолированы (помещены в термостат) и не фиксирован их объем (стенки сосуда подвижны). В таких системах равновесие с окружением включает в себя не только равновесие в смысле обмена энергией, в ходе которого устанавливается равновесное значение температуры, но и в смысле обмена частицами (массой), в результате чего устанавливается равновесное значение химического потенциала или обмена импульсами,двигающего стенки сосуда, в результате чего устанавливается равновесное значение давления.

Каноническое распределение Гиббса допускает интерпретации как распределение экземпляров канонического ансамбля Гиббса или как распределение равновесных состояний одинаковых квазинеzáвисимых подсистем изолированной системы. Можно считать, что части системы, окружающие любую подсистему, образуют по отношению к ней термостат. В ходе установления равновесия в системе неизолированных подсистем установится одинаковая температура, а само состояние, как мы знаем, будет характеризоваться максимальной энтропией, мерой которой в непрерывном случае служит функция (35)

$$S = -k \int \ln f d\Gamma .$$

Данная функция максимально обостряет распределение. Если, кроме условия нормировки, больше нет ограничений, мы получаем сингулярное распределение. Но поскольку у нас имеется ограничение на изолированность системы, мы имеем задачу

$$\begin{aligned} \int \ln f dq dp &\rightarrow \min \\ \int f E dq dp &= \bar{E} \\ \int f dq dp &= 1 \end{aligned} \quad (41)$$

решением которой является каноническое распределение Гиббса (38), что нетрудно показать.

Если система замкнута, т.е. ее энергия фиксирована  $E = \bar{E}$ , то ее состояние с равной вероятностью блуждает по поверхности  $E(q, p) = \bar{E}$ , а значит и все состояния канонического ансамбля Гиббса блуждают по этой же поверхности, и из (24) находим, что распределение подчинено закону

$$f(q, p) = \Lambda \delta(E(q, p) - \bar{E}). \quad (42)$$

Это распределение называется *микрканоническим*. Постоянная  $\Lambda$  определяется условием нормировки (20).

В заключение будет полезно рассмотреть третий вывод канонического распределения Гиббса, выполняемый на основе микрканонического. Рассматриваем систему, помещенную в термостат; такую “большую систему” ввиду массивности термостата можно считать замкнутой. Пусть члены канонического ансамбля Гиббса представляют собой экземпляры такой большой

системы, взятые при разных начальных условиях. Ввиду замкнутости такой ансамбль будет иметь микроканоническое распределение. Полная энергия большой системы неизмеримо больше энергии изучаемой системы (вообще говоря флуктуирующей по закону, который мы и собираемся найти). Статистико-физический смысл понятия температуры термостата ясен — это средняя кинетическая энергия составляющих его частиц, определенная относительно системы отсчета, связанной с его центром масс. Поэтому искомое распределение не должно зависеть от взаимодействия частиц термостата между собой. Проще всего поэтому взять в качестве термостата идеальный газ, полная энергия которого складывается только из кинетической энергии его частиц. Итак

$$f(q, p, Q, P) = \Lambda \delta(E(q, p) + \varepsilon(Q, P) - \bar{E}) \quad (43)$$

— микроканоническое распределение для большой системы, в котором

$$\varepsilon(Q, P) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} P_i^2 \quad (44)$$

— энергия термостата. Искомое распределение мы получим, если проинтегрируем (43) по фазовому пространству термостата. В подпространстве импульсов элементарный объем в сферических координатах пропорционален

$$R^{3N-1} dR,$$

где  $R^2 = \sum_{i=1}^N P_i^2$ , и в силу (44) это выражение может быть записано как

$$\varepsilon^{\frac{3N-1}{2}} d\varepsilon. \quad (45)$$

Искомый интеграл сведется к

$$\sigma(N) (\bar{E} - E)^{\frac{3N-1}{2}} = \sigma(N) \bar{E}^{\frac{3N-1}{2}} \left(1 - \frac{E}{\bar{E}}\right)^{\frac{3N-1}{2}}.$$

Далее будем устремлять  $N$  к бесконечности, оставляя отношение  $\bar{E} / (\frac{3N}{2} - 1) = \theta$  постоянным, поскольку по смыслу это температура термостата, выраженная в некоторых энергетических единицах, в результате чего

$$\sigma(N) \bar{E}^{\frac{3N-1}{2}} \left(1 - \frac{E}{\theta \frac{3N}{2} - 1}\right)^{\frac{3N-1}{2}} \rightarrow Z^{-1} \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right)$$

и искомая плотность распределения приобретет уже известный нам вид

$$f(q, p, \lambda) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{E(q, p, \lambda)}{\theta}\right), \quad (46)$$

где множитель  $Z$  определяется условием нормировки (20)

$$Z(\theta, \lambda) = \int \exp\left(-\frac{E(q, p, \lambda)}{\theta}\right) d\Gamma. \quad (47)$$

В силу (47) распределение энергии по фазовому пространству

$$f(E) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{E(q, p)}{\theta}\right) \frac{dq dp}{dE}$$

определяется произведением быстро убывающей и быстро возрастающей с увеличением  $E$  функциями (рост последней для идеального газа дается (45)). Поэтому данное распределение описывается узко локализованным пиком, соответствующим  $E = \bar{E}$ . С увеличением температуры этот пик слегка размывается, делая вероятными флуктуации энергии системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.-Ижевск: РХД, 2002. 480 с.
2. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. 203 с.
3. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. 400 с.

## Поверхности разрыва в сплошных средах

До сих пор мы рассматривали континуальные тела; на практике такое предположение часто является приемлемым всюду за исключением конечного или счетного числа изолированных поверхностей. Примерами таких поверхностей могут служить ударные волны, границы раздела фаз, трещины и полосы сдвига в твердых телах, двумерные наддислокационные образования (малоугловые границы ячеек, фрагментов, в частности, дислокационные стенки и скопления), пропеллеры в жидкой или газообразной средах и т.д.

**Поверхность разрыва (сингулярная поверхность)** есть изолированная поверхность, на которой терпят разрыв параметры, описывающие движение и состояние среды, или их производные начиная с первого или второго порядков по пространственной и временной переменным. Величины данных скачков при переходе через поверхность разрыва произвольными быть не могут, они связываются некоторыми *соотношениями на поверхности разрыва*. Часть этих соотношений следует из балансовых уравнений, другая (за исключением разрывов нулевого порядка) — из непрерывности самих полей или их первых производных для соответствующих разрывов первого или второго порядка.

Сначала мы сформулируем соотношения второго типа<sup>37</sup>, для чего нам понадобятся некоторые вспомогательные математические результаты. Пусть  $\sigma$  — часть границы области  $V$   $n$ -мерного аффинного пространства точек  $q \in A_n$ , в которой задано непрерывно дифференцируемое поле  $\psi$  (для определенности скалярное), имеющее на  $\sigma$  внутренние пределы  $\psi_+$  и  $(\psi \nabla_q)_+$  ( $\nabla_q$  - оператор градиента в  $A_n$ ), и функция  $\psi_+$  дифференцируема по любому пути, лежащему на  $\sigma$ . В таком случае для предельных функций выполняется теорема о полном дифференциале

$$d\psi_+ = (\psi \nabla_q)_+ \cdot dl, \quad (1)$$

где дифференциал рассматривается вдоль произвольного пути  $dl$  на поверхности  $\sigma$ .

Пусть ориентированная поверхность  $s$  теперь представляет собой часть внутренней границы, разделяющей область на объемы, в каждом из которых поле  $\psi$  гладко в указанном выше смысле. В таком случае для не обязательно равных между собой предельных значений полей  $\psi_+$  и  $\psi_-$ , а также  $(\psi \nabla_q)_+$  и  $(\psi \nabla_q)_-$  на  $\sigma$ . Применяя (1) к  $\psi_+$  и  $\psi_-$  и вычитая один результат из другого, получим

**условие совместности Адамара**

$$[d\psi] = [\psi \nabla_q] \cdot dl. \quad (2)$$

Квадратные скобки обозначают разность пределов по обе стороны сингулярной поверхности:  $[\cdot] \equiv (\cdot)_+ - (\cdot)_-$ .

<sup>37</sup>Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М: Мир, 1975. 592 с.

Когда поле  $\psi$  непрерывно, т.е.  $[d\psi] \equiv 0$ , (2) дает

$$[\psi \nabla_q] \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3)$$

для произвольного  $d\mathbf{l}$  на поверхности. Это означает, что скачок градиента непрерывного поля нормален к сингулярной поверхности:

$$[\psi \nabla_q] = \alpha \mathbf{i}. \quad (4)$$

Для уточнения знака скаляра  $\alpha$  условимся нормаль  $\mathbf{i}$  направлять от  $v_-$  к  $v_+$ . Если  $\psi$  — векторное поле, то множитель становится вектором:

$$[\psi \nabla_q] = \mathbf{a} \mathbf{i}. \quad (5)$$

Если на поверхности разрыва непрерывно поле  $\psi \equiv \psi \nabla_q$ , то с помощью (5) и с учетом симметрии  $(\psi \nabla_q \nabla_q)_\pm$ , получаем

$$[\psi \nabla_q \nabla_q] = \alpha \mathbf{i} \mathbf{i}. \quad (6)$$

По данному образцу можно получать соотношения на границах разрыва любого порядка для поля любого тензорного ранга.

Множитель  $\alpha$  называется амплитудой; в случае, когда амплитуда есть вектор ( $\mathbf{a}$ ), сингулярность называется продольной, если  $\mathbf{a} // \mathbf{i}$ , и поперечной, если  $\mathbf{a} \perp \mathbf{i}$ .

Далее нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к кинематике поверхности разрыва. Пусть  $f(\hat{\mathbf{x}}, t) = 0$  — уравнение данной поверхности в текущей конфигурации  $K_t$ . Скорость перемещения точки поверхности вдоль нормали  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{N}} / |\hat{\mathbf{N}}|$  определяется

$$\hat{c} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \frac{\hat{\mathbf{N}}}{|\hat{\mathbf{N}}|} \quad (7)$$

и с использованием

$$df(\hat{\mathbf{x}}, t) = f \hat{\nabla} \cdot d\hat{\mathbf{x}} + \partial_t f dt = 0$$

представляется как

$$\hat{c} = -\frac{\partial_t f}{|\hat{\mathbf{N}}|}. \quad (8)$$

Вектор скорости перемещения точки поверхности при этом считается направленным вдоль нормали:  $\hat{\mathbf{c}} \equiv \hat{c} \hat{\mathbf{n}}$ . Касательное перемещение точки поверхности не интересует, поскольку поверхность в общем не состоит из одних и тех же материальных точек, а даже если и состоит, то нас не интересует ее материальное описание. Смысл  $\hat{c}$  — абсолютная скорость перемещения поверхности относительно пространственной системы отсчета.

Подставляя в  $f(\hat{\mathbf{x}}, t) = 0$  лагранжев закон движения  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$ , получим уравнение  $g(\mathbf{x}, t) = 0$  прообраза рассматриваемой поверхности в  $K_0$ . Для скорости

перемещения точки поверхности вдоль нормали  $\mathbf{n} = g\nabla / |g\nabla|$  аналогичным образом получаем

$$c = -\frac{\dot{g}}{|g\nabla|}. \quad (9)$$

Сам вектор скорости определяется как  $\mathbf{c} \equiv c\mathbf{n}$ . Смысл  $c$  — абсолютная скорость перемещения прообраза поверхности относительно пространственной системы отсчета.

Для нахождения связи  $\hat{c}$  и  $c$  продифференцируем равенство  $g(\mathbf{x}, t) = f(\hat{\mathbf{x}}, t)$  по  $t$  при фиксированном  $\mathbf{x}$ :

$$\dot{g}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} f,$$

откуда с использованием (8) и (9) получаем

$$c = \frac{|\hat{\nabla} f|}{|\nabla g|} s, \quad s \equiv \hat{c} - v_n, \quad v_n \equiv \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (10)$$

В (10)  $s$  представляет собой скорость перемещения поверхности относительно материала вдоль нормали в  $K_t$  и называется “собственной” скоростью распространения поверхности.

$$\text{Дифференцируя равенство } g(\mathbf{x}, t) = f(\hat{\mathbf{x}}, t) \text{ по } \mathbf{x} \text{ с учетом } \nabla = \mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla},$$

$$\nabla g = \mathbf{F}^T \cdot \hat{\nabla} f,$$

получим связь

$$\mathbf{n} = \frac{|\hat{\nabla} f|}{|\nabla g|} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (*)$$

Приступим к установлению соотношений на поверхностях разрыва первого и второго порядков, называемых соответственно поверхностями **сильного** и **слабого** разрывов, вытекающих из непрерывности исследуемого поля соответственно нулевого и первого порядков. Рассмотрим прообраз движущейся поверхности в  $K_0$  как поверхность в 4-х мерном пространстве точек  $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{x}, t)$  и в нем применим условие совместности Адамара (2). Оператор дифференцирования в таком пространстве есть  $\nabla_q(\cdot) \equiv (\nabla(\cdot), (\cdot)^\cdot)$ , нормаль представляется  $\mathbf{i} \equiv (\mathbf{n}, -c)$  (см. (9)). Если рассматривается непрерывное поле  $\psi \equiv \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)$  относительно  $K_0$ , то

$$\psi \nabla_q = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \quad (11)$$

$$\psi \nabla_q \nabla_q = (\mathbf{F} \nabla, \dot{\mathbf{F}}, \dot{\mathbf{v}}). \quad (12)$$

Условие совместности Адамара, примененное к (11), дает

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}] &= a\mathbf{n}, \\ [\mathbf{v}] &= -ca. \end{aligned} \quad (13)$$

Если первые производные непрерывны, то в (13) правые части равны нулю. В этом случае применяем условие совместности Адамара к (12), в результате чего получаем:

$$\begin{aligned}
[ F \nabla ] &= \mathbf{a} n n, \\
[ \dot{\mathbf{F}} ] &= -\mathbf{c} a n, \\
[ \dot{\mathbf{v}} ] &= c^2 \mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{14}$$

В (13) и (14) амплитуды разрыва  $\mathbf{a}$ , конечно, различны. Соотношения (13) применяют на поверхностях сильного, а (14) — слабого, разрывов.

С помощью (10) и (\*) результаты (13)-(14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
[ \mathbf{F} ] &= \hat{\mathbf{a}} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\
[ \mathbf{v} ] &= -s \hat{\mathbf{a}}
\end{aligned} \tag{13'}$$

$$\text{с } \hat{\mathbf{a}} = \frac{|\hat{\nabla} f|}{|\nabla g|} \mathbf{a} \text{ и}$$

$$\begin{aligned}
[ F \nabla ] &= \hat{\mathbf{a}} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\
[ \dot{\mathbf{F}} ] &= -s \hat{\mathbf{a}} \mathbf{F}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\
[ \dot{\mathbf{v}} ] &= s^2 \hat{\mathbf{a}}
\end{aligned} \tag{14'}$$

$$\text{с } \hat{\mathbf{a}} = \frac{|\hat{\nabla} f|^2}{|\nabla g|^2} \mathbf{a}.$$

Анализируя последние равенства в (13')-(14'), можно увидеть, что, поскольку ни  $s$ , ни  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$  не зависят от выбора отсчетной конфигурации, то и амплитуды разрыва  $\hat{\mathbf{a}}$  от нее также не зависят, и поэтому для них уместно название “собственные амплитуды”.

Из (13) нетрудно получить следствие

$$[ \mathbf{v} ] = -[ \mathbf{F} ] \cdot \mathbf{c}, \tag{15}$$

где (напомним)  $\mathbf{c} = \mathbf{c} \mathbf{n}$  есть скорость перемещения прообраза поверхности относительно отсчетной конфигурации.

Если в качестве отсчетной мы возьмем текущую конфигурацию, то в (13')-(14') необходимо положить  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{I}$ , а  $\dot{\mathbf{F}} \equiv \mathbf{L}$ , в силу чего все соотношения с разрывами  $\mathbf{F}$  или  $\mathbf{F} \nabla$  исчезают. Из оставшихся рассмотрим второе соотношение для слабого разрыва:

$$[ \mathbf{L} ] = -s \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{n}}, \tag{16}$$

из которого выражаются скачки деформации скорости, скорости расширения и вихря:

$$\begin{aligned}
[ \mathbf{D} ] &= -s \{ \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{n}} \}, \\
[ \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} ] &= -s \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\
[ \boldsymbol{\omega} ] &= -\frac{1}{2} s \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Соотношения (17) означают, что поверхность слабого разрыва (называемая еще **волной ускорения**) переносит ненулевой скачок градиента скорости, нормальная компонента вектора  $-\hat{\mathbf{c}} \hat{\mathbf{a}}$  представляет собой скачок скорости расширения, а тангенциальная его компонента есть скачок вихря. Отсюда следует, что в изохорическом движении все волны ускорения обязательно поперечные, в безвихревом движении могут существовать только продольные волны ускорения, а

при потенциальном движении несжимаемой жидкости волны ускорения существовать не могут.

Следствием соотношений для слабого разрыва является уравнение

$$[L] = -s^{-1} [\dot{\mathbf{v}}] \hat{\mathbf{n}},$$

связывающее разрыв тензора градиентов скоростей с разрывом ускорения.

Для поверхностей разрыва нулевого порядка непрерывность исследуемого поля совершенно отсутствует, поэтому каких-либо ограничивающих соотношений не возникает. Для описания взаимодействия берегов таких поверхностей разрыва требуются определяющие соотношения.

Перейдем теперь к соотношениям другого типа, следующих из балансовых уравнений. Предварительно докажем одну вспомогательную теорему (Н.Е. Кочин). Для этого потребуются формула дифференцирования интеграла по подвижному объему:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} f d\hat{V} = \int_{\hat{S}} \frac{\partial}{\partial t} f d\hat{V} + \int_{\hat{S}} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S}, \quad (18)$$

для доказательства которой переходим под интегралом от пространственных к лагранжевым переменным  $d\hat{V} = JdV$ , используем формулу  $\dot{J} = \hat{\mathcal{N}} \cdot \mathbf{v}$ , после чего имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} f d\hat{V} = \int_{\hat{V}} (\dot{f} + f \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) d\hat{V},$$

а затем вспоминаем  $\dot{f} = \frac{\partial}{\partial t} f + (f \hat{\nabla}) \cdot \mathbf{v}$ , тождество  $\hat{\nabla} \cdot (f \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\hat{\nabla} f) + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) f$  и используем теорему Гаусса - Остроградского.

Формулу (18) применяем к двум частям тела с объемом  $\hat{V} = \hat{V}^- \cup \hat{V}^+$  и внешней границей  $\hat{S} = \hat{S}^- \cup \hat{S}^+$ , разделенным поверхностью  $\sigma$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}^-} f d\hat{V} = \int_{\hat{V}^-} \frac{\partial}{\partial t} f d\hat{V} + \int_{\hat{S}^-} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} + \int_{\sigma} f \hat{c} d\hat{S},$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}^+} f d\hat{V} = \int_{\hat{V}^+} \frac{\partial}{\partial t} f d\hat{V} + \int_{\hat{S}^+} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} - \int_{\sigma} f \hat{c} d\hat{S}$$

( $c$  — скорость движения границы в направлении  $\hat{\mathbf{n}}$  относительно текущей конфигурации), складываем эти уравнения и получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} f d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \frac{\partial}{\partial t} f d\hat{V} + \int_{\hat{S}} f \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} - \int_{\sigma} [f] \hat{c} d\hat{S}. \quad (19)$$

Уравнение баланса субстанции  $\int_{\hat{V}} \hat{\rho} f d\hat{V}$  ( $f$  ее массовая плотность) представляем в

виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} f d\hat{V} = - \int_{\hat{S}} \mathbf{I}_f \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} + \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \chi_f d\hat{V}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{I}_f$  — поток поля  $f$  сквозь границы тела в текущей конфигурации, а  $\chi_f$  — массовый источник  $f$ . Используя теперь (19) для  $\hat{\rho}f$  и (20), получаем

$$\int_{\hat{S}} (\hat{\rho}f \mathbf{v} + \mathbf{I}_f) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{S} - \int_{\hat{\sigma}} [\hat{\rho}f] \hat{c} d\hat{S} = \int_{\hat{V}} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho}f) - \hat{\rho}\chi_f \right) d\hat{V}. \quad (21)$$

Если на внутренней поверхности  $\hat{\sigma}$  величина  $\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho}f) - \hat{\rho}\chi_f$  не испытывает разрыва<sup>38</sup>, то стягиванием объема к этой поверхности из (21) получаем

$$[\hat{\rho}fs - \mathbf{I}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}] = 0 \quad (22)$$

— искомый нами результат. Заметим, что (22) не содержит плотности внешних источников или стоков субстанции, учитываемых уравнениями ее баланса.

Если же плотность внешних источников или стоков субстанции  $\hat{\rho}\chi_f$  в (21) имеет разрыв (т.е. сингулярна) на сингулярной поверхности, эта поверхность имеет поверхностную плотность таких источников/стоков и данное слагаемое появляется тогда в уравнении (22).

Сейчас можно использовать (22) для известных нам балансовых уравнений и сингулярных поверхностей различного порядка. Баланс массы предполагает  $\mathbf{f} = 1$ ,  $\mathbf{I}_f = \mathbf{0}$  и (22) дает

$$[\hat{\rho}s] = 0. \quad (23)$$

Для сингулярности второго порядка  $[\hat{\rho}] = 0$  (в силу  $\hat{\rho} = \rho \det \mathbf{F}$ ,  $[\mathbf{F}] = 0$  и  $[\rho] = 0$ ) и  $[\mathbf{v}] = 0$ , и (18) не представляет собой ограничения.

Баланс количества движения предполагает  $\mathbf{f} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{I}_f = -\boldsymbol{\sigma}$ , поэтому из (22)

$$[\hat{\rho}\mathbf{v}s] = -[\hat{\mathbf{t}}_n]. \quad (24)$$

Для сингулярности второго порядка  $[\hat{\rho}\mathbf{v}] = 0$ , поскольку  $[\mathbf{v}] = 0$  и  $[\hat{\rho}] = 0$  (последнее следует из  $[\mathbf{F}] = 0$ , поскольку  $\hat{\rho} = \rho \det \mathbf{F}$ ), поэтому

$$[\hat{\mathbf{t}}_n] = 0, \quad (25)$$

т.е. при пересечении такой поверхности непрерывна поверхностная сила. В частности, в идеальных жидкости или газе непрерывно гидростатическое давление. Непрерывности самого тензора напряжений условие (24) не требует. Соотношение (25) также имеет место при квазистатическом движении сингулярной поверхности первого порядка.

Баланс момента количества движения предполагает  $\hat{\rho}\mathbf{f} = \boldsymbol{\chi}$ ,  $\mathbf{I}_f = -\boldsymbol{\mu}$ , поэтому

$$[\boldsymbol{\chi}s] = -[\hat{\mathbf{m}}_n]. \quad (26)$$

Для сингулярной поверхности второго порядка доказать самостоятельно

<sup>38</sup> Это ограничение нужно воспринимать как частный случай; “идеальный пропеллер”, фронт химической реакции, граница раздела фаз при происходящем фазовом переходе и т.п. представляют собой примеры границ разрыва как сингулярных источников импульса, энтропии и т.п.

$$[\hat{\mathbf{m}}_n] = \mathbf{0}. \quad (27)$$

В балансовом уравнении энергии  $\mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u$ ,  $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_q - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$ , и мы имеем

$$[\hat{\rho} s(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u)] = [\mathbf{I}_q \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}]. \quad (28)$$

Для сингулярной поверхности второго порядка остается лишь

$$\hat{\rho} s[u] = [\mathbf{I}_q \cdot \hat{\mathbf{n}}]. \quad (29)$$

В балансовом уравнении энтропии  $\mathbf{f} = s$ ,  $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_s$  и

$$[\hat{\rho}(\hat{c} - v_n)s - \mathbf{I}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \theta \geq 0. \quad (30)$$

Соотношения (30) приобретут конкретный вид при конкретизации потока энтропии для изучаемого необратимого процесса.

Для сингулярных поверхностей нулевого порядка балансовые уравнения также не дают каких-либо ограничений (конечно, это не означает, что такие поверхности нельзя использовать в моделях).

## Обобщенные континуумы

Под обобщенными континуумами понимаются микроморфные или градиентные среды. Микроморфные континуумы имеют структуру, т.е. их частицы сложнее материальной точки. Ниже мы рассмотрим континуум Коссера, частицы которого представляют собой точки-тела, и двойной континуум, частицы которого состоят из двух различных материальных точек. В еще более сложном случае (континуума Миндлина - Эрингена) частицы считаются деформируемыми телами. Известны также среды с континуально распределенными дислокациями. Градиентные континуумы рассматривают неаффинную локальную кинематику и статику; здесь мы ограничимся рассмотрением только одной подобной среды, являющейся специальным случаем континуума Коссера. В настоящее время обобщенными континуумами активно занимаются Э.Л. Аэро Дж. Каприц, Ж. Можен.

**Континуум Коссера.** Излагаемое ниже обобщение классического континуума принадлежит братьям Эжену (1866-1931) и Франсуа (1852-1914) Коссера, опубликовавшим в 1909 г. монографию “Теория деформируемого тела”. Близкое к подлиннику изложение теории можно увидеть в книге Д.А. Кутилина<sup>39</sup>. До конца 50-х годов эта теория, построенная дедуктивным способом при использовании серьезного геометрического аппарата, но не содержащая материальных уравнений, находилась в неизвестности, пока в 1960 году Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшинский<sup>40</sup>, а также Г. Гриоли ее не переоткрыли, опубликовав замкнутые системы уравнений линейной упругости.

Рассмотрим континуум, состоящий из жестких (недеформируемых) частиц. Ранее мы уже записывали балансовые уравнения механики для элементарного объема такого континуума (содержащего достаточно большое число частиц):

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \hat{\rho} \mathbf{f} = \hat{\rho} \dot{\mathbf{v}}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\sigma}_x + \hat{\rho} \mathbf{k} = \dot{\boldsymbol{\chi}}. \quad (2)$$

Для простоты рассмотрим одинаковые шарообразные частицы с однородно распределенной по объему каждой плотностью массы. В таком случае собственный момент количества движения  $\boldsymbol{\chi}$  элементарного объема гарантировано может быть представлен в виде  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , где  $\boldsymbol{\omega}$  есть средняя скорость собственного вращения частиц этого объема, а  $\mathbf{J}$  — объемная плотность моментов инерции частиц. В этом случае также  $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$ . Напомним, что тензор напряжений Коши

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

сейчас нет оснований считать симметричным — это означает, что момент контактных сил  $\hat{\mathbf{t}}$ , действующих по поверхности элементарного объема, не равен

<sup>39</sup> Кутилин Д.А. Теория конечных деформаций. М.-Л.: ОГИЗ - Гостехиздат, 1947. 275 с.

<sup>40</sup> Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т.2, №7. С. 1399-1409.

нулю; этот момент, равный удвоенному аксиальному вектору  $\sigma_x$  тензора напряжений Коши, стремится повернуть элементарный объем. Вектор  $k$  есть массовая плотность собственных моментов, действующих на частицы объема. Тензор моментов-пар  $\mu$

$$\hat{m} = \hat{n} \cdot \mu \quad (4)$$

содержит в себе информацию о контактных собственных моментах, действующих на частицы элементарного объема по поверхности.

Теперь найдем скорость совершения работы для элементарного объема континуума Коссера. Для всего тела эта величина равна

$$W \equiv P - \dot{K}, \quad (5)$$

где  $P$  есть мощность внешних сил, а  $K$  — его кинетическая энергия. Равенство (5) перепишем в локальных терминах:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} w d\hat{V} = & \int_{\hat{V}} \hat{\rho} (f \cdot v + k \cdot \omega) d\hat{V} + \int_{\hat{S}} (\hat{t} \cdot v + \hat{m} \cdot \omega) d\hat{S} - \\ & - \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \frac{1}{2} (\hat{\rho} v \cdot v + \omega \cdot J \cdot \omega) d\hat{V}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее (1) сворачиваем с  $v$ , а (2) — с  $\omega$ , и интегрируем по объему тела:

$$\int_{\hat{V}} [\hat{\rho} f \cdot v + (\hat{\nabla} \cdot \sigma) \cdot v - \hat{\rho} v \cdot \dot{v}] d\hat{V} = 0, \quad (7)$$

$$\int_{\hat{V}} [(\nabla \cdot \mu) \cdot \omega - 2\sigma_x \cdot \omega + \hat{\rho} k \cdot \omega - \omega \cdot J \cdot \dot{\omega}] d\hat{V} = 0. \quad (8)$$

Переходя в (6) от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему с использованием (3), (4), теоремы Гаусса - Остроградского и известного дифференциального тождества и учитывая затем (7) и (8), приходим к равенству

$$\int_{\hat{V}} \hat{\rho} w d\hat{V} = \int_{\hat{V}} (\sigma : \hat{\nabla} v + \mu : \hat{\nabla} \omega + 2\sigma_x \cdot \omega) d\hat{V}$$

или в локальной форме

$$\hat{\rho} w = \sigma : \hat{v} + \mu : \hat{\omega} + 2\sigma_x \cdot \omega. \quad (9)$$

Последнее слагаемое в (9) можно преобразовать к  $-\sigma : \Omega$ , где  $\Omega$  — спин собственного вращения частиц элементарного объема, так что результат представим в виде

$$\hat{\rho} w = \sigma : (\hat{v} - \Omega) + \mu : \hat{\omega}. \quad (10)$$

В (10) появились скорости, сопряженные тензорам напряжений и моментов-пар, —  $\hat{v} - \Omega$  и  $\hat{\omega}$ . Первую можно представить в виде суммы деформации скорости  $D$  и относительного спина  $W - \Omega$ . (Отметим, что элементарный объем континуума Коссера состоит в двух вращательных движениях — вихревой составляющей поля скоростей трансляций частиц и осредненном собственном вращении частиц.) Тогда выражение (10) можно представить иначе:

$$\hat{\rho} w = \{\sigma\} : D + [\sigma] : (W - \Omega) + \mu : \hat{\omega}.$$

Здесь тензор деформации скорости сопряжен симметричной части тензора напряжений Коши, относительный спин — антисимметричной его части, а градиент скорости вращения — тензору моментов-пар; все эти тензоры независимы от выбора системы отсчета, что совсем нетрудно показать. Поэтому определяющие соотношения, связывающие силовые тензоры  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}$  (или их независимые от системы отсчета скорости) с кинематическими  $\hat{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega}\hat{\mathbf{v}}$ , автоматически будут независимыми от системы отсчета.

К этим характерным локальным переменным полезно подойти и с другой стороны, рассматривая кинематику и статику системы контактирующих частиц<sup>41</sup>. Для простоты ограничимся плоской ситуацией и инкрементально-линейным законом взаимодействия частиц. Рассмотрим три попарно контактирующие жесткие частицы А, В и С с единичными векторами нормалей  $\mathbf{n}_k$  и касательных  $\mathbf{b}_k$  в точках контакта  $k=1,2,3$ . Диады  $\mathbf{n}_k \mathbf{b}_k \equiv \mathbf{M}_k \Sigma_k, \text{tr} \mathbf{M}_k = 0$  образуют базис в пространстве несимметричных девиаторов над плоскостью. Относительная скорость  $k$ -й пары частиц (например, А и В) в точке их контакта

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega}_A \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_A) - \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\Omega}_B \cdot (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_B),$$

где  $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$  — скорости трансляции частиц,  $\boldsymbol{\Omega}_A, \boldsymbol{\Omega}_B$  — их спины,  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  — радиусы-векторы их центров масс, а  $\mathbf{x}_k$  — радиус-вектор точки контакта. Группируя слагаемые и пренебрегая разностью  $\boldsymbol{\Omega}_A - \boldsymbol{\Omega}_B$  по сравнению со средним спином  $\boldsymbol{\Omega}$ , приближенно получим:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B). \quad (11)$$

Для тройки частиц существует линейный оператор  $\mathbf{L} \equiv \hat{\mathbf{v}}$ , определяемый соотношениями

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B), \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_C = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C), \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A).$$

С помощью этого оператора результат запишется в виде

$$\mathbf{v}_k = (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B). \quad (12)$$

Отсюда, считая  $\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$  направленным вдоль  $\mathbf{n}_k$ , получаем выражение для мгновенного сдвига вдоль  $\mathbf{b}_k$  за счет проскальзывания частиц в точке их контакта

$$\dot{\gamma}_k = (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) : \mathbf{M}_k. \quad (13)$$

Несимметричный тензор напряжений (девиатор) для тройки частиц определим как

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_k \mathbf{M}_k, \quad (14)$$

где  $\tau_k$  — сдвиговое напряжение вдоль направления  $\mathbf{b}_k$  на площадке с нормалью  $\mathbf{n}_k$ . Примем также закон контактного взаимодействия частиц ( $\alpha$  — касательный модуль) в виде

<sup>41</sup> Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т.43. N2. С. 176-186.

$$\dot{\tau}_k = \alpha \dot{\gamma}_k. \quad (15)$$

Для замыкания системы (13) - (15) следует определить мгновенную скорость поворота диад  $\mathbf{M}_k$ . Но для одинаковых круглых частиц поворот касательной и нормали в точке контакта определяется вихрем поля скоростей их трансляции:

$$\dot{\mathbf{M}}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{W}. \quad (16)$$

Подстановка (2), (4) и (5) в (3) приводит к следующему соотношению:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{H} : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}), \quad \mathbf{H} \equiv \alpha \mathbf{M}_k \mathbf{M}_k. \quad (17)$$

Структура уравнений состояния для градиента спина также может быть выяснена при рассмотрении трех частиц. Мы должны предположить, что попарные контактные взаимодействия частиц осуществляются не только силами, но и моментами-парами, искажающими поле поворотов частиц. Для тройки частиц существует линейный оператор  $\boldsymbol{\Gamma} \equiv \boldsymbol{\omega} \nabla$ , определяемый соотношениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_A - \boldsymbol{\omega}_B &= \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B), \quad \boldsymbol{\omega}_B - \boldsymbol{\omega}_C = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C), \\ \boldsymbol{\omega}_C - \boldsymbol{\omega}_A &= \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A). \end{aligned}$$

В рамках принятого выше допущения результат может быть записан в виде

$$\dot{\theta}_k = \boldsymbol{\Gamma} : \mathbf{N}_k, \quad (18)$$

где  $\theta_k$  — кривизна вдоль направления  $\mathbf{n}_k$ ,  $\mathbf{N}_k \equiv \mathbf{n}_k \mathbf{e}_3$ . Тензор моментов-пар для тройки частиц определяется через моменты-пары  $m_k$  вдоль направлений  $\mathbf{n}_k$  как

$$\boldsymbol{\mu} = m_k \mathbf{N}_k. \quad (19)$$

Принимая закон контактного взаимодействия ( $\beta$  — модуль изгибной жесткости)

$$\dot{m}_k = \beta \dot{\theta}_k, \quad (20)$$

приходим с учетом (18), (19) независимо от закона вращения  $\mathbf{N}_k$  к результату

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{K} : \boldsymbol{\Gamma}, \quad \mathbf{K} \equiv \beta \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k. \quad (21)$$

Здесь учтено, что  $\dot{\mathbf{e}}_3 \equiv \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$  и  $\boldsymbol{\mu}$  имеет ненулевыми компонентами только  $\mu_{13}$  и  $\mu_{23}$ .

Выпишем определяющие соотношения линейно-вязкой изотропной среды Коссера (для примера). В общем анизотропном случае каждый из тензоров  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  определяется обоими градиентами скоростей — и трансляционного, и вращательного движений, но если среда изотропна, она не чувствует инверсию пространства. Тензоры  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\omega} \hat{\nabla}$  при таком преобразовании меняют свой знак, т.е. являются псевдотензорами, и чтобы определяющие соотношения не чувствовали инверсию, они не должны иметь перекрестных членов. Изотропные тензоры линейно-вязких свойств представляются в виде<sup>42</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \lambda \mathcal{C}_I + (\mu + \alpha) \mathcal{C}_{II} + (\mu - \alpha) \mathcal{C}_{III}, \\ \mathbf{K} &= \beta \mathcal{C}_I + (\gamma + \varepsilon) \mathcal{C}_{II} + (\gamma - \varepsilon) \mathcal{C}_{III}, \end{aligned}$$

<sup>42</sup> Такие обозначения констант приняты в работах Аэро и Кувшинского.

а определяющие соотношения —

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \lambda \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + (\mu + \gamma)(\hat{\nabla} \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}) + (\mu - \gamma)(\hat{\nabla} \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}), \\ \boldsymbol{\mu} &= 2\eta \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} \mathbf{I} + 2\tau \hat{\nabla} \boldsymbol{\omega} + 2\theta \boldsymbol{\omega} \hat{\nabla}.\end{aligned}\quad (22)$$

Такую же структуру имеют соотношения линейно-упругой изотропной среды Коссера с той разницей, что тензор деформации скорости заменяется на тензор малых деформаций, вектор угловой скорости на вектор малого поворота, а тензор вихря — на тензор малого поворота. Первое уравнение (22) представимо в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{D} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + 2\gamma (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}). \quad (23)$$

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  есть обычные коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости,  $\gamma$  очевидно отвечает за вязкое сцепление элементарного объема с окружением, размерность всех этих коэффициентов Па·с. Моментные константы  $\eta, \tau, \theta$  имеют размерность Па·с·м<sup>2</sup>.

Выразим оператор равновесия (координатную часть уравнений (1) и (2)) в скоростях трансляций и вращений. Для этого сначала подставим определяющие соотношения в форме (22) в  $\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu}$  и  $\boldsymbol{\sigma}_\times$ . Используя тождества  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \nabla) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a}$ ,  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a} \mathbf{I}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a}$ ,  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{a}) = -\nabla \times \mathbf{a}$ ,  $\Delta \mathbf{a} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{a}$ , приходим к

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= (\lambda + 2\mu) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} - (\mu - \gamma) \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{v} - 2\gamma \hat{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} &= 2(\eta + \tau + \theta) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2\theta \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\times &= \gamma \hat{\nabla} \times \mathbf{v} - 2\gamma \boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

и уравнения равновесия при условии отсутствия объемных сил и моментов-пар принимают вид

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} - (\mu - \gamma) \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{v} - 2\gamma \hat{\nabla} \times \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{0}, \\ (\eta + \tau + \theta) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega} - \theta \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \boldsymbol{\omega} + 2\gamma \boldsymbol{\omega} - \gamma \hat{\nabla} \times \mathbf{v} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (24)$$

Аффинным преобразованием

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m^2 \hat{\nabla} \times \\ \frac{1}{2} \hat{\nabla} \times & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^* \\ \boldsymbol{\omega}^* \end{Bmatrix}, \quad m^2 = \theta / \mu$$

уравнения (24) можно разделить:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^* - \mu \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{v}^* &= \mathbf{0}, \\ k_1^2 \hat{\nabla} \hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\omega}^* - k_2^2 \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* &= \mathbf{0}, \\ k_1^2 &= -(2\gamma) \mathcal{J}^{-1} (\eta + \tau + \theta), \quad k_2^2 = -(2\mu\gamma) \mathcal{J}^{-1} (\mu - \gamma),\end{aligned}\quad (25)$$

где первое уравнение есть уравнение Ламе. Константы  $k_1$  и  $k_2$  имеют размерность длины, а это означает, что оператор равновесия континуума Коссера, в отличие от оператора равновесия классического континуума, учитывает информацию о характерном размере частиц. Представление уравнений (25) и подходы к их

решению предложены в<sup>43</sup>. Вообще, после 60-х годов XX столетия очень многие авторы внесли свой вклад в изучение континуума Коссера. Для решения краевых задач механики континуума Коссера, необходимы граничные условия на собственные вращения или моменты-пары, а эти переменные, в отличие от скоростей или сил, не являются макроскопическими. Желание определить микроскопическое поле требует знания по нему граничных условий, которые (за исключением свободной границы) нужно определять из микроскопических экспериментов.

Очень распространен специальный случай континуума Коссера, в котором средний спин частиц элементарного объема отождествляется с вихрем скорости их трансляции

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} \text{ или } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \hat{\nabla} \times \mathbf{v},$$

иначе говоря частицы представляют собой материальные точки. Этой гипотезой среда выводится из разряда микроморфных (имеющих дополнительные степени свободы) континуумов, но становится одним их градиентных континуумов, поскольку в кинематике учитывается переменная

$$\hat{\nabla} \hat{\nabla} \times \mathbf{v} \equiv 2\mathbf{k},$$

называемая *тензором изгиба-кручения*. Компоненты  $\mu_{ij}$  тензора моментов-пар в произвольном орторепере принимают следующий смысл: диагональные  $\mu_{ii}$  есть моменты-пары, скручивающие материал вдоль орта  $i$ , а недиагональные  $\mu_{ij}, j \neq i$  — моменты-пары, изгибающие материал вдоль орта  $i$  вокруг ортов  $j \neq i$ . Читателю предлагается самостоятельно получить уравнения равновесия такой среды в скоростях. Внимание к этой теории вызвано тем, что чаще всего в задачах прочности интерес имеет поле напряжений, а запись оператора равновесия такой среды в напряжениях для плоского случая с точностью до констант совпадает с аналогичным оператором для континуума Коссера, но знания граничных микропеременных, как для последнего, здесь не требуется.

Континуум Коссера используют в задачах деформирования ферромагнитных сред в магнитном поле и распространения волн с длиной, сопоставимой с характерным размером частиц (“оптический диапазон”). Имеет смысл использовать его в случаях, когда необходимо описать собственное вращение частиц, существенно отличающееся от вихревого движения в данном месте. В одном из заключительных разделов будет показано, что дополнительные степени свободы этого континуума стабилизируют материал, неустойчивый к аффинному

---

<sup>43</sup> Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // ФТТ. 1964. Т.6, N9.

Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1964. Т.29, N2. С.297-308.

Аэро Э.Л. Краевая задача асимметрической теории упругости в квазиклассическом приближении // ПММ. 1972. Т.36, N2. С.282-290.

формоизменению, и способны организовывать поля в пространственные структуры в момент потери устойчивости.

**Двойной континуум** основан на идее взаимопроникающих континуумов и, вероятно, является простейшим их экземпляром. Исторический обзор континуумов-смесей дан в<sup>44</sup>; работа<sup>45</sup> интересна тем, что в ней к двойному континууму автор подошел от кристаллической решетки, что делает ясным физический смысл этого континуума.

Представим себе элементарный объем состоящим из двух подсистем материальных точек, одинаковых по физическим свойствам, но имеющих индивидуальные степени свободы. Таким образом, имеем две компоненты, характеризующиеся независимо определяемыми перемещениями  $\mathbf{u}_j$ , напряжениями

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_j = \hat{\mathbf{t}}_j, \quad (26)$$

массовыми силами  $\mathbf{f}_j$ ; плотности массы компонент для простоты будем считать одинаковыми. Уравнения баланса количества движения для обеих компонент запишутся

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \hat{\rho} \mathbf{f}_1 + \boldsymbol{\tau}_1 &= \hat{\rho} \dot{\mathbf{v}}_1, \\ \hat{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \hat{\rho} \mathbf{f}_2 + \boldsymbol{\tau}_2 &= \hat{\rho} \dot{\mathbf{v}}_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Силы  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$ , в отличие от  $\mathbf{f}_1$  и  $\mathbf{f}_2$ , являются внутренними силами взаимодействия компонент; равновесие сил всего элементарного объема требует

$$\boldsymbol{\tau}_1 = -\boldsymbol{\tau}_2 \equiv \boldsymbol{\tau}. \quad (28)$$

В рассматриваемой ситуации нет оснований считать тензоры напряжений симметричными, поскольку подсистемы элементарного объема могут действовать друг на друга моментами; равновесие моментов всего элементарного объема требует

$$[\boldsymbol{\sigma}_1] = -[\boldsymbol{\sigma}_2] \equiv [\boldsymbol{\sigma}]. \quad (29)$$

Найдем выражение для локальной плотности скорости совершения работы элементарного объема. Записывая определение (5) для данного континуума

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{w} d\hat{V} &= \int_{\hat{V}} \hat{\rho} (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v}_2) d\hat{V} + \int_{\hat{S}} (\hat{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2) d\hat{S} - \\ &\quad - \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \frac{1}{2} \hat{\rho} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) d\hat{V} \end{aligned}$$

и используя (26) и теорему Гаусса - Остроградского, мы получим

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \hat{\rho} \mathbf{w} d\hat{V} &= \int_{\hat{V}} (\hat{\rho} ((\mathbf{f}_1 - \dot{\mathbf{v}}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (\mathbf{f}_2 - \dot{\mathbf{v}}_2) \cdot \mathbf{v}_2) + \\ &\quad + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\sigma}_1 : \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{V}} + (\hat{\mathbf{V}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 : \mathbf{v}_2 \hat{\mathbf{V}}) d\hat{V}. \end{aligned} \quad (30)$$

Сворачивая далее уравнения (27) с  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  с учетом (28)

<sup>44</sup> Рушицкий Я.Я. Элементы теории смеси. Киев: Наукова думка, 1991. 160 с.

<sup>45</sup> Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой // Успехи механики. 2002. Т.1, N3. С.130-176.

$$(\hat{\nabla} \cdot \sigma_1) \cdot v_1 + \hat{\rho}(f_1 - \dot{v}_1) \cdot v_1 = -\tau \cdot v_1,$$

$$(\hat{\nabla} \cdot \sigma_2) \cdot v_2 + \hat{\rho}(f_2 - \dot{v}_2) \cdot v_2 = \tau \cdot v_2$$

и используя полученные равенства в (30), получаем

$$\hat{\rho}w = \sigma_1 : v_1 \hat{\nabla} + \sigma_2 : v_2 \hat{\nabla} + \tau \cdot (v_2 - v_1).$$

При помощи (29) этот результат представим в виде

$$\hat{\rho}w = \{\sigma_1\} : D_1 + \{\sigma_2\} : D_2 + \sigma_x \cdot (\omega_1 - \omega_2) + \tau \cdot (v_2 - v_1), \quad (31)$$

в котором ясно просматриваются пары сопряженных и независимых от системы отсчета переменных. Если в группе симметрии среды имеется инверсия, то линейно-вязкие определяющие соотношения должны иметь структуру

$$\{\sigma_1\} = A : D_1 + B : D_2,$$

$$\{\sigma_2\} = B : D_1 + A : D_2,$$

$$\sigma_x = S \cdot (\omega_1 - \omega_2) + K \cdot (v_2 - v_1),$$

$$\tau = K \cdot (\omega_1 - \omega_2) + S \cdot (v_2 - v_1).$$

В случае линейной упругости скорости перемещений, вращений и деформации скорости заменяются перемещениями, малыми вращениями и малыми деформациями.

Рассмотрим изотропную двойную линейно-упругую среду с нелинейным по относительным перемещениям взаимодействием компонент

$$\sigma_1 = \mu_1 \varepsilon_1 + \lambda_1 \text{sp} \varepsilon_1 I + \mu_2 \varepsilon_2 + \lambda_2 \text{sp} \varepsilon_2 I,$$

$$\sigma_2 = \mu_1 \varepsilon_2 + \lambda_1 \text{sp} \varepsilon_2 I + \mu_2 \varepsilon_1 + \lambda_2 \text{sp} \varepsilon_1 I, \quad (32)$$

$$\tau = \tau(u_2 - u_1)$$

и полагая несущественность их моментного взаимодействия

$$\sigma_x \equiv 0.$$

Уравнения равновесия в скоростях для такой среды примут вид

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + \tau(u_2 - u_1) = 0,$$

$$L_1 u_2 + L_2 u_1 - \tau(u_2 - u_1) = 0,$$

где  $L_i$  — операторы Ламе с модулями  $\mu_j, \lambda_j$ . Образова из этих уравнений полуразность и полусумму, можно их разделить:

$$(L_1 + L_2)u = 0,$$

$$(L_2 - L_1)u' + \tau(u') = 0, \quad (33)$$

где

$$u \equiv \frac{1}{2}(u_2 + u_1), \quad u' \equiv \frac{1}{2}(u_2 - u_1).$$

Первое из уравнений есть обычное уравнение равновесия линейно-упругой среды в макроперемещениях, второе есть нелинейное уравнение Гельмгольца для относительных микроперемещений.

Пусть в качестве двойной среды рассматривается кристаллическая решетка, нечетные атомные слои которой формально отождествим с одной подсистемой, а

четные — со второй. Эквивалентность физических свойств и плотностей обеих подсистем очевидна. Взаимодействие атомов решетки соответствует некоторому существенно нелинейному потенциалу и определяет как упругие свойства подрешеток, так и деформационное и трансляционное их взаимодействие. Малая деформация  $\epsilon_1$  одной из подрешеток (вторая свободна) потребует приложения к ней напряжений

$$\sigma_1 = \mu_1 \epsilon_1 + \lambda_1 sp \epsilon_1 I$$

и вызовет во второй деформации, определяемые из уравнения

$$\mu_1 \epsilon_2 + \lambda_1 sp \epsilon_2 I = -\mu_2 \epsilon_1 - \lambda_2 sp \epsilon_1 I.$$

Конечное смещение  $u_2 - u_1$  одной из подрешеток относительно второй как жестких тел потребует приложения силы

$$\tau = \tau(u_2 - u_1).$$

Рельеф силовой функции  $\tau$  монотонностью не обладает: возрастая от нулевого значения до половины периода решетки, он затем убывает до периода. Глобально этот силовой рельеф должен быть периодическим, т.к. в такой системе возможны перескоки. Уравнение  $(33)_2$  при использовании профиля  $\tau$  с горбом при достижении силой максимального значения описывает появление пространственно-периодических локализованных всплесков (рис. 1), т.е. образование микроструктуры периодически расположенных перескоков атомов, которые могут иметь трактовку на языке дислокаций. Если же использовать синусоидальный профиль  $\tau$ , то уравнение синус-Гельмгольца  $(33)_2$  позволит описать череду структурных превращений вплоть до хаоса<sup>7</sup>. Макроскопически же эта среда подчиняется линейно-упругим уравнениям равновесия с эффективными модулями  $\mu_1 + \mu_2$  и  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

## Мартенситные превращения

*Мартенситными* называют полиморфные (фазовые) превращения, идущие без участия диффузии. Мы ограничимся превращениями, идущими под действием приложения температуры и напряжений. Низкотемпературную фазу называют обычно *мартенситом*, а высокотемпературную — *аустенитом*. Ниже излагаются некоторые элементы теории мартенситных превращений по работе<sup>46</sup>.

Известно, что на микроскопическом уровне атомные решетки мартенситной и аустенитной фаз в месте их соприкосновения когерентны (т.е. расположенные в этом месте атомы принадлежат обеим решеткам), поэтому на сплошнородном уровне на межфазной границе непрерывны перемещения и сама граница является сингулярной поверхностью первого порядка.

Благодаря своей бездиффузионности мартенситных превращений участвующие в превращении атомы могут испытывать очень небольшие (меньшие размера элементарной решетки) смещения с высокой (сравнимой со скоростью звука в данной решетке) скоростью. В пионерских экспериментах Г.В. Курдюмова и Л.Г. Хандроса показано, что мартенситные превращения могут происходить квазистатически. Для этого в каждый момент времени малая порция элементарных ячеек одной решетки трансформируется с высокой скоростью в элементарные ячейки другой решетки. Здесь мы будем рассматривать только такие (квазистатические) превращения.

Дополнительно примем упрощающие ограничения (от которых можно при желании отказаться), что каждая из двух фаз есть идеально упругое тело, температура однородна по телу, на тело не действуют массовые силы.

Первое начало термодинамики для тела имеет вид

$$\dot{U} = \int_{\hat{S}} \hat{n} \cdot \sigma \cdot v d\hat{S} + Q, \quad (1)$$

( $Q$  — скорость поступления к телу теплоты) а второе начало термодинамики запишем в форме

$$T\dot{S} = Q + \theta, \quad \theta \geq 0 \quad (2)$$

( $\theta$  — скорость производства энтропии). Путем исключения  $Q$  из (1), (2) и переходя к свободной энергии  $F = U - TS$  получим

$$\dot{F} = \int_{\hat{S}} \hat{n} \cdot \sigma \cdot v d\hat{S} - S\dot{T} - \theta. \quad (3)$$

Для дальнейшего нам будет удобно “снести” интеграл в (3) к отсчетной конфигурации:

$$\int_{\hat{S}} \hat{n} \cdot \sigma \cdot v d\hat{S} = \int_S n \cdot P \cdot v dS. \quad (4)$$

<sup>46</sup> Вакуленко А.А. О микро- и макрокинетики мартенситных превращений // МТТ. 2001 N.5. С. 43-62.

Тело состоит из двух фаз, разделенных не обязательно связной межфазной границей  $\sigma$ . Поскольку фазы представляют собой идеально упругие среды, диссипация в каждой из них отсутствует и (3), (4) дает

$$\begin{aligned}\dot{F}_1 &= \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS - S_1 \dot{T} - \int_{\sigma} \rho f_1 d\sigma, \\ \dot{F}_2 &= \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS - S_2 \dot{T} + \int_{\sigma} \rho f_2 d\sigma,\end{aligned}\tag{5}$$

где  $S_i$  — полная граница  $i$ -й фазы,  $f_i(\mathbf{F}, T)$  — массовая плотность свободной энергии  $i$ -й фазы ( $\mathbf{F}$  — упругий аффинор,  $T$  — температура),  $\mathbf{c}$  — скорость точки прообраза межфазной границы в отсчетной конфигурации (1 соответствует исходной фазе, а 2 — растущей). Одна часть  $S_i | \sigma$  полной границы  $i$ -й фазы представляет собой границу тела, а другая  $\sigma$  — межфазную границу, поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{S_1 | \sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_+ \cdot \mathbf{v}_+ d\sigma, \\ \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{S_2 | \sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_- \cdot \mathbf{v}_- d\sigma,\end{aligned}\tag{6}$$

где знаками  $+$  и  $-$  помечены предельные значения полей при подходе к межфазной границе со стороны исходной и растущей фаз. Конечно

$$\begin{aligned}\int_{S_1 | \sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{S_2 | \sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS, \\ F_1 + F_2 &= F, \\ S_1 + S_2 &= S.\end{aligned}$$

С использованием этих соотношений из (5), (6) получаем

$$\dot{F} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS - S \dot{T} - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot ([\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}] + \rho [f] \mathbf{c}) d\sigma,\tag{7}$$

где  $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}\mathbf{n}$ . Сравнивая (7) с (3), получаем

$$\theta = \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot ([\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}] + \rho [f] \mathbf{c}) d\sigma,\tag{8}$$

т.е. диссипация при мартенситном превращении сосредоточена на межфазной границе.

Далее преобразуем  $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}] = [t_n \cdot \mathbf{v}]$ . Поскольку межфазная граница есть сингулярная поверхность первого порядка, имеет место кинематическое соотношение (см. (9') раздела "Поверхности разрыва")

$$[\mathbf{v}] = -[\mathbf{F}] \cdot \mathbf{c}.\tag{9}$$

Динамическое ограничение на сингулярной поверхности первого порядка при условии квазистатичности процесса (пренебрежении силами инерции) имеет вид (см. (20) раздела "Поверхности разрыва")

$$[t_n] = 0.\tag{10}$$

С использованием этих соотношений

$$[t_n \cdot v] = t_{n+} \cdot [v] = -t_{n+} \cdot [F] \cdot c = -n \cdot [P \cdot F] \cdot nc. \quad (11)$$

Вместе с (11) (8) принимает вид

$$\theta = \int_{\sigma} n \cdot [fI - \rho^{-1}P \cdot F] \cdot nc \rho d\sigma. \quad (12)$$

В интегральном выражении производства энтропии (12) следует считать  $c$  локальным потоком, а  $n \cdot [fI - \rho^{-1}P \cdot F] \cdot n$  — термодинамической силой. В рамках термодинамики необратимых процессов мы можем записать кинетическое определяющее соотношение

$$c = \alpha n \cdot [fI - \rho^{-1}P \cdot F] \cdot n, \quad (13)$$

где  $\alpha > 0$  из ограничения неотрицательности производства энтропии. Фазы локально находятся в равновесии, если

$$n \cdot [fI - \rho^{-1}P \cdot F] \cdot n = 0. \quad (14)$$

Выражение  $\mu_n \equiv n \cdot (fI - \rho^{-1}P \cdot F) \cdot n$  уместно назвать (“приграничным”) химическим потенциалом, тогда (14) записывается в привычном виде

$$\mu_{n+}(F, T) = \mu_{n-}(F, T).$$

В литературе встречается также достаточное условие равновесия фаз

$$[fI - \rho^{-1}P \cdot F] = 0, \quad (15)$$

где тензор второго ранга  $fI - \rho^{-1}P \cdot F$  именуют “тензором химического потенциала”. В геометрически линейном случае этот тензор равен  $fI - \rho^{-1}\sigma$ .

## Анализ размерностей

Ученые часто сталкиваются с задачей построения математической модели явления настолько нового, необычного и сложного, что для него еще не найден удовлетворительный механизм и не установлены балансовые и определяющие уравнения. В этих случаях главную роль играют экспериментальные методы исследования, дающие возможность установить простейшие опытные факты. Постановка же эксперимента требует предварительного теоретического анализа. Возможность такого предварительного анализа дает теория размерности и подобия<sup>47</sup>. Несмотря на свою простоту и эффективность, этот анализ, конечно, требует от исследователя определенного опыта и проникновения в сущность изучаемого явления. Самый замечательный итог применения анализа размерности и подобия заключается в том, что он оказывается достаточным для установления особого класса автомодельных решений математической формулировки задачи, отражающих глубокие физические закономерности изучаемого явления. Сформулируем суть метода и приведем несколько примеров его применения.

Пусть имеется какая-то зависимость, определяющая величину  $a$  в функции  $n$  параметров  $a_1, \dots, a_n$ :

$$a = f(a_1, \dots, a_n). \quad (1)$$

Если эта зависимость имеет физическое содержание, то соотношение (1) должно отражать тот бесспорный факт, что хотя числа  $a, a_1, \dots, a_n$  выражают значения соответствующих величин в определенной системе единиц измерения, физическая закономерность, которую это соотношение представляет, не зависит от произвола при выборе единиц измерения. Анализ размерностей основан на физически содержательном утверждении,

сформулированным Э. Бэкингэмом и известным как *П-теорема*:

Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой размерной величины от размерных определяющих параметров. Эта зависимость может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.

Следует отметить, что П-теорема интуитивно вполне очевидна и ее неявное использование началось задолго до того, как она была явно сформулирована и формально доказана. В этой связи следует прежде всего назвать имена Ньютона, Фурье, Максвелла, Рейнольдса, Релея. Практический выигрыш при обработке экспериментальных данных, даваемый этой теоремой, очевиден. Пусть для

---

<sup>47</sup> Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука-Физматлит, 1987. 432с.

выяснения зависимости некоторой величины  $a$  от некоторого определяющего параметра  $a_j$  надо измерить эту величину при десяти значениях данного аргумента. Тогда для экспериментального определения величины  $a$  как функции  $n$  определяющих параметров  $a_1, \dots, a_n$  нужно произвести  $10^n$  экспериментов. Согласно П-теореме, если все величины  $a, a_1, \dots, a_n$  выражаются через  $k$  независимых размерностей, дело сводится к определению функции  $n - k$  безразмерных аргументов, для нахождения которой достаточно  $10^{n-k}$  опытов, т.е. в  $10^k$  раз меньше! Трудоемкость определения искомой функции сокращается на столько порядков, сколько среди определяющих параметров величин с независимыми размерностями.

Применение П-теоремы включает следующую последовательность действий. Разобьем величины  $a_1, \dots, a_n$  на две группы. В первую группу  $a_1, \dots, a_k$  включаются определенные величины с независимыми размерностями (например, длина, скорость, плотность и т.д.). Во вторую группу  $a, a_{k+1}, \dots, a_n$  входят величины, размерности которых можно выразить через размерности величин первой группы. То есть

$$a \sim a_1^p, \dots, a_k^q, \quad a_{k+1} \sim a_1^{p_{k+1}}, \dots, a_k^{q_{k+1}}, \dots, \quad a_n \sim a_1^{p_n}, \dots, a_k^{q_n}$$

(здесь  $p, q, p_i, q_i$  — показатели степени). При этом величины

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p, \dots, a_k^q}, \quad \Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}}, \dots, a_k^{q_{k+1}}}, \dots, \quad \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{p_n}, \dots, a_k^{q_n}}$$

оказываются безразмерными, т.к. их значения будут одними и теми же при любом выборе системы единиц измерения. Независимость закономерности, имеющей физический смысл, от выбора единиц измерения означает, что соответствующее ей соотношение (1) можно представить в виде

$$\Pi = f(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}).$$

Уменьшение числа аргументов упрощает исследование, иногда — существенно. Рассмотрим показательный пример.

В 1909-1911 годах специалисты в области физической химии Э. Бозе, Д. Рауэрт и М. Бозе опубликовали серию экспериментов. Ими изучалось время  $\tau$  заполнения сосуда данного объема  $Q$  и перепад давления  $P$  на концах трубки при стационарном протекании через трубку различных жидкостей: воды, хлороформа, бромформа, ртути. Результаты опытов были представлены в виде серии зависимостей перепада давления от времени заполнения для разных жидкостей (рис. 1, а).

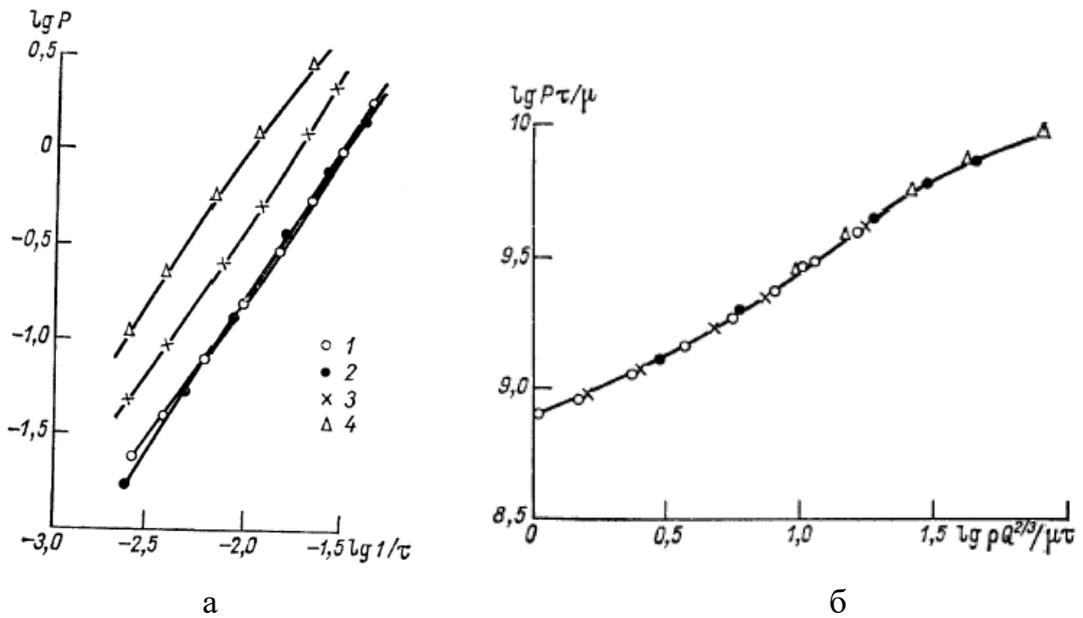


Рис. 1. Результаты опытов Бозе-Рауэрта а) в исходном виде, б) в интерпретации Кармана (1 - вода, 2 - хлороформ, 3 - бромформ, 4 - ртуть)<sup>48</sup>.

Эти работы были замечены Теодором фон Карманом, который исследовал их с точки зрения анализа размерностей. Рассуждения Кармана можно представить следующим образом: перепад давления  $P$  на концах трубки должен зависеть от времени заполнения сосуда  $\tau$ , объема сосуда  $Q$  и свойств жидкости (коэффициента вязкости  $\mu$  и плотности  $\rho$ ):

$$P = f(\tau, Q, \mu, \rho)$$

(в данном случае  $n=4$ ). Размерности параметров в классе  $MLT$  (масса, длина, время) выражаются следующими соотношениями:

$$[P] = M / LT^2, \quad [\tau] = T, \quad [Q] = L^3, \quad [\rho] = M / L^3.$$

Легко увидеть, что первые три размерности определяющих параметров  $\tau, Q, \mu$  имеют независимые размерности, размерность же четвертого параметра  $\rho$  выражается через размерности первых трех

$$[\rho] = [\mu][\tau][Q]^{-2/3}$$

Таким образом,  $k=3, n-k=1$  и анализ размерности дает

$$\Pi = f(\Pi_1), \quad \Pi = P / (\mu \tau^{-1}), \quad \Pi_1 = \rho / (\mu \tau Q^{-2/3}).$$

Следовательно, в координатах  $\Pi, \Pi_1$  все опытные точки должны лечь на единую кривую. Этот вывод отлично подтвердился (рис. 1, б). Ясно, что заранее проведенный анализ размерностей мог бы сократить объем экспериментальной работы во много раз.

<sup>48</sup> Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, — Л.: Гидрометеиздат, 1982. 255с.

Интересен также следующий пример. При атомном взрыве в весьма малой области (точке) практически мгновенно выделяется значительная энергия  $E$ . От центра взрыва распространяется мощная ударная волна, давление за которой вначале составляет сотни тысяч атмосфер. Это давление много больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на первой стадии взрыва можно пренебречь. Таким образом, радиус фронта ударной волны  $r$  через промежуток времени  $\tau$  после взрыва зависит от  $E, \tau$  и начальной плотности воздуха  $\rho$ :

$$r = f(E, \tau, \rho).$$

Таким образом,  $n = 3$ , а размерности определяющих параметров суть:

$$[E] = ML^2 / T^2, \quad [\tau] = T, \quad [\rho] = M / L^3.$$

Легко видеть, что  $k = 3, n - k = 0$ , так что функция  $f$  в выражении  $\Pi = f(\Pi_{n-k}, \dots, \Pi_n)$  не зависит ни от одного из аргументов, т.е.  $f = \text{const}$ . Далее нетрудно доказать, что

$$\Pi = r(E\tau^2 / \rho)^{-1/5},$$

откуда

$$r = \text{const}(E\tau^2 / \rho)^{1/5}.$$

Эта формула показывает, что если измерить тем или иным способом радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах  $(\frac{5}{2} \lg r, \lg \tau)$  экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2} \lg r = \frac{5}{2} \lg(\text{const} E^{1/5} \rho^{-1/5}) + \lg \tau,$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил в 1950 году Дж. Тэйлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских испытаний ядерного взрыва в Нью-Мексико в 1945 году (рис. 2). Значение  $\text{const}$  оказалось приближенно равным единице. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта от времени Тэйлор определил энергию взрыва, оказавшуюся равной примерно  $10^{17}$  Дж.

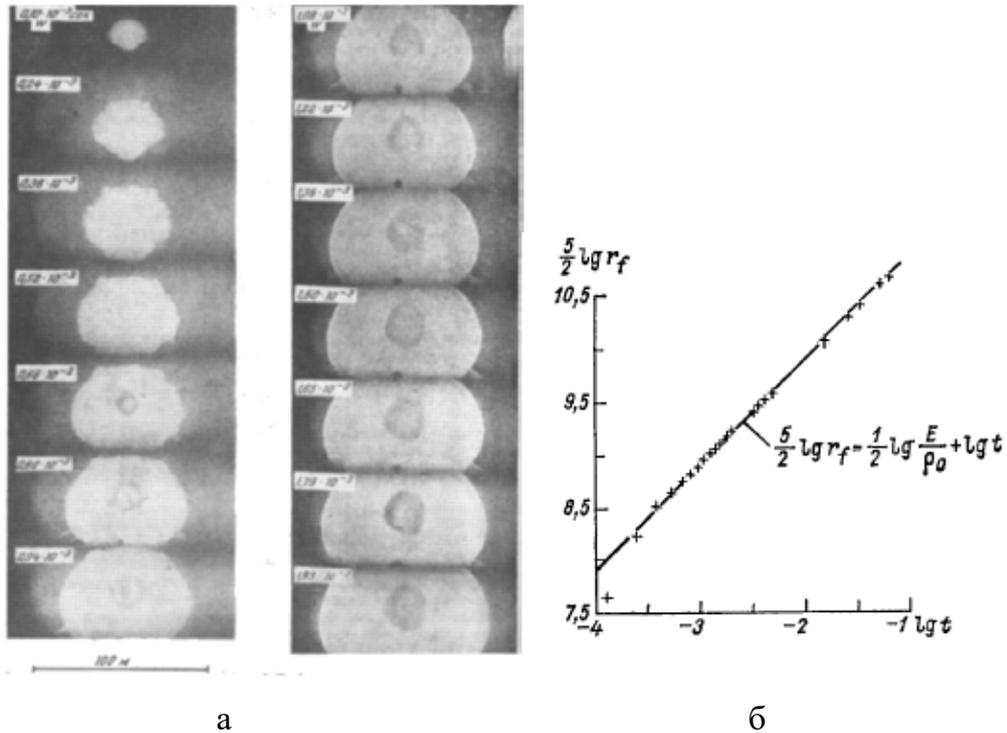


Рис. 2. Распространение ударной волны при ядерном взрыве: а) последовательные фотографии огненного шара; б) опытные данные из кинофильма ложатся на прямую автомодельного решения<sup>1</sup>.

Приведем еще один скорее забавный пример применения анализа размерностей: “докажем” с его помощью теорему Пифагора. Площадь прямоугольного треугольника  $S$  определяется величиной его гипотенузы  $c$  и для определенности меньшим из его острых углов  $\vartheta$ , причем из анализа размерности следует  $S = c^2 f(\vartheta)$ ,  $f$  — функция, значения которой безразмерны. Высота, перпендикулярная гипотенузе, разбивает основной треугольник на два подобных ему прямоугольных треугольника. Очевидно, что их площади  $S_1 = a^2 f(\vartheta)$ ,  $S_2 = b^2 f(\vartheta)$ . Поскольку  $S = S_1 + S_2$ , то  $a^2 f(\vartheta) + b^2 f(\vartheta) = c^2 f(\vartheta)$ , откуда  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Применение анализа размерностей к конкретным явлениям требует их понимания и некоторого опыта. Ограничиваясь здесь изложением идеи метода, мы отошлем читателя еще к двум небольшим книгам<sup>49</sup>.

<sup>49</sup> Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: РХД, 2001. 148 с.  
Хантли Г. Анализ размерностей. М: Мир, 1970. 175 с.

## Образование фрагментов ротации решетки при больших деформациях металлов

Явление возникновения фрагментированной структуры разориентаций решетки описано в <sup>50,51</sup>. Соответствующие опыты проводились квазистатически, образцы подвергались одноосным растяжению или сжатию (прокатке). Материал — металлические поликристаллы с обычным размером зерна (десятки микрометров), ГЦК решеткой и достаточно высокой энергией дефекта упаковки. При больших пластических деформациях и напряжениях наблюдалось дробление зерен поликристалла на объемы с последующим взаимным разворотом их кристаллической решетки. Этот процесс происходил на фоне стабилизировавшейся дислокационной ячеистой структуры, поэтому авторы <sup>2</sup> назвали данные фрагменты блоками ячеек и схематически изобразили их в виде рис. 1. Подобную картину можно видеть и на микрофотографиях рис. 12 в работе <sup>1</sup>. Размер дислокационных ячеек — порядка десятых долей микрометра, размер же фрагментов — порядка микрометров, поэтому действительно можно видеть этот процесс как образование крупномасштабных блоков-фрагментов в среде, состоящей из гранул-ячеек. Взаимные развороты решетки ячеек — десятые доли градуса и практически случайны, взаимные же развороты решетки фрагментов постепенно достигают порядков градусов и десятков градусов.

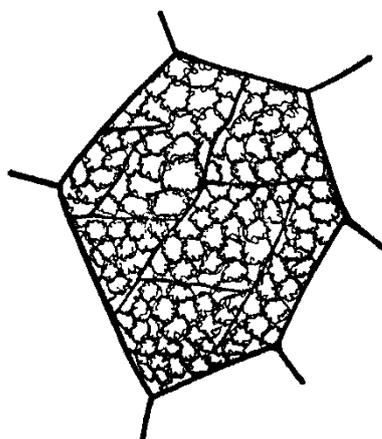


Рис. 1

---

<sup>50</sup> Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.

<sup>51</sup> Bay B., Hansen N., Hughes D.A, Kuhlmann-Wilsdorf D. Evolution of FCC deformation structures in polyslip // Acta Metall. Mater. 1992. V. 40, N 2. P. 205-219.

Необходимо отметить глубокую аналогию данного явления с возникновением пространственно-периодических вихревых структур при больших деформациях песка, пропитанного вязкой жидкостью (<sup>52</sup>, рис. 7.19).

В <sup>53</sup> предложено объяснение данного явления, основанное на следующих предположениях. 1. Среда в текущей напряженной конфигурации представляет собой плотный агрегат, состоящий из абсолютно жестких частиц, способных к малым трансляционным и вращательным движениям. Прототипом этих частиц являются дислокационные ячейки, а предположение об их жесткости в текущий момент означает замороженность в них кристаллической решетки. В гладком представлении такая среда представляет собой континуум Коссера. Для описания явления образования периодических вихревых структур важно, что этот континуум естественным образом учитывает вращения и содержит характерный размер. 2. Структурный переход в напряженной среде связан с потерей устойчивости локального аффинного формоизменения среды. В критический момент среда теряет способность сопротивляться нагрузке аффинным деформированием, и тогда начинают действовать неаффинные моды деформации, приводящие к появлению пространственно-модулированной структуры изгибов-кручений решетки. В частности, может сформироваться и ячеистая структура с чередующимися направлениями спинов, ведущая к образованию фрагментов разориентаций решетки.

Предполагается, что данный механизм работает в некотором объеме напряженной среды с размерами много большими характерного размера фрагментов и практически однородными свойствами и полями. При прочих условиях нельзя исключать и другие сценарии фрагментации, срабатывающие на более ранних стадиях нагружения.

Приведенное выше объяснение ограничено внешней, механической стороной явления, дающей вполне содержательное его описание. Внутренняя же, физическая картина происходящего на языке эволюции дислокационной и наддислокационной систем должна подстраиваться под данный сценарий.

Структурным переходам-бифуркациям в открытых нелинейных диссипативных системах посвящена обширная литература. Мы упомянем лишь классические труды Я.Д. Ван-дер-Ваальса и В.Л. Гинзбурга - Л.Д. Ландау, раскрывшие принципиальную роль градиента переменной состояния вблизи критической точки. Именно градиентный терм противоборствует силам, возникающим сразу за точкой локального максимума существенно нелинейной зависимости обобщенной силы от обобщенного перемещения, и усваивает

---

<sup>52</sup> Ревуженко А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ.

Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. 428 с.

<sup>53</sup> Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур // ПМТФ. 2002. Т.43. N2. С. 176-186.  
Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация геометрически-нелинейной моментной кристаллической среды // Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. N2. С. 105-115.

выделяющуюся при этом свободную энергию в виде возникающих структур. Концептуально похожим моделям образования структур в пластически деформируемых металлах посвящен обзор [4], а в [5] изучается существенно нелокальная модель даже со счетным числом критических точек, связанных с периодическим потенциалом атомной решетки кристалла.

Континуум Коссера естественным образом имеет градиентный терм. Выясним механизм неустойчивости. Экспериментально наблюдаемая стабилизация ячеистой структуры перед фрагментацией свидетельствует о падении модулей упрочнения, ибо напряжение течения немелкозернистых металлических поликристаллов однозначно связано со средним размером дислокационных ячеек экспериментальным соотношением Печа - Холла. При достаточно малых величинах модулей упрочнения и достаточно больших нагрузках неустойчивость может быть вызвана локальными изменениями геометрии [6], что подтверждается экспериментальными исследованиями для металлов [7]. При этом максимум достигается на кривой зависимости номинальных напряжений от деформаций; вслед за этой точкой кривая падает. Именно падение номинальных (а не истинных) напряжений следует считать критическим событием для упруго-пластических задач в геометрически-нелинейной постановке [8,9]. Кроме того, данный тип нелинейности не предполагает каких-либо перескоков и позволяет ограничиться изучением линеаризованных уравнений равновесия вблизи единственной точки максимума.

Полагается, что среда в текущей напряженной конфигурации  $K_t$  имеет однородно распределенные свойства и однородные поля ориентаций решетки и перемещений частиц, находящиеся в равновесии под действием приложенного напряжения. Записываются линеаризованные уравнения динамики для возмущений этих полей вблизи  $K_t$ . Тривиальные решения таких уравнений будут соответствовать «основному», невозмущенному состоянию тела, однако нас будут интересовать нетривиальные, «отклоненные» решения и условие их появления. Хотя для изучения упруго-пластических систем обычно используют бифуркационный или энергетический подходы, одна специализация формулируемой ниже модели соответствует циркуляционным системам, единственным надежным методом анализа которых является динамический подход [10], чем и оправдывается его использование здесь.

Мы ограничимся двумерным случаем. В  $K_t$  определяется декартова ортогональная система материальных координат с ортобазисом  $e_\alpha$  (здесь и далее греческие индексы изменяются по модулю 2, латинские — по модулю 3). В терминах этой системы координат и записываются линеаризованные уравнения динамики и состояния. То есть, используется текущий лагранжев подход, а инкрементально-линейные балансовые и определяющие уравнения записываются в скоростях возмущений. Здесь нам потребуются определяющие уравнения ветви активного нагружения упруго-пластической среды, соответствующие наиболее

опасной бифуркации [8,9,12]. Принимается также гипотеза о несжимаемости металла.

Уравнения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\sigma} &= \rho \ddot{\mathbf{v}}, \\ \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\mu}} - \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\epsilon} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= J \ddot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \quad (1)$$

получаются материальным дифференцированием уравнений динамики континуума Коссера с учетом искажения конфигурации, вызванного мгновенным движением материала:

$$\dot{\nabla} = -(\nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla.$$

В (1)  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  — тензоры напряжений и моментов-пар,  $\nabla \equiv \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha$  — набла-вектор,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости трансляции частицы,  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$  — вектор угловой скорости частицы, представимый также через антисимметричный тензор спина  $\boldsymbol{\Omega} \equiv -\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ,  $\rho$  и  $J$  — плотности массы и момента инерции частицы.

Структура инкрементально-линейных определяющих уравнений аффинного искажения поля перемещений

$$\boldsymbol{\sigma}^\nabla = \mathbf{H} : (\nabla \mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}) - p \mathbf{I}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}$  — тензор жесткостей,  $\mathbf{I} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ,  $p = -\frac{1}{2} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}$  — гидростатическое давление, выяснена в разделе “Обобщенные континуумы”. Вид производной  $\nabla$  определяется мгновенной скоростью поворота диад  $\mathbf{M}_k$ , зависящей главным образом от локальной кривизны частиц в точке их касания. Мы выделим два крайних случая. Для одинаковых круглых частиц поворот касательной и нормали в точке контакта определяется только  $\mathbf{W}$  — вихрем поля скоростей их *трансляции*:

$$\dot{\mathbf{M}}_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \cdot \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T),$$

и под  $\nabla$  нужно понимать яуманнову производную, а для одинаковых частиц-параллелограммов — только средней скоростью их *вращения*:

$$\dot{\mathbf{M}}_k = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M}_k - \mathbf{M}_k \cdot \boldsymbol{\Omega},$$

дающую коротационную производную, построенную на спине  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Инкрементально-линейные определяющие уравнения аффинного искажения поля скоростей вращений

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{D} \circ \nabla \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{D}$  — тензор жесткостей, также ранее была получена.

Уравнения (1-3) представляют собой замкнутую систему. Далее мы будем выделять специализации модели и с яуманновой, и со спиновой коротационными производными.

В качестве модельной задачи рассматривается неограниченная плоская среда с однородно распределенными материальными свойствами под действием однородного поля сжимающего напряжения  $\sigma_{22} \equiv -\sigma$  ( $\sigma \geq 0$ ) вдоль оси  $\mathbf{e}_2$ . Тогда в  $K$   $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^T$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ,  $\nabla \boldsymbol{\sigma} = \nabla \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{e}_\alpha$  есть собственные векторы тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ , сам он



Разыскиваются ограниченные на бесконечности решения системы (4) общего вида

$$\phi = \text{Re}[\phi_0 \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + w t)], \quad \omega = \text{Re}[\omega_0 \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + w t)], \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{0} \quad (5)$$

где  $\text{Re}$  — действительная часть числа,  $\phi_0, \omega_0$  — комплексные амплитуды,  $i$  — мнимая единица,  $\mathbf{k}$  — вещественный волновой вектор,  $w$  — комплексная скорость. Случай  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  исключается, поскольку он означает движение среды как жесткого целого и не соответствует образованию структуры. Линии  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k \text{const}$ ,  $k = |\mathbf{k}|$  являются характеристиками координатной части оператора при  $\bar{\lambda} = 0$ . Вектор  $\mathbf{k} = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha$  представляется как  $k_\alpha = k \{-\sin\delta, \cos\delta\}$ , где  $\delta$  — угол наклона такой характеристики относительно  $\mathbf{e}_1$ ; обозначим  $\cos 2\delta \equiv x$ , в силу симметрии задачи  $0 < x \leq 1$ .

Подстановка (5) в (4) ведет к однородной линейной алгебраической системе относительно  $\phi_0, \omega_0$ , условие существования ненулевого решения которой означает условие существования нетривиальных решений (5) и записывается в виде

$$\rho \bar{J} w^4 + c w^2 + d = 0, \quad (6)$$

где  $c = \rho(1 + \bar{\lambda} k^2) + \bar{J}[(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3 - \sigma x]k^2$ ,

$$d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3 - \sigma x](1 + \bar{\lambda} k^2)k^2 - \mu_3 k^2$$

для модели с яуманновой производной и

$$c = \rho(1 + \bar{\lambda} k^2) + \bar{J}[(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3]k^2,$$

$$d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3](1 + \bar{\lambda} k^2)k^2 - (\sigma x + \mu_3)k^2$$

для модели со спиновой производной. Решения (6) имеют вид

$$w_\pm^2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\rho \bar{J} d}}{2\rho \bar{J}}. \quad (7)$$

В (7)  $c^2 - 4\rho \bar{J} d > 0$ , что показывается элементарно для обеих моделей.

Коэффициент  $d$  меняет знак с положительного на отрицательный в точке

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1)x + [\mu_1 + \mu_3 - \frac{\mu_3}{1 + \bar{\lambda} k^2}] \frac{1}{x}, \quad (8a)$$

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1)(1 + \bar{\lambda} k^2)x + [\mu_1 + (\mu_3 + \mu_1)\bar{\lambda} k^2] \frac{1}{x}. \quad (8b)$$

Кроме того,  $c > 0$ : для первой модели заведомо в момент перехода  $d$  через ноль (выразить  $\sigma$  из  $c = 0$  и сравнить с (8a)), а для второй при любом напряжении.

При переходе  $\sigma$  через критическое значение одна пара сопряженных корней  $\pm \sqrt{w_+}$  движется по мнимой оси комплексной плоскости к нулю и, встретившись в нуле, уходит от него вдоль вещественной оси; вторая пара сопряженных мнимых корней  $\pm \sqrt{w_-}$  при этом постоянно удаляется от нуля. Это означает [10], что сразу

после критической точки развивается дивергентная (статическая) форма потери устойчивости.

Критическое значение  $\sigma$  находится минимизацией выражения (8) по  $0 < x \leq 1$  и  $k^2 > 0$ . При  $\mu_2 \leq 2\mu_1$  (сюда входит и случай изотропии  $\mu_2 = \mu_1$ ) в момент  $\sigma_0 = \mu_2$  появляется горизонтальная характеристика  $\delta_0 = 0$ , а при  $\mu_2 > 2\mu_1$  в момент  $\sigma_0 = 2\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}$  появляется пара характеристик под углами  $\pm \delta_0$ , где  $\delta_0 = \frac{1}{2} \arccos \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}} \leq \pi / 4$ . Минимум  $\sigma$  соответствует  $k^2 = 0$ , поэтому в критический момент не происходит образования структуры.

Однако сразу за критическим напряжением образуется структура, параметры которой  $x_*, k_*$  зависят от  $\sigma - \sigma_0 \equiv \Delta\sigma > 0$  и соответствуют максимуму скорости роста  $w_+ > 0$ . Вблизи критической точки (7) сводится к  $-d/c$ , причем  $|d| \ll c$  (см. выше), поэтому необходимо минимизировать  $d(x, k)$  или  $d(x, k^2)$ . Можно доказать, что качественно ничего не изменится, если выражения для  $d(x, k^2)$  сделать менее нелинейными, а именно пренебречь в них слагаемыми в виде произведения малого параметра  $k^4$  на степень  $x$ , в результате чего для обеих моделей мы придем к выражению

$$d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 - \sigma x]k^2 + (\mu_1 + \mu_3)\bar{\lambda}k^4. \quad (9)$$

Допустимые  $x, k^2$  располагаются в области  $d(x, k^2) < 0$  полосы  $0 < x \leq 1, k^2 > 0$ . Это условие эквивалентно

$$\bar{\lambda}k^2 < -\frac{(\mu_2 - \mu_1)x^2 - \sigma x + \mu_1}{\mu_1 + \mu_3}.$$

Поскольку  $\bar{\lambda}k^2 > 0$ , то  $(\mu_2 - \mu_1)x^2 - \sigma x + \mu_1 < 0$  и можно получить отсюда интервалы для  $x$ . При  $\mu_2 \leq 2\mu_1$   $x \in (x_-, 1]$ , а при  $\mu_2 \geq 2\mu_1$   $x \in (x_-, x_+)$ , где  $x_{\pm} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}}{2(\mu_2 - \mu_1)}$ . При  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  эти интервалы непрерывно стягиваются к точкам  $x_0 = 1$  и  $x_0 = \cos 2\delta_0$ . Это означает, что при малом превышении критического напряжения наклон характеристик изменяется также мало. Поэтому для случая  $\mu_2 \leq 2\mu_1$  мы будем полагать, что экстремальное значение  $w_+$  достигается на горизонтальной характеристике, т. е.  $x_* \approx 1$ , а волновое число соответствует локальному экстремуму (9) при  $x = 1$ . В результате имеем допустимые значения

$$k_*^2 \approx \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\Delta\sigma}{2(\mu_2 + \mu_3)}, \quad x_* \approx 1. \quad (10)$$

Для случая  $\mu_2 > 2\mu_1$  нам далее потребуются точные выражения для  $k_*^2$  и  $x_*$ ,

$$k_*^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{x_0 \Delta\sigma}{\mu_1 + \mu_3}, \quad x_* = \frac{\sigma}{2(\mu_2 - \mu_1)}, \quad (11)$$

соответствующие локальному экстремуму (9) в допустимой области  $x_- < x_* < x_+$ ,  $k_*^2 > 0$ . Нетрудно убедиться, что для (10) или (11)  $w_+^2 > 0$ .

При  $\mu_2 \leq 2\mu_1$  и любом напряжении  $\sigma$  сразу за критической точкой происходит образование стоячей волны вдоль оси сжатия с параметрами (10) (рис. 2а). При  $\mu_2 > 2\mu_1$  решение представляет собой суперпозицию двух стоячих волн нормально к характеристикам с параметрами (11). В частности, возможны ячеистые решения (рис. 2б). При переходе из любой ячейки в соседнюю спин решетки меняет свой знак, что позволяет считать данные ячейки «зародышами» субзерен. Бифуркация приводит к разориентации кристаллической решетки этих ячеек, то есть к фрагментации интересующего нас типа. Интересно, что в изотропной среде ( $\mu_2 = \mu_1$ ) ячеистые решения отсутствуют. То есть, анизотропия в модели важна для вида решения, а не для неустойчивости материала.

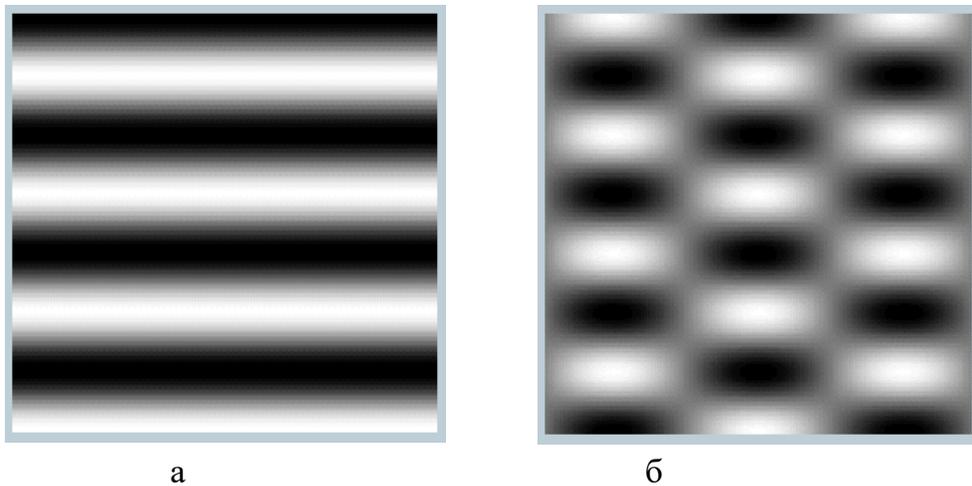


Рис. 2

Вид зависимости  $k^2(\Delta\sigma)$  (11)<sub>1</sub> позволяет предсказать некоторые начальные тенденции развития процесса. Сразу за точкой бифуркации  $k^2$  начинает расти от нулевого значения. При этом характерный размер  $k^{-1}$  фрагментов уменьшается, и когда он становится соизмеримым с характерным размером неоднородностей свойств материала, его изменение прекращается и происходит дальнейшая эволюция структуры фиксированного размера. Изгибная жесткость  $\bar{\lambda}$  не влияет на наклон характеристик, а является носителем масштаба  $k^{-1} \propto \sqrt{\bar{\lambda}}$ .

Уравнения (4) и полученные результаты одинаково справедливы для случаев сжатия силой  $-\sigma$  вдоль  $e_2$  или растяжения силой  $\sigma$  вдоль  $e_1$ , поскольку коммутатор коротационной производной  $\sigma^\nabla$  при этом не изменяется. Для описания различия критических напряжений в этих опытах за счет локальных геометрических эффектов не следует ограничиваться использованием именно коротационных производных, учитывающих только один механизм

дестабилизации материала за счет поворота его локального объема. Однако сформулированные здесь модели, использующие коротационные производные, показывают правильные тенденции формоизменения ячеек с ростом  $\sigma$  — их сплющивание вдоль оси сжатия  $e_2$  или вытягивание вдоль оси растяжения  $e_1$ , что видно из (11)<sub>2</sub>.

При действии на рассматриваемую среду в  $K$  произвольного симметричного напряженного состояния аффинная часть оператора равновесия, определяющая, как выяснено выше, точку бифуркации, наклон характеристик и симметрию образующейся структуры, принимает вид

$$\mu_2 \phi_{,1111} + 2[2\mu_1 - \mu_2] \phi_{,1122} + \mu_2 \phi_{,2222} - \sigma(\phi_{,2222} - \phi_{,1111}) + 2\tau(\phi_{,1112} + \phi_{,1222}) = 0 \quad (12)$$

где  $\sigma \equiv \sigma_{11} - \sigma_{22}$ ,  $\tau \equiv \tau_{12}$  будут без уменьшения общности полагаться положительными. В случае  $\tau = 0$  условие бифуркации принимает вид

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1) \cos 2\delta + \mu_1 / \cos 2\delta \quad (13)$$

а в случае  $\sigma = 0$  —

$$\tau = (\mu_1 - \mu_2) \sin 2\delta + \mu_2 / \sin 2\delta \quad (14)$$

Видно, что значения  $\tau_0, \delta_0$  для (14) могут быть получены из уже найденных значений  $\sigma_0, \delta_0$  для (13) заменой  $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$  и  $\cos \leftrightarrow \sin$ . В результате при  $\mu_1 \leq 2\mu_2$  (сюда входит и случай изотропии  $\mu_2 = \mu_1$ ) в момент  $\tau_0 = \mu_1$  оператор (12) теряет строгую эллиптичность с переходом в параболический режим с образованием характеристики под углом  $\delta_0 = \frac{\pi}{4}$ . При  $\mu_1 > 2\mu_2$  в момент  $\tau_0 = 2\sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2}$  этот оператор теряет строгую эллиптичность с переходом в гиперболический режим с образованием пары характеристик под углами  $\delta_0$  и  $\frac{\pi}{2} - \delta_0$ , где  $\delta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\mu_2 / (\mu_1 - \mu_2)} \leq \frac{\pi}{4}$ . Последний случай соответствует образованию скошенной ячеистой структуры (рис. 3). Такие структуры разориентаций кристаллической решетки типа скошенной шахматной доски часто наблюдают в экспериментах<sup>1,2</sup>.

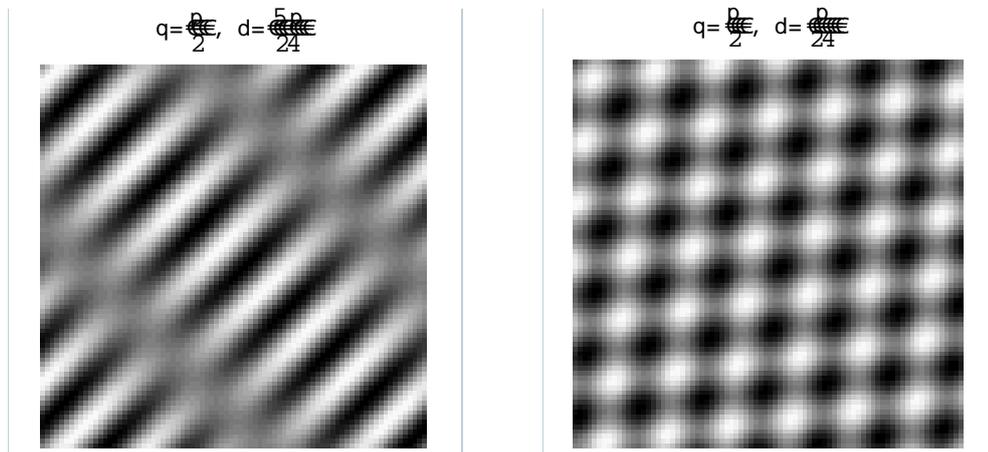


Рис. 3

Выясним смысл структурного перехода. Рассмотрим левую (координатную) сторону оператора (4), которую будем называть оператором равновесия. В последнем, полагая  $\bar{\lambda} = 0$ , можно выделить часть, отвечающую за аффинные формоизменения, которую будем называть аффинным оператором равновесия. При критическом напряжении аффинный оператор равновесия теряет строгую эллиптичность с переходом в параболический ( $\mu_2 \leq 2\mu_1$ ) или гиперболический ( $\mu_2 > 2\mu_1$ ) режимы и приобретает характеристики, при этом профиль решения вдоль  $\mathbf{k}/k$  не определяется этим оператором и может быть произвольным [13]. Переход через критическую точку соответствует изменению определенности аффинного оператора равновесия относительно полей (5). До момента бифуркации он положительно определенный (строго эллиптический), в момент бифуркации — вырожденный (параболический или гиперболический), а за точкой бифуркации становится отрицательно определенным. Сам оператор равновесия при этом переходе своей положительной определенности относительно полей (5) не меняет. В момент бифуркации неаффинная часть оператора равновесия (стоящая при  $\bar{\lambda}$ ) выделяет из произвольного профиля вдоль  $\mathbf{k}/k$  тривиальный (в (5) соответствующий  $k^2 = 0$ ), а за этим моментом — модулированный ( $k^2 > 0$ ), составляющие.

В изучаемой здесь модельной задаче принципиально, что коэффициенты оператора (4) не зависят от координат, в силу чего до критического момента аффинные моды полностью описывают продолжение процесса аффинного формоизменения тела, необходимости в неаффинных модах при этом нет. В критический момент аффинные моды изолируются, т. е. становятся неспособными отвечать приложенным нагрузкам в  $K$ , а за этим моментом аффинные моды даже порождают дополнительные к этим нагрузкам силы. И тогда начинают работать неаффинные моды, воспринимающие все эти нагрузки и изгибающие все поля, причем в угоду граничным условиям в виде гармонических волн. Последние и образуют структуру, в частности, ячеистого типа.

В предельном случае  $\bar{\lambda} = 0$  чисто аффинного оператора (исследованного в [6] для (4a)) в критический момент допускаются произвольные профили вдоль  $\mathbf{k}/k$ , составленные из базисных функций (5) с любыми  $k > 0$ , свободно уходящие от основного состояния со своими начальными скоростями. В закритический момент движение становится ускоренным, максимальную скорость приобретает мода с бесконечно большим количеством полуволн нормально к характеристикам, что фактически соответствует дезинтеграции среды на изолированные точки. При этом начиная с критического момента материал следует признать неспособным сопротивляться нагрузке, т. е. неустойчивым.

Понятие внутренней устойчивости материала (по отношению к аффинному формоизменению) определено в [8, 9, 12]. Запись этого определения в текущей конфигурации  $K$  тела имеет вид

$$2U_0 \equiv \sigma^H \circ \nabla \mathbf{v} > 0, \quad (15)$$

где  $\sigma^H$  — производная Хилла тензора напряжений Коши, равная материальной производной определенного в  $K$  тензора номинальных напряжений, для несжимаемых материалов принимающая вид  $\sigma^H \equiv \dot{\sigma} - \nabla \mathbf{v} \cdot \sigma$ . Именно в координатах номинальные напряжения — деформации кривая нагружения достигает своего пика в момент нарушения условия (15). Неравенство (15) исключает бифуркации в задачах на основе аффинного оператора равновесия с однородными коэффициентами и с граничными условиями на  $\mathbf{v}$ . Аффинная часть оператора (4), совпадающая с изученной в [6] моделью, имеет вид

$$[\mu_2 + \sigma] \phi_{,1111} + 2[2\mu_1 - \mu_2] \phi_{,1122} + [\mu_2 - \sigma] \phi_{,2222} = 0$$

и представляет собой уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U_0}{\partial \phi_{,11}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial U_0}{\partial \phi_{,12}} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial U_0}{\partial \phi_{,22}} = 0$$

для  $2U_0 = \frac{1}{2}[\mu_2 + \sigma] \phi_{,11}^2 - [\mu_2 + \sigma] \phi_{,11} \phi_{,22} + \frac{1}{2}[\mu_2 - \sigma] \phi_{,22}^2 + [2\mu_1 + \sigma] \phi_{,12}^2$ . При переходе через критическую точку значение  $U_0$  меняет свой знак с положительного на отрицательный, то есть до этой точки «энергия второго порядка» (15) аффинными деформациями усваивается, а за этой точкой — ими выделяется. Таким образом, до критической точки имеется канал рассеивания энергии, сообщаемой телу внешней нагрузкой, а за этой точкой этот канал исчезает, и даже высвобождается дополнительная энергия. Если тело имеет способности к неаффинному деформированию, то в критический момент они «просыпаются» и начинают усваивать избыточную энергию. Таким образом, за точкой бифуркации происходит перекачка энергии от аффинных мод к неаффинным.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для системы (4) записываются в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,11}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,12}} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,22}} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,1}} + \frac{d}{dy} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,2}} - \frac{\partial U}{\partial \omega} = 0. \quad (16)$$

Для (4а) потенциал скоростей можно построить:

$$2U = 2U_0 + \frac{1}{2} \mu_3 (2\omega + \Delta \phi)^2 + \lambda (\nabla \omega)^2.$$

В момент бифуркации  $U_0 = 0$ , но  $U > 0$ .

Однако для (4б) такой функции (квадратичной, ибо уравнения линейные) не существует. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно увидеть, что слагаемое  $\sigma \omega_{,11}$  в первом уравнении (4б) может появиться только из слагаемого  $\sigma \omega \phi_{,11}$  в функции  $U$ , но тогда во втором уравнении (16) возникнет добавка  $\sigma \phi_{,11}$ , которой в (4б)<sub>2</sub> нет. Отсутствие лагранжиана  $U$  означает неконсервативность построенной

модели, которая относится к циркуляционным системам, изученным в [10]. Последние часто встречаются среди механических устройств с вращательными степенями свободы, единственным надежным методом их исследования является динамический метод. Он же использовался выше для нахождения волнового вектора, обладающего наивысшей скоростью роста и определяющего форму решения в рамках метода линейных возмущений. Причина неконсервативности системы (4b) заключается в природе спина коротационной производной уравнений состояния (2). В [14] было доказано, что единственной коротационной производной, допустимой в инкрементально-линейных соотношениях, связывающих энергетически сопряженные тензоры, является яуманнова производная, как раз и использованная в модели (4a). Однако требование энергетической сопряженности, возможно, является чрезмерно ограничительным. Во-первых, поскольку оно не позволяет учесть форму контактирующих частиц, определяющую вид коротационной производной в (2), а во-вторых, ввиду инвариантной записи энергии  $\dot{\tau}_k \dot{\gamma}_k$  относительно системы  $M_k$ , с каким бы спином она ни вращалась. Поэтому были изучены оба крайних случая — (4a) и (4б).

Естественной основой для предпринятого в работе описания явления возникновения пространственно-модулированных ротационных структур явился континуум Коссера, содержащий и ротации, и масштаб. Неопределенность амплитуды образующегося профиля и размытость границ фрагментов очевидно вызвана использованием линеаризованной постановки. Для описания экспериментально наблюдаемых величин периода структуры, толщины локализованных переходных областей (рис. 1) и амплитудных значений полей в этих областях необходима нелинейная постановка задачи и по возможности близкий к реальному способ нагружения фрагментируемого кристаллического объема.

1. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
2. Bay B., Hansen N., Hughes D.A, Kuhlmann-Wilsdorf D. Evolution of FCC deformation structures in polyslip // Acta Metall. Mater. 1992. V. 40, N 2. P. 205-219.
3. Ревуженко А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. 428 с.
4. Aifantis E.C. Pattern formation in plasticity // Int. J. Engng. Sci. 1995. V. 33, N 15. P. 2161-2178.
5. Аэро Э.Л. Микромасштабные деформации в двумерной решетке — структурные переходы и бифуркации при критическом сдвиге // Физика твердого тела. 2000. Т. 42, № 6. С. 1113-1119.
6. Hill R., Hutchinson J.W. Bifurcation phenomena in the plane tension test // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 239-264.
7. Asaro R.J. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // Acta Metall. 1979. V. 27. P. 445-453.
8. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1958. V. 6, N 3. P. 236-249.
9. Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time // J. Mech. Phys. Solids. 1959. V. 7, N 3. P. 209-225.
10. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: МГУ, 1986. 224 с.
13. Hill R. Acceleration waves in solids // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 1. P. 1-16.
14. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials I // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 4. P. 229-242.

## Образование полос локализации деформации

Изучаются закономерности образования периодической структуры локализации деформации (в том числе и в виде полос сдвига) в однородно нагружаемой одномерной сплошной среде. Материал подчиняется уравнению состояния, не монотонному по деформации и содержащему второй градиент деформации. Градиентный терм обеспечивает локальное равновесие за критической точкой, благодаря которому структура может возникать квазистатически. Такой, авременной, сценарий развития может соответствовать пластичности (равновесному необратимому процессу), в рамках которой дана интерпретация полученного решения. Это недостаточно освещенное в литературе свойство использованного здесь в общем не нового подхода к описанию явления всесторонне и критически исследуется в данной работе.

Пусть одномерная сплошная среда находится в состоянии равновесия:

$$\sigma' = 0, \quad (1)$$

где скаляр  $\sigma$  — касательное либо нормальное напряжение, а штрих обозначает производную по координате. Из (1) следует однородность напряжения вдоль оси:  $\sigma(x) \equiv \sigma \geq 0$ , которое поэтому является приложенным к среде, непосредственно контролируемым параметром нагружения. Рассмотрим определяющее уравнение вида

$$\sigma = f(\varepsilon) + \varepsilon'', \quad (2)$$

где скаляр  $\varepsilon$  — сдвиговая либо осевая деформация. Функция  $f$  а) проходит через ноль  $f(0) = 0$  и потому обеспечивает у материала наличие ненапряженного и недеформированного (естественного) состояния:  $\varepsilon = 0, \varepsilon'' = 0 \Rightarrow \sigma = 0$  в силу (2), б) немонотонна: вначале возрастает, затем убывает на небольшом отрезке, после чего опять возрастает. Падающий участок описываемого этой функцией силового профиля моделирует внутреннюю нестабильность материала, природа которой обсуждается далее. Простое макрофеноменологическое уравнение состояния (2) предложено более 20 лет назад Э. Айфантисом [1] для уяснения механизма образования структур в духе формализма Ван-дер-Ваальса - Гинзбурга - Ландау. Это уравнение можно воспринимать и как уравнение равновесия для относительного перемещения компонент одномерного двойного континуума [2].

Для качественного изучения данной системы с одной переменной состояния  $\varepsilon$  и одним управляющим параметром  $\sigma$  не имеет смысла задаваться профилем  $f$  сложнее катастрофы двойной складки

$$f(\varepsilon) = \varepsilon^3 - \varepsilon \quad (3)$$

в координатах  $\varepsilon, \sigma$  с началом в точке центральной симметрии этой кривой. Удобнее отождествить начало координат с точкой локального максимума (рис. 1), в таком случае (2) примет вид

$$\varepsilon'' + \varepsilon^3 - \sqrt{3}\varepsilon^2 - \sigma \equiv 0, \quad (4)$$

если обозначения переменных оставить прежними. Это уравнение имеет кубическую и квадратичную нелинейности.

Для уравнения (4), не зависящего от  $\varepsilon'$  и  $x$ , можно записать интеграл энергии (для чего предварительно обе его части следует домножить на  $\varepsilon'$  и использовать равенство  $\varepsilon'\varepsilon'' = \frac{1}{2}(\varepsilon'^2)'$ ):

$$\frac{1}{2} \int_{\varepsilon'_0}^{\varepsilon'} d(\varepsilon'^2) + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} [f(\varepsilon) - \sigma] d\varepsilon = 0. \quad (5)$$

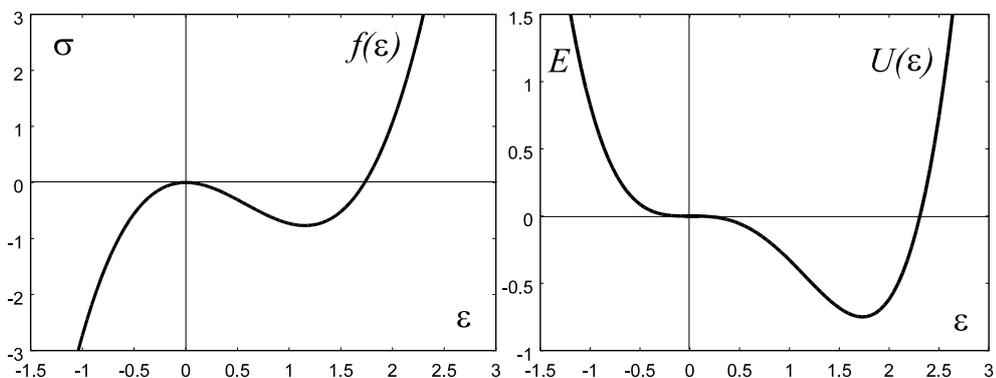
Здесь для определенности считалось, что известны значения  $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$  в некоторой точке  $x_0$ . В (5) можно выделить части, определяемые деформацией ( $U = \int f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{4}\varepsilon^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon^3$ ), градиентом деформации ( $G = \frac{1}{2}\varepsilon'^2$ ) и напряжением ( $-\sigma\varepsilon$ ). Первые две части составляют “внутреннюю” потенциальную энергию деформированной точки, последняя — потенциальную энергию приложенного напряжения, а все вместе — полную потенциальную энергию системы. Обозначая

$$E = G + U - \sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon^3 - \sigma\varepsilon \quad (6)$$

и  $E_0 = E(\varepsilon_0, \varepsilon'_0)$ , уравнение (5) можно записать в виде<sup>54</sup>

$$E = E_0. \quad (7)$$

В рамках пластической интерпретации реологии модели (см. конец статьи) энергия  $E$  диссипирует, поэтому независимость ее от  $x$  означает однородность диссипации по пространству. При фиксированном  $\sigma$  энергетическое состояние определяется только значениями  $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$ . Далее из всех энергетических состояний, отвечающих одному и тому же  $\sigma$ , мы будем выделять состояние с локальным минимумом энергии, называя его состоянием невозмущенного равновесия.



<sup>54</sup> Отметим, что (4) можно трактовать как уравнение экстремали  $\delta L \equiv (-\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon})L = 0$  для лагранжиана  $L = G - U + \sigma\varepsilon$ .

Рис. 1.

Рис. 2.

Функция  $E$  задает потенциальный рельеф системы (4), изменяющийся в зависимости от приложенного напряжения. В начале нагружения, когда  $\sigma < -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ ,  $U$  имеет один локальный минимум, соответствующий ее абсолютному минимуму, при напряжениях  $-\frac{4}{3\sqrt{3}} < \sigma < 0$  имеются два локальных минимума и один локальный максимум и при  $\sigma > 0$  опять остается один локальный минимум, являющийся абсолютным. В точках  $\sigma = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ ,  $0$  локальный максимум сливается с одним из локальных минимумов, образуя точку перегиба (рис. 2). Если нагружение производить весьма осторожно, состояние среды в течение всего этого процесса при  $\sigma < 0$  будет соответствовать точке локального минимума потенциального рельефа (при  $\sigma < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$  — абсолютного, а при  $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < \sigma < 0$  — левого локального), а при  $\sigma = 0$  — точке перегиба, и тем самым проходить непрерывный ряд состояний невозмущенного равновесия. Это эквивалентно выполнению в процессе нагружения условий  $\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon'} \equiv 0 \Leftrightarrow \varepsilon^3 - \sqrt{3}\varepsilon^2 - \sigma \equiv 0$ ,  $\varepsilon' \equiv 0$  (заметим: требующих однородности решения). Такое нагружение будем называть невозмущенным равновесным.

Исследуем вопрос устойчивости состояния среды в течение невозмущенного равновесного нагружения. Будем называть значения  $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$ , заданные в некоторой точке среды, согласованными с приложенным напряжением, если  $\varepsilon_0^3 - \sqrt{3}\varepsilon_0^2 - \sigma = 0$ ,  $\varepsilon'_0 = 0$ . Возмущения в изучаемой системе могут порождаться значениями  $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$ , если они не согласованы с приложенным напряжением. Относительно таких возмущений мы и будем исследовать устойчивость невозмущенных равновесных состояний, для чего сначала воспользуемся интегралом энергии (7). При  $\sigma < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$  такое состояние  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0, \varepsilon' \equiv 0$  однородно и устойчиво. При  $-\frac{2}{3\sqrt{3}} \leq \sigma < 0$  то же решение локально устойчиво. Некоторые конечные возмущения способны реализовать переход к энергетически эквивалентному в общем неоднородному решению. Заметим, что хотя при  $-\frac{4}{3\sqrt{3}} \leq \sigma < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$  заданному  $\sigma$  уже могут соответствовать дополнительно одно-два решения уравнения  $f(\varepsilon) = \sigma$ , их реализация с помощью какого-либо возмущения энергетически невозможна. Наконец, при  $\sigma = 0$  однородное решение становится неустойчивым. Итак, если возмущения малы, то при  $\sigma < 0$  решение отклонится от невозмущенного равновесного также мало. При  $\sigma = 0$  малейшее возмущение равновесного однородного решения  $\varepsilon \equiv 0$  в любой единственной точке сразу повлечет смену решения на неоднородное. Состояние  $\sigma = 0$  назовем критическим.

Исследуем тот же вопрос с помощью уравнения (4). Пусть однородное его решение возмущено:  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 + \alpha$ ,  $\varepsilon'(0) = 0$ , где  $\varepsilon_0$  согласовано с приложенным напряжением  $\varepsilon_0^3 - \sqrt{3}\varepsilon_0^2 - \sigma = 0$ , а  $\alpha$  мало. Тогда для малых отклонений  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_0$  из

(4) имеем уравнение  $\bar{\varepsilon}'' + (3\varepsilon_0^2 - 2\sqrt{3}\varepsilon_0)\bar{\varepsilon} = O(\bar{\varepsilon}^2)$ . При  $\sigma < 0$  значение  $\varepsilon_0$  всегда отрицательно и конечно, поэтому полученное уравнение для малых отклонений с условиями на них в нулевой точке  $\bar{\varepsilon}(0) = \alpha$ ,  $\bar{\varepsilon}'(0) = 0$  описывает волнообразный профиль  $\bar{\varepsilon} = \alpha \cos kx$  с малой амплитудой  $\alpha$  и конечной длиной волны  $k = (3\varepsilon_0^2 - 2\sqrt{3}\varepsilon_0)^{1/2}$ . При  $\sigma \rightarrow -0$  будет  $\varepsilon_0 \rightarrow -0$  при  $\varepsilon_0 \propto \sigma^{1/2}$  и  $k \rightarrow +0$  при  $k \propto \sigma$ , т.е. длина волны становится бесконечно большой. В критической точке  $\sigma = \varepsilon_0 = 0$  линейный анализ не дает полной картины происходящего.

Будем считать, что среда равномерно нагружена до критического состояния  $\sigma = 0$ , т.е. описывается уравнением

$$\varepsilon'' + \varepsilon^3 - \sqrt{3}\varepsilon^2 = 0. \quad (4')$$

Получим сначала решения системы, соответствующие сепаратрисе — фазовой траектории, проходящей через особую точку поверхности  $E(\varepsilon, \varepsilon')$  при  $\sigma = 0$ . Из (6), (7) при  $\sigma = 0$  и  $E_0 = 0$  имеем

$$2\varepsilon'^2 = \varepsilon^2 \left( \frac{4}{\sqrt{3}}\varepsilon - \varepsilon^2 \right). \quad (8)$$

Уравнение (8) можно воспринимать и как первый интеграл в критической точке, и как уравнение сепаратрисы на фазовой плоскости  $(\varepsilon, \varepsilon')$ . Интеграл (8) имеет вид

$$x - x_0 = \sqrt{2} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 \left( \frac{4}{\sqrt{3}} - \xi \right)}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4\sqrt{3}\varepsilon - 3\varepsilon^2}}{\varepsilon} \Bigg|_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}, \quad (9)$$

а обращение его ведет к двум решениям

$$\varepsilon \equiv 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}(x - x_8)^2}, \quad (10)$$

где  $x_8 = x_0 - x(\varepsilon_0)$  определяется нижним пределом (9). Как видно, рассматриваемому нулевому энергетическому состоянию может соответствовать неустойчивое однородное решение (10)<sub>1</sub> либо устойчивое неоднородное решение (10)<sub>2</sub>, возбуждаемое лежащим на сепаратрисе в остальном произвольным ненулевым возмущением. На рис. 3 приведен профиль  $\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}x^2}$

неоднородного решения. Полуширина профиля (т.е. его ширина при половинном значении амплитуды  $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ) равна  $\sqrt{6} \approx 2.45$ . Воспользуемся фазовой плоскостью (рис. 4). Критическая точка расположена на конце острия и соответствует однородному решению. В этой точке интеграл (9) имеет сингулярность (в точке  $\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}}$ , кстати, сингулярности нет). Обходя сепаратрису, получаем неоднородное решение (10)<sub>2</sub>, причем первая половина пути, от конца острия до середины тыльной части  $\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $\varepsilon' = 0$  (максимума профиля  $\varepsilon(x)$ ), равно как и вторая его половина, соответствуют бесконечному изменению координаты. Если такой обход

совершается с постоянной скоростью, т.е. в каждый момент скорость движения по касательной к сепаратрисе постоянна, то скорость изменения координаты  $x$  вблизи критической точки возрастает до бесконечности. То есть амплитудное значение возмущенного неоднородного решения реализуется на некотором расстоянии  $x_8$  от точки  $x_0$ , неограниченно растущем по мере уменьшения возмущения.

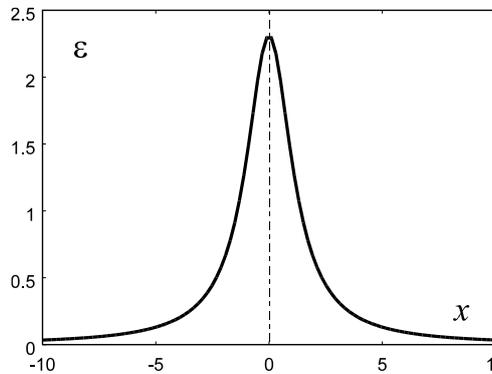


Рис. 3.

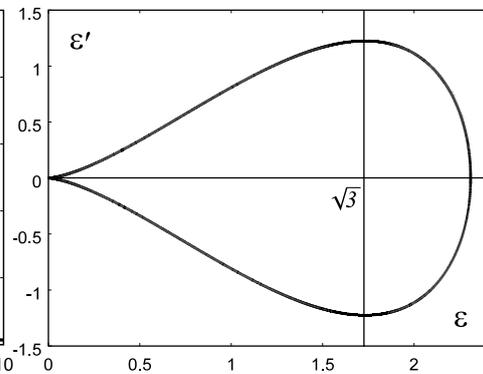


Рис. 4.

Получим теперь возмущенное решение, полагая  $\varepsilon_0 = \alpha$ ,  $\varepsilon'_0 = 0$ , где  $\alpha$  — малая величина положительного или отрицательного знака, слегка уменьшающая или увеличивающая энергию системы. Из вышесказанного логично ожидать, что такое решение уравнения нелинейного осциллятора (4') будет периодическим и состоять из чередующихся протяженных участков с  $\varepsilon \approx 0$  и локализованных всплесков с амплитудой  $\varepsilon \approx \frac{4}{\sqrt{3}}$ , причем при  $\alpha \rightarrow 0$  период должен неограниченно расти, а полуширина каждого всплеска достигать значения  $\sqrt{6}$ , то есть возмущенное решение должно стремиться к решению на сепаратрисе (10)<sub>2</sub>. Вблизи  $\varepsilon = 0$   $g(\varepsilon) \equiv \varepsilon^4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\varepsilon^3 = -\frac{4}{\sqrt{3}}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$  и корни  $g(\varepsilon) = \frac{4}{\sqrt{3}}\alpha^3$  суть  $\alpha_2 = -\alpha + O(\alpha^{4/3})$  и  $\beta \pm i\gamma = \frac{1}{2}\alpha(1 \pm \sqrt{3}i) + O(\alpha^{4/3})$ . Второй действительный корень  $\alpha_1$  уравнения  $g(\varepsilon) = g(\alpha_2)$  равен  $\alpha_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} + O(\alpha^3)$ . Решение (4') тогда записывается в виде [3]

$$\varepsilon = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \frac{v - \cos\varphi}{1 - v\cos\varphi}, \quad (11)$$

где  $\varphi = \text{am}(\frac{1}{\sqrt{2\mu}}x + 2K(k), k)$ ,  $\text{am}(u, k)$  — амплитуда Якоби,  $\cos \text{am}(u, k) = \text{cn}(u, k)$  — эллиптический косинус,  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, определяющий четверть периода функции  $\text{cn}(u, k)$  по шкале  $u$ ,  $k \in [0, 1]$  — его модуль. Параметры  $v, \mu, k$  определяются формулами [3]

$$v = \text{tg} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \text{tg} \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \quad \mu = -\frac{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2}}{\gamma}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2},$$

где

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\alpha_1 - \beta}{\gamma}, \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\alpha_2 - \beta}{\gamma} \quad \text{---}$$

вспомогательные величины. К сожалению, эти формулы содержат ошибки. Решение (11) дает описанный выше профиль только при  $v \approx 1$ , при этом пики всплесков соответствуют точкам, в которых  $\operatorname{cn} = 1$ . Для получения такого решения некоторые из приведенных выше формул были изменены следующим образом:

$$v = \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2},$$

причем знаки углов  $\theta_{1,2}$  следует изменить так, чтобы эти углы стали острыми,  $0 \leq \theta_{1,2} \leq \frac{\pi}{2}$ . С помощью этих определений получаем:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{8}{3\alpha} = \frac{\pi}{2} - 0.375/\alpha + O(\alpha^2), \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \\ v &= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12} - 0.1875\alpha) \operatorname{tg}(\frac{5\pi}{12} - 0.1875\alpha) = 1 - 1.5\alpha + O(\alpha^2), \\ \mu &= -(2\sin(0.375\alpha) / 3)^{1/2} \alpha^{-1} = -0.5\alpha^{-1/2} + O(\alpha^{3/2}), \\ k &= \sin(\frac{5\pi}{12}) + O(\alpha) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + O(\alpha) \approx 0.97 + O(\alpha). \end{aligned}$$

Точка  $v = 1$  — особая для (11), поэтому для  $v$  был взят первый порядок разложения, для модуля  $k$  был взят нулевой порядок, поскольку для эллиптического интеграла первого рода точка  $k = 0.97$  не является особой (особой же является точка  $k = 1$ ). Решение (11) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1 - \frac{3}{2}\alpha - \operatorname{cn}(\sqrt{2\alpha}x - 2K(k), k)}{1 - (1 - \frac{3}{2}\alpha) \operatorname{cn}(\sqrt{2\alpha}x - 2K(k), k)} \right) + O(\alpha). \quad (12)$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  в точках  $x = j\sqrt{2K(k)\alpha^{-1/2}}, j = \pm 1, \pm 2, \dots$  получим, устранив неопределенность,  $\varepsilon \rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}$ . В точках  $x = j\frac{1}{\sqrt{2}}K(k)\alpha^{-1/2}, j = \pm 1, \pm 3, \dots$  при  $\alpha \rightarrow 0$   $\varepsilon \rightarrow 0$ . Профиль решения при  $\alpha = 0.01$  показан на рис. 5. Его период по шкале  $x$ ,  $2\sqrt{2K(k)\alpha^{-1/2}}$  ( $K(k) \approx 3.1$ ), неограниченно растет при  $\alpha \rightarrow 0$ . Однако полуширина всплесков при этом остается ограниченной, в пределе достигая значения  $\sqrt{6}$ . Чтобы в этом убедиться, сначала следует разложить  $\operatorname{cn}(\sqrt{2\alpha}x) = 1 - \alpha x^2 + O(\alpha^2 x^4)$  в ряд вблизи  $\operatorname{cn} = 1$ , затем заметить, что полуширина соответствует нулевому значению числителя дроби в (12), откуда получить координаты  $x_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  искомых точек.

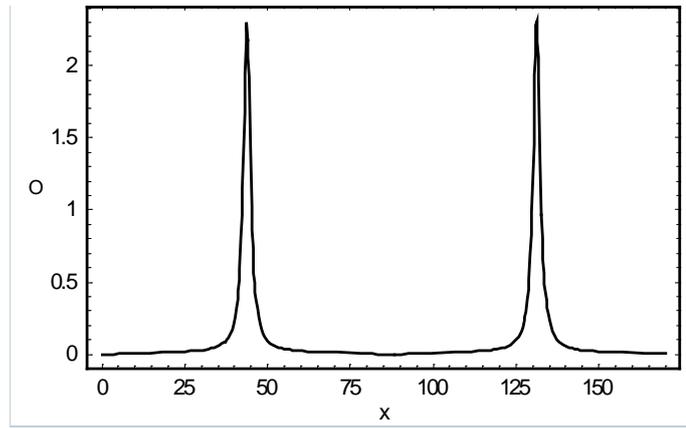


Рис. 5.

Правильность решения подтверждается численным интегрированием уравнения (4') с использованием пакета «Математика», обнаруживающим все отмеченные свойства. Отметим, что период оказывается несколько заниженным по сравнению с аналитически найденным значением, однако с уменьшением  $\varepsilon_0$  различие также уменьшается, составляя, например, 7.4% при  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ . Причина расхождений — сугубо численная и определяется минимальным шагом интегрирования вблизи особой точки.

Параметры  $\nu, \mu, k$  решения (12) могут быть получены и без каких-либо формул путем подстановки его в (4') при  $\beta \equiv 1 - \nu \propto \alpha$  и  $\mu \propto (\alpha)^{-1/2}$ . Представляя (11) в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} (1 - \nu) z_+ - \alpha (1 + \nu) z_- \right), \quad z_{\pm} = \frac{1 \pm u}{1 - \nu u}, \quad u = \operatorname{cn} \sigma x,$$

получаем

$$z'_{\pm} = \frac{\pm 1 + \nu}{(1 - \nu u)^2} u', \quad z'_{\pm} = \frac{\pm 1 + \nu}{(1 - \nu u)^3} (2\nu u'^2 + (1 - \nu u)u''),$$

$$\varepsilon'' = \frac{1 - \nu^2}{2(1 - \nu u)^3} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} + \alpha \right) (2\nu u'^2 + (1 - \nu u)u'').$$

Согласно [3]

$$u' = -\sigma \operatorname{sn} \operatorname{dn}, \quad u'^2 = \sigma^2 (-k^2 \operatorname{cn}^4 + (2k^2 - 1) \operatorname{cn}^2 + 1 - k^2), \\ u'' = \sigma^2 (-2k^2 \operatorname{cn}^3 + (2k^2 - 1) \operatorname{cn}),$$

где  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{dn}$  — эллиптические синус и дельта и были использованы тождества  $\operatorname{sn}^2 = 1 - \operatorname{cn}^2$ ,  $\operatorname{dn}^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2$ . Собирая все и приводя подобные, получим

$$\varepsilon'' = \frac{1 - \nu^2}{2(1 - \nu u)^3} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} + \alpha \right) \sigma^2 (-2k^2 \operatorname{cn}^3 + \nu(2k^2 - 1) \operatorname{cn}^2 + (2k^2 - 1) \operatorname{cn} + 2\nu(1 - k^2)).$$

Далее,

$$\varepsilon^3 - \sqrt{3} \varepsilon^2 = \frac{1}{8(1 - \nu u)^3} \left( \left[ \frac{4}{\sqrt{3}} (1 - \nu) + \alpha (1 + \nu) \right] \operatorname{cn} + \frac{4}{\sqrt{3}} (1 - \nu) - \alpha (1 + \nu) \right)^2 \times \\ \times \left( \left[ 2\sqrt{3}\nu + \frac{4}{\sqrt{3}} (1 - \nu) + \alpha (1 + \nu) \right] \operatorname{cn} - 2\sqrt{3}\nu + \frac{4}{\sqrt{3}} (1 - \nu) - \alpha (1 + \nu) \right).$$

Подставляя все в (4'), приравнявая коэффициенты при степенях  $\sigma$  и используя соотношения между малыми величинами, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{16}{\sqrt{3}}\beta\sigma^2k^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\beta + 2\alpha\right)^2 &= O(\alpha^3), \\ \frac{8}{\sqrt{3}}\beta\sigma^2(2k^2 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-12\alpha^2 - \frac{16}{\sqrt{3}}\alpha\beta + \frac{16}{3}\beta^2\right) &= O(\alpha^3), \\ \frac{8}{\sqrt{3}}\beta\sigma^2(2k^2 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(12\alpha^2 - \frac{16}{\sqrt{3}}\alpha\beta - \frac{16}{3}\beta^2\right) &= O(\alpha^3), \\ \frac{16}{\sqrt{3}}\beta\sigma^2(1 - k^2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\beta - 2\alpha\right)^2 &= O(\alpha^3). \end{aligned}$$

Разность второе и третьего уравнений дает  $\beta = \frac{3}{2}\alpha$ . Разность первого и четвертого уравнений дает  $\sigma^2(2k^2 - 1) = \sqrt{3}\alpha$ , а их сумма —  $2\sigma^2\beta = 2\beta^2 + \frac{3}{2}\alpha^2$ . К последнему уравнению также приходим, суммируя второе и третье. Окончательно  $v = 1 - \frac{3}{2}\alpha$ ,  $\sigma = \sqrt{2\alpha}$ ,  $k = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$  с точностью до малых более высокого порядка.

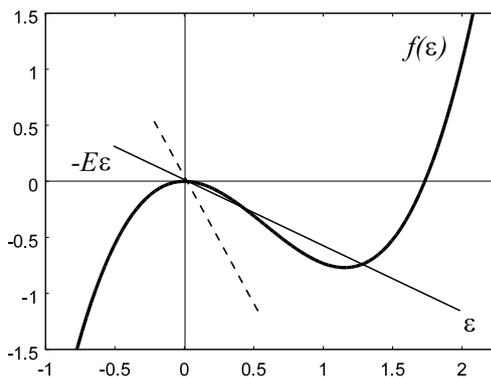


Рис. 6.

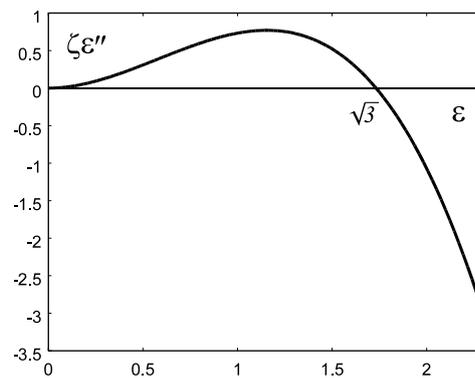


Рис. 7.

Выше исследована реакция материала на мягкое нагружение, осуществляемое приложением напряжения. Далее рассмотрим нагружение конечной жесткости. Пусть тонкий слой изучаемого материала нанесен на упругую полосу и неразрывно с ней связан. Для малого элемента такой одномерной системы принимаются гипотезы

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \chi\sigma_1 + (1 - \chi)\sigma_2 = \sigma$$

где  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  — деформации и напряжения в элементе, а  $\varepsilon_i$ ,  $\sigma_i$  — в его упругой (индекс 1) и нестабильной (индекс 2) компонентах,  $\chi$  — относительная доля упругой составляющей в поперечном сечении элемента, а сама эта система по-прежнему полагается нагружаемой приложением напряжения  $\sigma$ . Принимая в качестве уравнений состояния

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = f(\varepsilon_2)$$

и обозначая  $\tau := \frac{\sigma}{I-\chi}$ ,  $\mu := \frac{E\chi}{I-\chi}$ , получим

$$\tau = f(\varepsilon) + \mu\varepsilon. \quad (13)$$

Это уравнение изображено графически в момент, когда приложением напряжения  $\sigma$  к элементу значение  $\tau$  доведено до критической точки кривой  $f$  (рис. 6). Правая часть (13) соответствует разности функций  $f(\varepsilon)$  и  $-\mu\varepsilon$ . Поэтому, кроме уже изученного случая  $\mu = 0$ , указанный момент еще не является критическим для всей системы. Исследуемый нестабильный материал следует рассматривать совместно с нагружающим устройством — упругой основой. Очевидно критический момент (рис. 6)

$$f'(\varepsilon) = -\alpha$$

соответствует некоторому повышению напряжения и деформации. отождествляя начало координат с критической точкой и оставляя прежние обозначения для новых переменных, уравнению (13) для случая  $\mu < 1$  может быть придан вид

$$\varepsilon^3 - \sqrt{3}\kappa\varepsilon^2 - \tau = 0,$$

где  $\kappa = \sqrt{1-\mu}$ . Локальная внутренняя энергия деформаций запишется как

$$U = \frac{1}{4}\varepsilon^4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\kappa\varepsilon^3 - \tau\varepsilon.$$

В рассматриваемый момент  $\tau = 0$  происходит бифуркация: наряду с основным решением  $\varepsilon_0 = 0$  появляется новое  $\varepsilon_* = \sqrt{3}\kappa$ . Имеем  $U(\varepsilon_0) = 0$ ,  $U(\varepsilon_*) = -\frac{3}{4}\kappa^4$ , следовательно система скачком переходит в новое состояние, при этом теряя (выделяя) энергию, зависящую от жесткости нагружения. При жесткости  $\mu \geq 1$  бифуркации отсутствуют, что иллюстрируется на рис. 6 штриховой линией.

Если вместо  $\sigma_2 = f(\varepsilon_2)$  берется уравнение состояния (2)  $\sigma_2 = f(\varepsilon_2) + \varepsilon_2''$ , то решение (12) несколько изменится:

$$\varepsilon = \frac{2\kappa}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1 - \frac{3}{2\kappa}\alpha - \operatorname{cn}(\sqrt{2\alpha}x - 2K(k), k)}{1 - (1 - \frac{3}{2\kappa}\alpha) \operatorname{cn}(\sqrt{2\alpha}x - 2K(k), k)} \right) + O(\alpha),$$

где  $k = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}\kappa}}{2}$ . При увеличении жесткости до  $\mu = 1$  амплитуда периодических всплесков уменьшается до нуля пропорционально  $\sqrt{1-\mu}$ , а их полуширина растет как  $\frac{\sqrt{6}}{4\sqrt{1-\mu}}$ , то есть профиль как бы расплывается.

Если уравнение (2) содержит константу  $\zeta \geq 0$  при градиентном составляющем, то (4') переписывается в виде

$$\zeta\varepsilon'' + \varepsilon^3 - \sqrt{3}\varepsilon^2 = 0. \quad (4'')$$

В решении (12) тогда изменится только волновое число  $\sigma = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\zeta}}$ , так что при  $\zeta \rightarrow 0$  период профиля и полуширина всплесков стремятся к нулю со скоростью  $\propto \zeta^{1/2}$ .

При этом можно увидеть тенденции дезинтеграции сплошной среды на невзаимодействующие материальные точки. При  $\zeta \neq 0$  градиентный терм (точнее, оператор Лапласа) организует эти изолированные точки в структуру.

Уравнение (4") задает равновесную траекторию перехода в новое состояние, содержащуюся в сечении  $\sigma = 0$  поверхности  $\sigma(\varepsilon, \varepsilon'')$  (рис. 7). Следует обратить внимание на то, что точка  $\varepsilon = \sqrt{3}$  оказывается амплитудным значением нового состояния только в случае  $\zeta = 0$  (само это состояние есть  $\varepsilon \equiv \sqrt{3}$ ), в других же случаях, сохраняющих энергию при переходе, эта точка соответствует точкам перегиба решения  $\varepsilon(x)$ , амплитудное значение  $\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}}$  которого не зависит от  $\zeta$ . Конечно, состояние далеко не всех точек среды заметно "продвигается" вдоль этой кривой при структурном переходе, а в основном только тех, что находятся в узко локализованных зонах.

Поддерживаемое моделью равновесие в течение развития структуры позволяет предположить, что такой процесс происходит квазистатически, по шкале собственного локального времени точки среды. Такой ход процесса характерен для атермической пластичности, с которой, вероятно, и следует связывать рассмотренную в работе модель. Пусть в качестве материала для определенности рассматривается металлический кристалл с большим количеством решеточных дислокаций. В рассматриваемом одномерном случае атомная решетка, испытывая упругие деформации, передает усилие неупругой компоненте, в качестве которой фигурирует система дислокаций. Будем считать, что скольжение последних производит только атермические пластические деформации, что для металлических кристаллов справедливо для не слишком высоких температур и не очень длительных испытаний, когда термофлуктуации не оказывают заметного влияния на процесс. Спонтанные события самоорганизации дислокаций временно понижают напряжение, требуемое для квазистатического деформирования кристалла с постоянной и малой скоростью, что в ходе такого процесса приводит к образованию ямок на кривой нагружения, символизирующих нестабильность материала. Таким образом, мы должны записать аддитивность упругих и пластических деформаций

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \lambda \quad (14)$$

и отождествить деформации ранее изученной модели с пластическими деформациями:

$$\sigma = f(\lambda) + \lambda'' . \quad (15)$$

Из сказанного о природе ямок совсем не следует, что моделируемая этими уравнениями среда должна подвергаться именно жесткому нагружению. Особенность модели заключается в том, что квазистатичность процесса возможна при любой жесткости нагружения. Поскольку приложенное напряжение непосредственно действует на оба реологических элемента, упругий и

нестабильный, критические моменты, определяемые в рамках прежней и переформулированной моделей, совпадают. При критическом напряжении  $\sigma = \sigma_*$  в течение временного переходного процесса образования структуры реализуется определяемое (15) приращение пластической деформации  $\Delta\lambda$  с профилем (12), вызывающее согласно (14) аналогичное приращение полной деформации. Профиль упругой деформации  $\sigma_*/E$  при этом остается однородным. Уравнения (14), (15), конечно, могут описывать лишь активный режим нагружения упруго-пластической среды и быть справедливыми для процессов, не сопровождающихся упругими разгрузками. Но в рассмотренной задаче активность нагружения в каждой точке сплошной среды гарантирована.

Если  $\sigma$  отождествить с касательным напряжением, а  $\varepsilon$  — со сдвиговой деформацией, то элементы образующейся структуры следует интерпретировать как полосы сдвига. В металлическом кристалле такие полосы представляет собой пластиновидные области с большой интенсивностью сдвиговой деформации в них вдоль их плоскостей. Данные плоскости не совпадают кристаллографическими плоскостями и поэтому такая мода деформации активизируется во вполне реальной ситуации, когда фрагмент кристалла не может далее деформироваться кристаллографическим скольжением по причине жесткости нагружающего устройства или окружения [4]. Поскольку сдвиги по некристаллографическим плоскостям неизбежно нарушают порядок атомной решетки, их локализованность (т. е. тонкость по отношению к расстоянию между ними) отражает стремление кристалла при его деформации максимально сохранить структуру своей решетки — энергетически оптимальной конфигурации взаимодействующих атомов. Деградация решетки сильно увеличивает ее внутреннюю энергию, поэтому локализация таких мест внутри узких полос, разделяющих практически ненарушенные области, минимизирует внутреннюю энергию кристалла. Строение макрополос сдвига исключительно аккуратно исследовано в [4]; они представляют собой матричный композит с включениями-каналами или субзернами с оптимальной ориентацией решетки к площадкам наибольшего касательного напряжения, отделенными от матричного материала полос дислокационными границами ориентационного несоответствия. Следовательно, природа формирования полос сдвига тесно связана с коллективными дислокационными процессами, в ходе которых решетка в некоторых малых областях поворачивается так, что касательное напряжение на одной из кристаллографических систем скольжения увеличивается, пока не достигнет максимального. При этом дислокации выстраиваются в стенки и другие планарные образования, отделяющие упомянутые малые области (каналы и субзерна) от остального кристалла и обеспечивающие ориентационное несоответствие решетки. Поскольку упрочнение металлического кристалла на этой стадии очень невелико, малое повышение касательного напряжения на действующей системе скольжения внутри каналов и субзерен приводит к большому сдвигу. Сдвиговая деформация полосы сдвига при этом оказывается конечной. Все эти экспериментально зафиксированные факты

отражает исследованная здесь простая феноменологическая модель — и энергетически оптимальное перераспределение диссипирующей внутренней энергии при образовании структуры внутри узких полос, и периодичность, и конечность амплитуды сдвиговой деформации полос. Практически очевидно, что учет нелинейности в ранее исследованной авторами модели фрагментации зерен поликристаллического металла [5] (сводящейся к нестабильному континууму Коссера) должен устранить нереалистичную диффузность, размытость описываемых ею границ фрагментов сдвигов и поворотов решетки.

Похожие картины полос локализации деформации наблюдаются при деформировании сыпучих сред и горных пород [6]. Пластичность при деформировании таких материалов возможна только при наложении гидростатического давления (которое для горных пород должно быть весьма высоким), сжимающего образующиеся плоскости сдвига и предотвращающего раскол вдоль них. В отличие от металлов пластические деформации в таких материалах, видимо, вообще связаны исключительно с возникновением локализованных полос сдвига. В момент образования полос напряжение, требуемое для дальнейшей деформации, отнесенное к этим полосам, падает. В металлах роль фактора, сжимающего кристаллографические плоскости скольжения и обеспечивающего дальнейшее пластическое течение без разрушения, выполняет электронный газ [7]. Благодаря тому, что данное свойство электронного газа не зависит от температуры, пластические свойства металлов практически не чувствуют понижения температуры в интервале от одной трети температуры плавления до наиболее низких достигнутых температур. При повышенных температурах к такой атермической компоненте неупругой деформации прибавляется вязкая, в активизации которой важную роль играют термофлуктуации. Конечно, плоскости сдвига не отождествляются с кристаллографическими плоскостями, хотя бы потому, что скольжение дислокаций не разрушает атомную решетку, однако, как выше было показано, механизм образования полос сдвига во многом обязан этому скольжению. Как в металлах, так и в сыпучих средах и геоматериалах образование полос сдвига сопровождается нарушением порядка и увеличением внутренней энергии среды и потому сосредотачивается в узко локализованных местах.

При нагружении модельной среды до критического уровня ход процесса деформирования во времени определяется темпом нагружения. Но критическому напряжению соответствует процесс развития структуры, который, как и в идеальной пластичности, не может быть прослежен в физическом времени. Между тем, высказанные выше представления о физике пластичности ничего не говорят ни о равновесности закритического процесса, ни даже о обязательности введения градиентного терма для описания образующихся в таком процессе квазипериодических локализованных структур. Как показали авторы работы [8], регулярность таких структур может вызываться способом приложения нагрузки к исследуемому фрагменту среды, вызывающим неоднородность поля напряжений с

максимумом посередине этого фрагмента. Если максимальное напряжение больше критического, фрагмент дробится, и т. д. Анализ способов нагружения реальных опытов над металлическими монокристаллами (например, использованных в [4]) и влияния окружения зерна деформируемого поликристалла [9] действительно выявляют условия реализации такого механизма, с успехом использованного в [6] для объяснения периодичности структур полос сдвига в сыпучих средах. Добавление градиентного термина в модель в общем ничего не меняет в таком сценарии, а только сглаживает область, разделяющую части фрагмента. Роль градиентного термина таким образом сводится не к модулированности образующихся структур (период которых в модели изменяется по мере повышения напряжения над критическим и потому необъективен), а главным образом к обеспечению равновесности закритического процесса. С экспериментальными же исследованиями неравновесности закритического процесса мы не знакомы. Можно ожидать, что при конечной температуре термофлуктуационная (т. е. вязкая) доля неупругой деформации тем больше, чем приложенное напряжение выше равновесного. При достаточно мягком нагружении такая ситуация в закритической области как раз и реализуется. Однако экспериментальная проверка неравновесности закритических процессов локализации деформации за счет самоорганизации дислокаций затрудняется микроскопическими размерами исследуемых объектов. Даже если на микроуровне эти процессы имеют скачкообразный характер, из-за малости их масштабов на макроуровне эти скачки не проявляются. Поэтому пока мы должны признать вопрос о равновесности реального процесса локализации деформации, и следовательно о роли градиентных сил, дискуссионным. Мы рассчитываем получить некоторую ясность в этом вопросе с помощью имитационного моделирования самоорганизации большого числа дислокаций [2].

Авторы признательны профессорам Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгину и В.И. Ерофееву за консультации по нелинейным вопросам. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств грантов 01-01-00440 Российского фонда фундаментальных исследований и PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР).

#### Библиографический список

1. Aifantis E.C. Non-linearity, periodicity and patterning in plasticity and fracture // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1996. V. 31, No. 6. P. 797-809.
2. Зубко И.Ю., Келлер И.Э., Трусков П.В. Самоорганизация дислокаций как причина нестабильности при пластической деформации // Статья в настоящем сборнике.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе. М.: Наука-Физматлит, 1967. 300 с.

4. Harren S.V., Deve H.E., Asaro R.J. Shear band formation in plane strain compression // *Acta metall.* 1988. V. 36, No 9. P. 2435-2480.
5. Келлер И.Э., Трусов П.В. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур // *ПМТФ.* 2002. N2. С. 176-186.
6. Ревуженко А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. 428 с.
7. Вакуленко А.А. О влиянии электронной структуры металлов на характерные особенности их механических свойств // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 3. С. 109-116.
8. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.-Ижевск: РХД, 2002. 480 с.
9. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.-Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. 203 с.
10. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. 400 с.
11. Bay В., Hansen N., Hughes D.A, Kuhlmann-Wilsdorf D. Evolution of FCC deformation structures in polyslip // *Acta Metall. Mater.* 1992. V. 40, N 2. P. 205-219.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kunin I.A. Kinematics of media with continuously changing topology // *Int. J. Theor. Phys.* 1990. V.29. N.11. P.1167-1176.
2. Rivlin R.S. Generalized mechanics of continuous media / *Mechanics of generalized continua* (Ed. E.Kroner). Springer-Verlag, 1968. P.1-17.
3. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.
4. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
5. Вакуленко А.А. Об эффективных свойствах и прочности керамических композитов // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 1998. №6. С. 50 - 72.
6. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композиционных материалов. Петрозаводск, 1993. 600 с.
7. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
8. Попов В.Л. Об эквивалентности дальнедействующих полей напряжений, создаваемых дислокациями, в калибровочных теориях Эделена и Кляйнберта // *Изв. вузов. Физика.* 1993. N9. С. 125-127.
9. Ohashi Y., Ohno N. Inelastic stress-responses of an aluminium alloy in non-proportional deformations at elevated temperature // *J.Mech.Phys.Solids.* 1982. V.30. No5. P.287-304.
10. Asaro R.J., Rice J.R. Strain localization in ductile single crystals // *J. Mech. Phys. Solids.* 1977. V.25. P.309-338.
11. Ortiz M., Repetto E.A. Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals // *J. Mech. Phys. Solids.* 1999. V.47. P.397-462.
- Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1975. V.23, No.6. P.371-394.
- Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // *Успехи механики.* 1989. Т.12, №1. С. 131-183.
12. Christoffersen J., Hutchinson J.W. A class of phenomenological corner theories of plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 1979. V.27, No.5-6. P.465-487.
13. Хилл Р. Общая теория единственности и устойчивости для упруго-пластических тел // *Механика — Период. сб. перев. ин. статей.* 1958. №3. С. 81-95.
14. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.II. М: Мир, 1969. 863 с.
- Asaro R.J. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // *Acta Metall.* 1979. V. 27. P. 445-453.
16. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука-Физматлит, 1972. 400 с.
- Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука-Физматлит, 1983. 416 с.; Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука-Физматлит, 1982. 608 с.
17. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

18. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев – Самара: Самарский университет, 2006. – 340 с.
19. Аэро Э.Л. Краевая задача асимметрической теории упругости в квазиклассическом приближении / Э.Л. Аэро // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 36. – Вып. 2. – С. 282–290.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 568 с.
21. Де Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956. 280 с.
22. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М: Мир, 1975. 592 с.
- Кутилин Д.А. Теория конечных деформаций. М.-Л.: ОГИЗ - Гостехиздат, 1947. 275 с.
- Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т.2, №7. С. 1399-1409.
1. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
15. Bay V., Hansen N., Hughes D.A, Kuhlmann-Wilsdorf D. Evolution of FCC deformation structures in polyslip // Acta Metall. Mater. 1992. V. 40, N 2. P. 205-219.
16. Ревуженко А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. 428 с.
17. Aifantis E.C. Pattern formation in plasticity // Int. J. Engng. Sci. 1995. V. 33, N 15. P. 2161-2178.
18. Аэро Э.Л. Микромасштабные деформации в двумерной решетке — структурные переходы и бифуркации при критическом сдвиге // Физика твердого тела. 2000. Т. 42, № 6. С. 1113-1119.
19. Hill R., Hutchinson J.W. Bifurcation phenomena in the plane tension test // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 239-264.
20. Asaro R.J. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // Acta Metall. 1979. V. 27. P. 445-453.
21. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1958. V. 6, N 3. P. 236-249.
22. Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time // J. Mech. Phys. Solids. 1959. V. 7, N 3. P. 209-225.
23. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
25. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: МГУ, 1986. 224 с.
26. Hill R. Acceleration waves in solids // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 1. P. 1-16.
27. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials I // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 4. P. 229-242.
28. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука-Физматлит, 1987. 432с.
29. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255с.
- Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: РХД, 2001. 148 с.

30. Хантли Г. Анализ размерностей. М: Мир, 1970. 175 с.

Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // ФТТ. 1964. Т.6, N9.

Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметрическая гидромеханика // ПММ. 1964. Т.29, N2. С.297-308.

31. Аэро Э.Л. Краевая задача асимметрической теории упругости в квазиклассическом приближении // ПММ. 1972. Т.36, N2. С.282-290.

Рушицкий Я.Я. Элементы теории смеси. Киев: Наукова думка, 1991. 160 с.

Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой // Успехи механики. 2002. Т.1, N3. С.130-176.

Вакуленко А.А. О микро- и макрокинетике мартенситных превращений // МТТ. 2001 N.5. С. 43-62.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Вековые члены	14
Групповая скорость	44
Групповой солитон	47
Диаграмма Айнса – Стретта (рис. 4.4)	30
Дисперсионное соотношение	36
Кноидальные волны	21
Метод многих масштабов	9
Модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза	40
Неавтономность дифференциального уравнения	23
Нелинейное уравнение Шрёдингера	46
Неравномерная сходимостъ ряда	14
Нормальная форма Флоке решения уравнения Матье	25
Параметрические колебания	23
Погранслои	8
Резонанс	10
Редуктивная теория возмущений	42
Сепаратриса	20
Солитон	42
Уравнение Дуффинга	18
Уравнение Кортевега – де Фриза	42
Уравнение Матье	25
Фаза	35
Фазовая плоскость	20
Фазовая скорость	36
«Флаги» неравномерности прямого разложения	17

Учебное издание

Келлер Илья Эрнстович

# МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Учебное пособие

Редактор и корректор М.Н. Афанасьева

---

Подписано в печать 20.05.22. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 15,5. Тираж 50 экз. Заказ № 275/2008.

---

Издательство  
Пермского национального исследовательского политехнического  
университета  
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.  
Тел. (342) 219-80-33.