

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОУ ВПО «Пермский государственный университет»

**ДИНАМИКА**  
**ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С**  
**ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ**  
**ЦЕПЯМИ**

*Учебное пособие*

Пермь 2010

УДК 537.312  
ББК 22.251

Д24

Авторы-составители: Е.П. Клигман, В.П. Матвеевко, Н.А. Юрлова

**Динамика** электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями: учеб. пособие:

Д24./ Е.П. Клигман, В.П. Матвеевко, Н.А. Юрлова; Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2010. - 70 с.: ил.

ISBN5-7944-0945-2

В пособии излагаются история возникновения и основы механики пьезоэлектрических тел с внешними дискретными электрическими связями (*RLC*-цепями). Используются общие соотношения механики деформируемых сред, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в квазистатическом приближении. Особое внимание уделено конечно-элементной реализации дискретных электрических связей. На простейших задачах показаны некоторые эффекты от связанных электромеханических полей.

Пособие предназначено для студентов механико-математического и физического факультетов.

Печатается в соответствии с решением редакционно-издательского совета Пермского государственного университета

Рецензент: д-р... проф.... ИОФ

Данное пособие подготовлено в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

ISBN5-7944-0945-2

УДК 537.312  
ББК 22.251

© Авт.-сост.: Клигман Е.П., Матвеевко В.П., Юрлова Н.А.  
2010

*Учебное издание*

**Авторы-составители:** Клигман Евгений Петрович, Матвеенко Валерий Павлович, Юрлова Наталия Алексеевна

# **ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУ- ГИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ**

Редактор **Л.П.Сидорова**  
Компьютерная верстка Н.А. Юрловой

Подписано в печать **01/01/2007**. Формат 60x84/16.  
Усл.печ.л. **1111**. Уч.-изд.л. **7,5**. Тираж 100 экз. Заказ **111**

Редакционно-издательский отдел Пермского государственного уни-  
верситета  
614990. Пермь, ул.Букирева,15

Типография Пермского государственного университета.  
614990. Пермь, ул.Букирева,15

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	5
<b>1. Пьезоэлектрический эффект и электроупругость</b>	6
1.1. Открытие пьезоэффекта	6
1.2. Практическое использование пьезоэффекта	16
1.3. Современные пьезоматериалы	19
<b>2. Уравнения состояния и постановка краевых задач механики пьезоэлектрических сред</b>	24
2.1. Система уравнений Максвелла	25
2.2. Квазистатические уравнения Максвелла	30
2.3. Уравнение баланса энергии для деформируемой среды	31
2.4. Электрическая функция Гиббса.	33
2.5. Определяющие соотношения	36
2.6. Изотермический процесс	37
2.7. Граничные условия для электроупругих систем	37
2.7.1. Механические граничные условия	37
2.7.2. Электрические граничные условия	37
<b>3. Моделирование динамического поведения smart-систем с целью оптимизации диссипативных свойств</b>	41
3.1. Электроупругое тело с последовательной и параллельной RLC цепью	43
3.2. Конечно-элементная реализация задачи для последовательной и параллельной RLC цепей	49
<b>4. Примеры численного анализа и оптимизации</b>	52
<b>Заключение</b>	68
<b>Литература</b>	68

## Введение

В последнее время проблема взаимодействия полей различной физической природы занимает в механике сплошных сред особое место и имеет большое научное и практическое значение. Это объясняется тем, что новые технические решения часто находятся на стыке различных научных направлений. Исследования взаимодействия полей стимулируются многочисленными научными разработками в технике и связаны с созданием новых конструкций, материалов и технологических процессов.

Одним из направлений, где востребованы исследования взаимодействия полей, - это производство новых композитов, названных smart-материалами. Основной особенностью таких материалов является их способность целенаправленно изменять свои свойства в зависимости от внешних условий для обеспечения оптимальной работоспособности системы. Как правило, в состав smart-композитов входят датчики, фиксирующие изменение параметров окружающей среды или термомеханическое состояние конструкции, и активные элементы, так называемые актуаторы, которые в нужном направлении изменяют механические свойства конструкции. Такой тип smart-материалов является активным и подразумевает наличие цепей обратной связи и систем управления актуаторами.

В настоящее время для изготовления актуаторов применяют сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, магнито- и электрострикционные материалы, магнитные и электрореологические жидкости. То есть, для этих целей могут быть использованы любые материалы, обладающие способностью изменять термомеханическое состояние при немеханическом (электрическом, магнитном или температурном) воздействии.

Наиболее часто для изготовления smart-композитов используются пьезоэлектрические материалы. В частности, это объясняется наличием у них прямого и обратного пьезоэффекта, что позволяет использовать пьезоэлементы как в качестве датчиков, так и в качестве актуаторов. До недавнего времени были распространены пьезокерамические материалы на основе титаната бария и цирконата-титаната свинца. В настоящее время

бурное развитие получают технологии производства пьезоэлементов на основе полимерных и волокнистых пьезокompозитов с сильно выраженными пьезоэлектрическими свойствами.

Одной из целей использования smart-композитов является снижение уровня вибраций в различных технических устройствах. Это и спортивный инвентарь, элементы авиационных и космических систем и многое другое. Добиться этого возможно путем увеличения демпфирующей способности конструкции. В этом случае предлагается использовать полуактивные smart-композиты на базе пьезоматериалов, в которых функции датчиков и актуаторов совмещены. Для этого электродированные поверхности пьезоэлементов, расположенных в определенных местах конструкции, соединяются между собой пассивными  $RLC$ -цепями. Принцип гашения вибраций основан на преобразовании механической энергии в электрическую с ее последующим рассеиванием во внешних  $RLC$ -цепях в виде тепла и электромагнитного излучения. Наибольший эффект от использования полуактивных SMART-материалов достигается при решении задач оптимизации динамических свойств конструкций. Динамические свойства конструкции могут быть определены путем решения спектральной задачи теории электровязкоупругости. Оптимизация динамических свойств конструкции осуществляется путем определения мест установки датчиков и актуаторов, а так же параметрами  $RLC$ -цепей.

Примерами конструкций с пьезоэлементами могут служить карвинговые лыжи (рис.1), крылья и килевые стабилизаторы летательных аппаратов (рис.2 и 3) и несущие лопасти вертолетов (рис. 4).

## **1. Пьезоэлектрический эффект и электроупругость**

### ***1.1. Открытие пьезоэффекта***

В 1756 г. русский академик Ф. Эпинус обнаружил, что при нагревании кристалла турмалина на его гранях появляются элект-

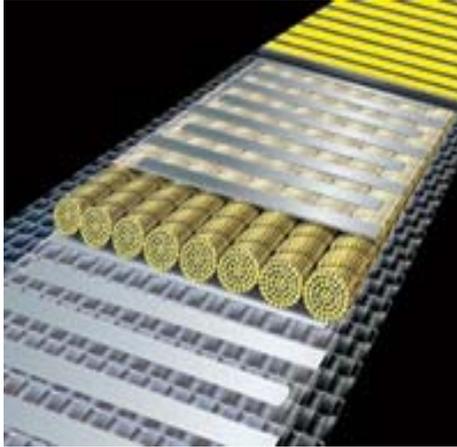


Рис.1. - Схема укладки пьезоволокон в карвинговой лыже.

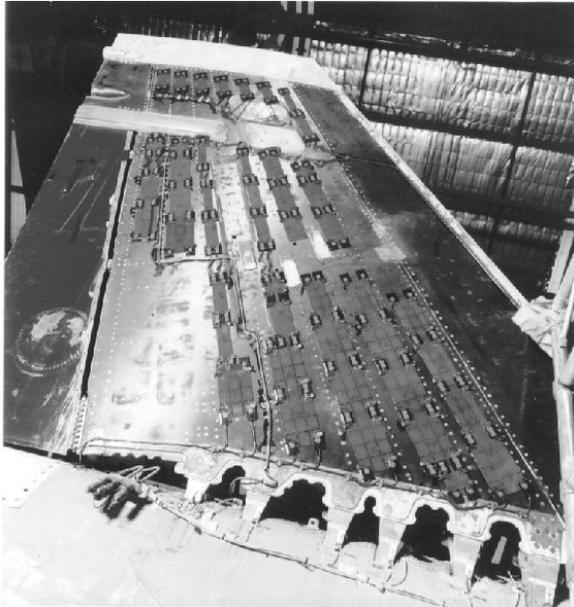


Рис. 2. - Пьезоэлектрический слой в крыле самолета FA-18.



Рис. 3. - Модель истребителя с Macro Fiber Composite actuator and sensor (MFC) на килевых стабилизаторах

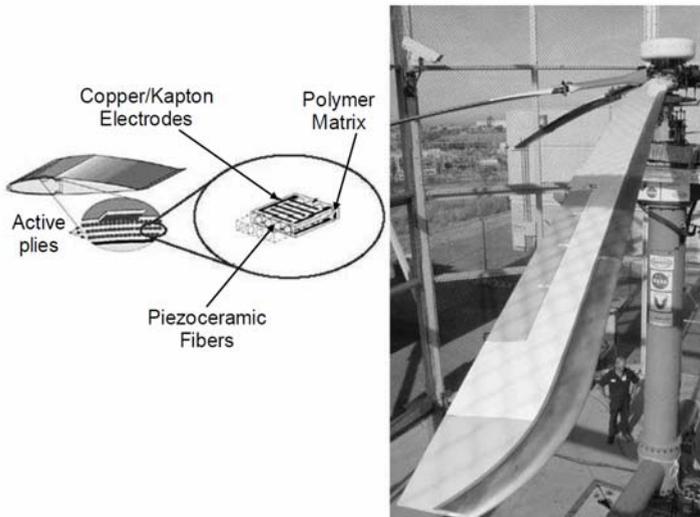


Рис. 4. - MFC на несущих лопастях вертолетов.

трические заряды. В дальнейшем это явление было названо пьезоэлектрическим эффектом. Ф. Эпинус предполагал, что причиной электрических явлений, наблюдаемых при изменении температуры, является неравномерный нагрев двух поверхностей, приводящий к появлению в кристалле механических напряжений. Одновременно он указал, что постоянство в распределении полюсов на определённых концах кристалла зависит от его структуры и состава. Таким образом, Ф. Эпинус подошел вплотную к открытию пьезоэлектрического эффекта.

Пьезоэлектрический эффект в кристаллах был обнаружен в 1880 г. братьями Пьером и Жаком Кюри, наблюдавшими возникновение на поверхности пластинок, вырезанных с определенной ориентацией из кристалла кварца, электростатических зарядов под действием механических напряжений. Эти заряды пропорциональны механическому напряжению, меняют знак вместе с ним и исчезают при его снятии. Образование электростатических зарядов на поверхности диэлектрика и возникновение электрической поляризации внутри него в результате воздействия механического напряжения называют прямым пьезоэлектрическим эффектом.

Чтобы обнаружить пьезоэлектрические заряды, на грани кристаллической пластинки накладывают металлические обкладки. При разомкнутых обкладках между ними при деформации появляется разность потенциалов. В случае замкнутых обкладок на них образуются индуцированные заряды, равные по величине поляризационным зарядам, но противоположные им по знаку, и в цепи, соединяющей обкладки, в процессе деформации возникает ток.

При исследовании электрических свойств твердых диэлектриков кристаллической структуры Пьер Кюри сформулировал весьма общий принцип, который теперь называется принципом Кюри.

Смысл его состоит в следующем: кристалл под влиянием внешнего воздействия изменяет свою симметрию таким образом, что сохраняются лишь элементы симметрии, общие с элементами симметрии воздействия.

Принцип Кюри становится очевидным, если представить, что на фигуру, обладающую симметрией кристалла, накладывается определённым образом другая фигура, имеющая симметрию воздействия. Получающаяся в результате такого наложения фигура сохраняет только элементы симметрии, общие для первоначальных фигур. Как известно, в вершинах кристаллической решетки расположены ионы противоположных знаков, и суммарный заряд кристаллов любой формы равен нулю. Однако если центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают, то дипольный момент кристалла отличен от нуля, что вызывает возникновение поляризации. Если дипольный момент кристалла в недеформированном состоянии равен нулю, то в результате деформации кристалла под механическим воздействием центры положительных и отрицательных ионов могут сместиться один относительно другого, и на поверхностях кристалла появляются заряды противоположных знаков. Возможность такого смещения зависит от типа симметрии кристалла.

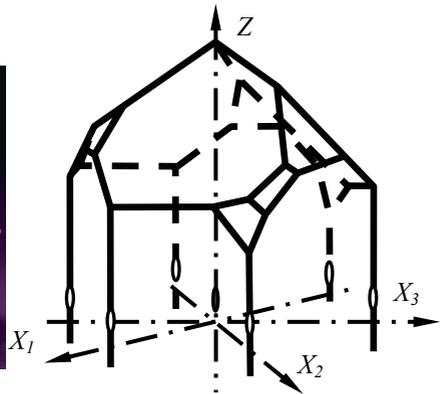


Рис.5. - Кристалл кварца и его оси.

Рассмотрим основные особенности пьезоэлектрического эффекта на примере кристалла кварца, который характеризуется четырьмя кристаллическими осями, определяющими основные направления. Пьезоэлектрический эффект в кварце реализуется в направлении электрических осей  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  кристалла (рис.5), перпендикулярных его оптической оси  $Z$ .

Для пояснения описываемого явления представим пластину кварца, вырезанную перпендикулярно к одной из пьезоэлектрических осей  $X$ . Направление, определяемое осью  $Z$ , пьезоэлектрически не активно: при сжатии или растяжении по этому направлению никакой поляризации не происходит. Ось, перпендикулярную к  $Z$  и  $X$ , обозначим через  $Y$  (рис. 6).

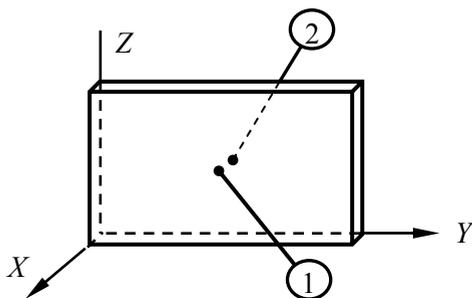


Рис.2 - Пластина кварца

Тогда оказывается, что при растяжении пластинки вдоль оси  $X$  на перпендикулярных к ней гранях 1 и 2 появляются разноименные поляризационные заряды. Такой пьезоэлектрический эффект называется продольным. Если изменить знак деформации, т. е. перейти от растяжения к сжатию, то и знаки поляризационных зарядов изменятся на обратные. Возникновение поляризационных зарядов определенных знаков при данном типе деформации (растяжение или, соответственно, сжатие) показывает, что осям  $X$  можно приписать определенные направления (что отмечено на рис. 5 стрелками). Это значит, что при данной деформации знак заряда зависит от того, направлена ось  $X$  по внешней нормали к грани или по внутренней. Такие оси получили название полярных осей.

Наряду с продольным пьезоэлектрическим эффектом существует также поперечный пьезоэлектрический эффект. Он заключается в том, что при сжатии или растяжении вдоль оси  $Y$  возникает поляризация вдоль оси  $X$  и на тех же гранях 1 и 2 появляются поляризационные заряды. При этом оказывается, что знаки зарядов на каждой грани при сжатии вдоль  $Y$  (в поперечном эффекте) такие же, как при растяжении вдоль  $X$  (в продольном эффекте).

Пьезоэлектрический эффект объясняется следующим образом. В ионных кристаллах вследствие несовпадения центров положительных и отрицательных ионов имеется электрический момент и в отсутствие внешнего электрического поля. Однако эта поляризация обычно не проявляется, так как она компенсируется зарядами на поверхности. При деформации кристалла положительные и отрицательные ионы решетки смещаются относительно друг друга, и поэтому, вообще говоря, изменяется электрический момент кристалла. Это изменение электрического момента и проявляется в пьезоэлектрическом эффекте. Рис. 7 качественно поясняет возникновение пьезоэлектрического эффекта в кварце ( $SiO_2$ ). Здесь условно показаны проекции положительных ионов  $Si$  (заштрихованные кружки) и отрицательных ионов  $O$  (светлые кружки) в плоскости, перпендикулярной к оси  $Z$ .

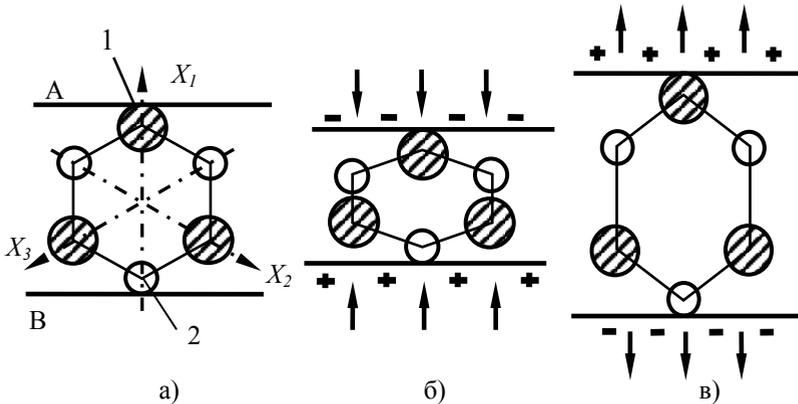


Рис. 7. - К объяснению пьезоэлектрического эффекта

Рисунок 7,а соответствует недеформированному кристаллу. На грани А, перпендикулярной к оси  $X_1$ , имеются выступающие положительные заряды, а на параллельной ей грани В - выступающие отрицательные заряды.

При сжатии вдоль оси  $X_1$  (рис. 7,б) элементарная ячейка деформируется. При этом положительный ион 1 и отрицательный ион 2 «вдавливаются» внутрь ячейки, отчего выступающие заряды (положительный на плоскости А и отрицательный на плоскости В) уменьшаются, что эквивалентно появлению отрицательного заряда на плоскости А и положительного заряда на плоскости В.

При растяжении вдоль оси  $X_1$  имеет место обратное (рис. 7,в): ионы 1 и 2 «выталкиваются» из ячейки. Поэтому на грани А возникает дополнительный положительный заряд, а на грани В - отрицательный заряд.

После открытия братьями Кюри прямого пьезоэффекта Ж.Липпман в 1981 г. теоретически предсказал наличие обратного пьезоэффекта. Вскоре братья Кюри это экспериментально подтвердили. Обратный пьезоэффект состоит в том, что свободные кристаллы, обладающие прямым пьезоэффектом, под воздействием электрического поля деформируются. Поэтому, если на металлические обкладки, укрепленные на кристалле, подать электрическое напряжение, то кристалл под действием поля поляризуется и деформируется.

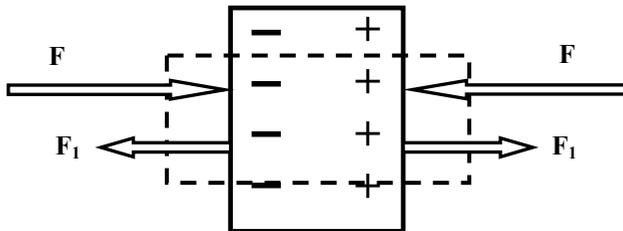


Рис.8. - Связь прямого и обратного пьезоэффектов

Легко заметить, что необходимость существования обратного пьезоэффекта следует из закона сохранения энергии и факта существования прямого эффекта. Рассмотрим пьезоэлектри-

ческую пластинку (рис.8) и предположим, что мы сжимаем ее внешними силами  $F$ .

Если бы пьезоэффекта не было, то работа внешних сил равнялась бы потенциальной энергии упруго деформированной пластинки. При наличии пьезоэффекта на пластинке появляются заряды и возникает электрическое поле, которое включает в себе дополнительную энергию. По закону сохранения энергии следует, что при сжатии пьезоэлектрической пластинки совершается большая работа, а значит, в ней возникают дополнительные силы  $F_1$ , противодействующие сжатию. Это и есть силы обратного пьезоэффекта.

Из приведенных рассуждений вытекает связь между знаками обоих эффектов. Если при прямом и при обратном пьезоэффектах знаки зарядов на гранях одинаковы, то знаки деформаций различны. Если при сжатии пластинки на гранях появляются заряды, указанные на рис.8, то при создании такой же поляризации внешним полем пластинка будет растягиваться.

Обратный пьезоэлектрический эффект не следует смешивать с явлением электрострикции, т.е. с деформацией диэлектрика под действием электрического поля. При электрострикции между деформацией и полем существует квадратичная зависимость, а при пьезоэффекте - линейная. Кроме того, электрострикция возникает у диэлектрика любой структуры и происходит даже в жидкостях и газах, в то время как пьезоэлектрический эффект наблюдается только в твердых диэлектриках, главным образом, кристаллических.

Пьезоэффект зависит не только от величины механического или электрического воздействия, но и от их характера, а также и от направления действующих сил относительно кристаллофизических осей. Пьезоэффект может возникать в результате действия как нормальных, так и касательных напряжений. Существуют направления, для которых пьезоэффект равен нулю.

Пьезоэффект описывается несколькими пьезомодулями, число которых зависит от симметрии кристалла. Направление поляризации может совпадать с направлением механического напряжения или составлять с ним некоторый угол. При совпадении направлений поляризации и механического напряжения

пьезоэффект называют продольным, а при их взаимно перпендикулярном расположении - поперечным. За направление касательных напряжений принимают нормаль к плоскости, в которой действуют напряжения.

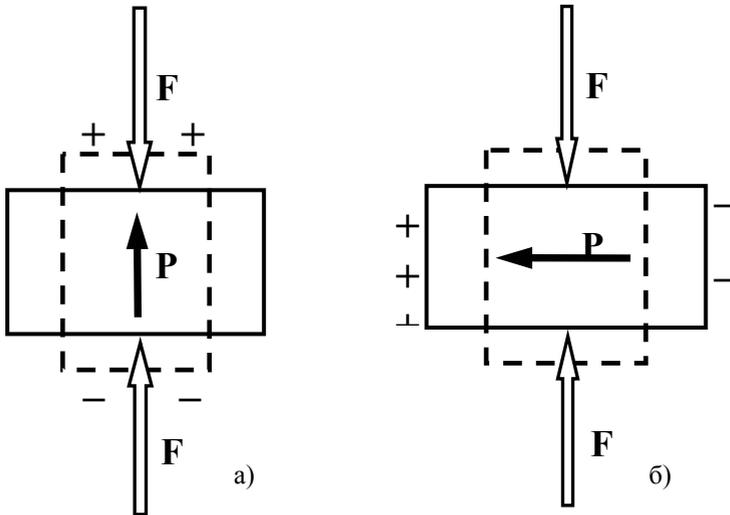


Рис. 9. - Продольный (а) и поперечный (б) пьезоэффекты.  
Здесь  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации

Деформации пьезоэлектрика, возникающие вследствие пьезоэффекта, весьма незначительны по абсолютной величине. Например, кварцевая пластина толщиной 1 мм под действием напряжения 100 В изменяет свою толщину всего на  $2,3 \times 10^{-7}$  мм. Незначительность величин деформаций пьезоэлектриков объясняется их очень высокой жесткостью.

Долгое время пьезоэлектрический эффект носил характер научного курьеза. Впервые в технических целях пьезоэффект был применен Полем Ланжевеном. В 1920 г. он создал ультразвуковой преобразователь для передачи и приема информации в воде, который явился прообразом современных эхолотов, используемых на подводных лодках, для обнаружения косяков рыб и в других целях.

## *1.2. Практическое использование пьезоэффекта*

Преобразователь Ланжевена очень прост. Он представляет собой трехслойную пластину. Ее средний слой изготовлен из кварца, который обладает пьезоэффектом, а внешние слои - металлические. Один из слоев при погружении лодки соприкасается с водой: через него и происходит излучение и прием ультразвука.

Как часто бывает, первые технические применения порождают новые проблемы. Одна из них состоит в обеспечении необходимой мощности, направленности излучения и чувствительности приемника.

Кварц, который первоначально был, по существу, единственным материалом для конструирования пьезопреобразователей, обладая такими важными достоинствами, как высокая стабильность свойств по отношению к температурным воздействиям и высокая добротность, обладает и одним существенным недостатком: у него низкий коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Величина КЭМС характеризует способность устройства преобразовывать один вид энергии в другой. Она зависит как от свойств пьезоактивного материала, так и от конструкции самого пьезопреобразователя.

В реальных конструкциях элементы из пьезоэлектрических материалов используются в соединении с другими элементами (это видно уже на примере преобразователя Ланжевена), которое находится в контакте с внешней средой. Все это делает проблему определения полного КЭМС для электромеханической системы в целом достаточно сложной.

Добиться увеличения КЭМС можно двумя способами:

- созданием материала с более высоким исходным КЭМС;
- оптимизацией параметров электромеханической системы.

Первая проблема - материаловедческая, она относится к сфере физики твердого тела и физической химии; вторая проблема - ближе к механике.

Важным этапом, реализующим первое направление, стало создание пьезокерамики на основе сегнетоэлектриков. Это было осуществлено в конце 40-х годов двадцатого века сразу в нескольких странах.

Первая пьезокерамика была получена на основе порошка титаната бария. Кристаллы титаната бария при температуре ниже  $118^{\circ}\text{C}$  (точка Кюри) не обладают электрической симметрией, и их дипольный момент отличен от нуля. Кроме того, поликристаллические структуры разбиваются на подобласти (домены), содержащие кристаллы с однонаправленным вектором поляризации. На основе порошка из поликристаллов путем спекания и прессования получается керамика. В такой керамике домены расположены хаотично, и она не обладает пьезоэффектом. Важнейшим технологическим этапом в получении пьезокерамики является поляризация в сильном электрическом поле (около 20–30 кВ/см), которая осуществляется с помощью электродов, нанесенных на поверхность спекаемого и прессуемого образца. В результате такого воздействия домены выстраиваются вдоль силовых линий внешнего электрического поля. По истечении некоторого времени и после охлаждения в образце сохраняется поляризация. Это явление называется предварительной поляризацией.

Пьезокерамические материалы обладают следующими преимуществами перед кристаллами:

- значительно более высокий исходный КЭМС в сравнении с кварцем (для некоторых типов напряженных состояний КЭМС равен 0.7, для кварца – 0.095);
- возможность при необходимости создавать элементы сложной геометрической формы при различных типах предварительной поляризации.

Открытие пьезокерамики существенно расширило область технического применения пьезоэлектричества и стимулировало дальнейшие фундаментальные исследования как в области создания новых материалов, так и в области математического моделирования. Этот момент можно считать временем возникновения «практической» электроупругости, в котором доминирующую роль играло пьезоэлектричество.

Можно выделить два направления, определяющих развитие электроупругости в настоящее время: первое связано с созданием новых материалов, в том числе композиционных, и прогнозированием их свойств; второе – создание и развитие мето-

дов математического моделирования электроупругих систем различного назначения для расчета и оптимизации их свойств.

В рамках первого направления в последние годы ведутся интенсивные работы по созданию новых композиционных материалов, обладающих пьезоэлектрическими, пьезопироэлектрическими, пьезоэлектромагнитными и другими свойствами. Их объединяют под общим названием «гибридные композиты». Они существенно расширяют область технических применений, а возможность варьирования их свойств позволяет дополнительно оптимизировать параметры конструкции.

В рамках второго подхода ведутся работы по созданию математических моделей и методов решения задач электроупругости пьезоэлектрических тел при наличии внешних активных и пассивных электрических цепей, осуществляющих коммутацию пьезоэлементов конструкции для обеспечения заданных динамических свойств системы.

Сегодня круг технических применений пьезоэффекта настолько широк, что даже специалисту не всегда под силу представить весь спектр изделий, основанных на его использовании.

- Установка пьезопреобразователей на реактивных самолетах позволяет сэкономить часть топлива, которое шло на выработку электроэнергии, следовательно, позволяет увеличить дальность полета. Здесь в электроэнергию непосредственно превращаются колебания и вибрация фюзеляжа и крыльев.
- Фирма «Филипс» успешно разрабатывает идею пьезоэлектрического привода для механизмов малой мощности. В частности, ею создан светофор, батареи которого заряжаются от шума автомобилей на перекрестке.
- Пьезоэлектрические струйные головки для принтеров были разработаны в семидесятых годах. В большинстве таких принтеров избыточное давление в камере с чернилами создается с помощью диска из пьезоэлектрика, который изменяет свою форму (выгибается) при подведении к нему электрического напряжения. Выгнувшись, диск, который служит одной из стенок камеры с чернилами, уменьшает ее объем. Под действием избыточного давления жидкие чернила вылетают из сопла в виде капли.

- Пьезоэлектрическая зажигалка давно превратилась из диковинки в привычный предмет быта.
- Пьезоэлектрики нашли свое применение как стабилизаторы частоты в радиотехнических устройствах и эталонах времени; электрические фильтры и линии задержки в радио- и телефонной связи; датчики для измерения ускорений, уровня вибрации, акустической эмиссии при неразрушающем контроле; пьезотрансформаторы и пьезодвигатели; в медицинской томографии, а также в медицинских инструментах различного назначения.
- Как отмечалось выше, важную роль пьезоэлектрики могут играть в управлении динамическими свойствами механических систем. В частности, австрийская компания «Head», производящая спортивные товары, разработала и запустила в коммерческую эксплуатацию карвинговые лыжи и теннисные ракетки, выполненные с применением пьезоэлектрических волокон («Head Intellifibres»). Эти волокна способны преобразовывать механическую энергию внешнего воздействия в электрический импульс, который, в свою очередь, подается на те же волокна в противофазе, что обеспечивает гашение вибрации.

### *1.3 Современные пьезоматериалы*

В настоящее время производится широкий спектр пьезоматериалов для различных технических целей. Это - полимерные пьезопленки (рис.10), многослойные пьезоэлементы (рис.11), пьезоволокна различного сечения (рис.12), пьезокомпозицы с использованием пьезоволокон и пленки на их основе (рис.13 и 14). Использование пьезоэлементов связано с подачей/снятием электрического потенциала к их поверхностям. Это осуществляется через встроенные проводники тока. Повысить эффективность использования пьезоэлементов в качестве электромеханического преобразователя энергии возможно при увеличении разности потенциалов на электродированных поверхностях. Для этого стремятся уменьшить расстояние между элект-

тродами. Отсюда вытекают несколько схем создания пьезоком-  
позитов (рис. 12, 13) [1].

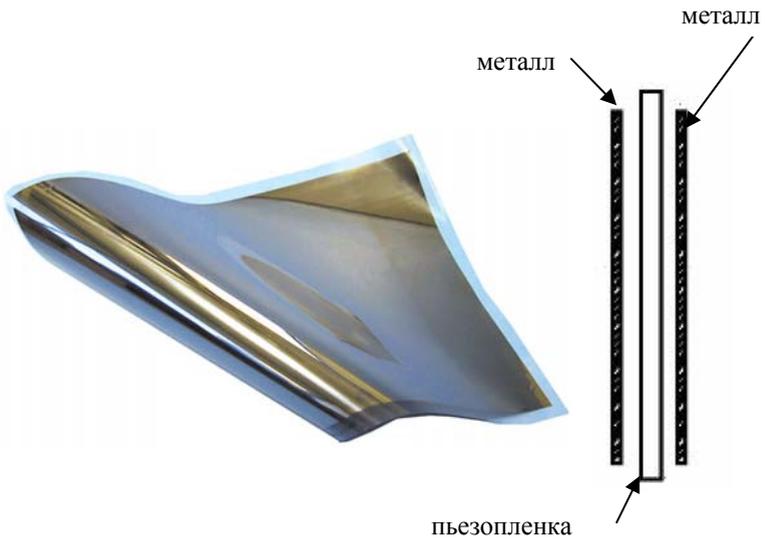
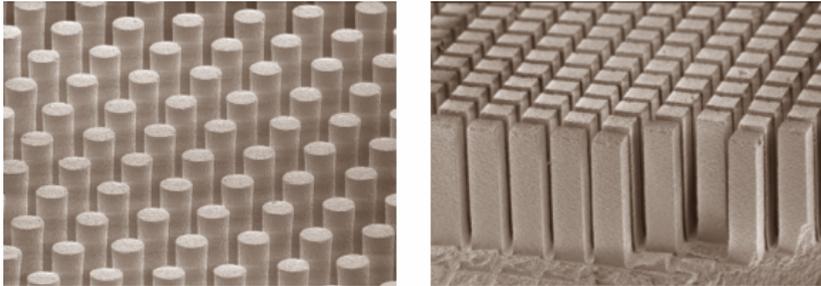


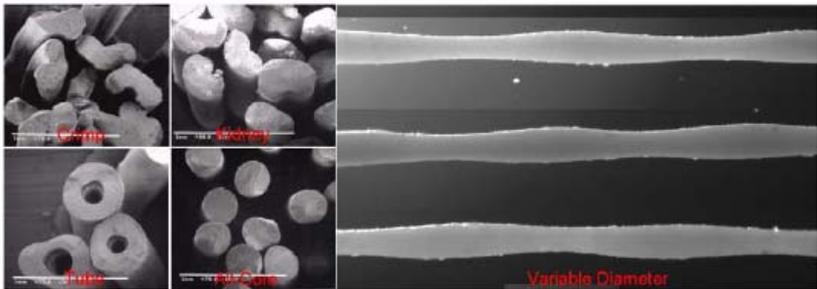
Рис. 10. - Полимерные пьезопленки



Рис. 11. - Многослойные пьезоэлементы



а



б

Рис. 12. – Пьезоволокна: а) круглого и квадратного сечения; б) различного поперечного сечения, а также переменный диаметр по длине волокна.

**Композит с макроволокнами (MFC)** состоит из прямоугольных пьезокерамических волокон (10-250 $\mu\text{m}$ ), зажатых между слоями адгезивной и электродированной полиимидной пленки. Эта пленка содержит полосы электродов, которые передают прикладное напряжение непосредственно от ленты к волокнам. В этом блоке участки волокон между электродами поляризованы в противоположных направлениях. Когда MFC внедрен в поверхность или прикреплен к гибким структурам, он обеспечивает контроль за отклонением формы и вибрацией твердого тела или реализует тензометрию.

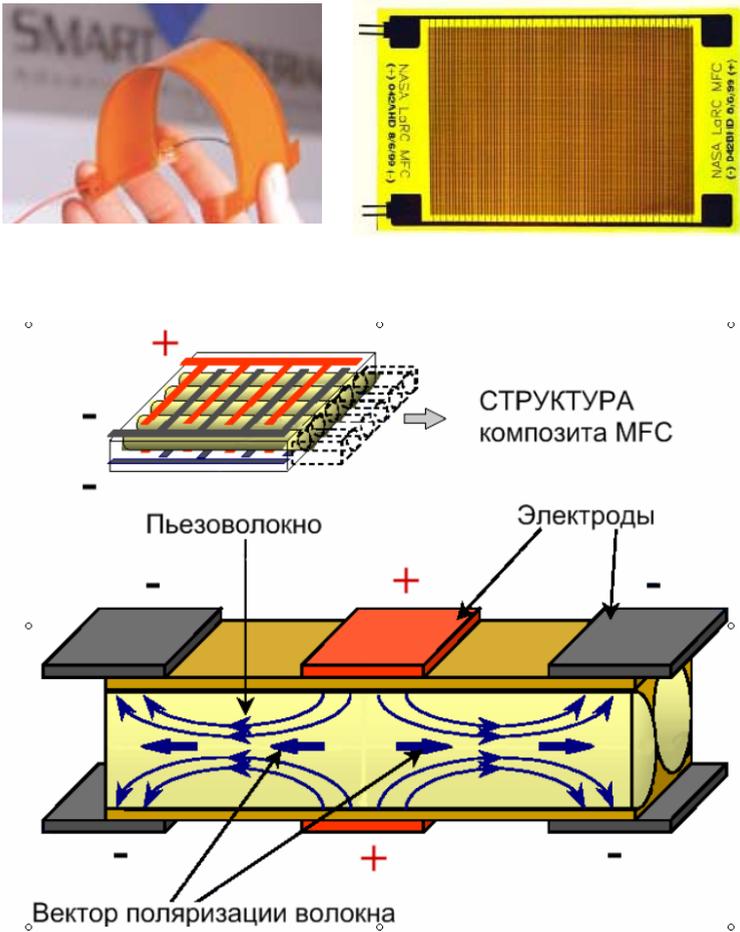


Рис. 13. - Гибкий пьезоэлемент на основе Macro Fiber Composite (MFC)

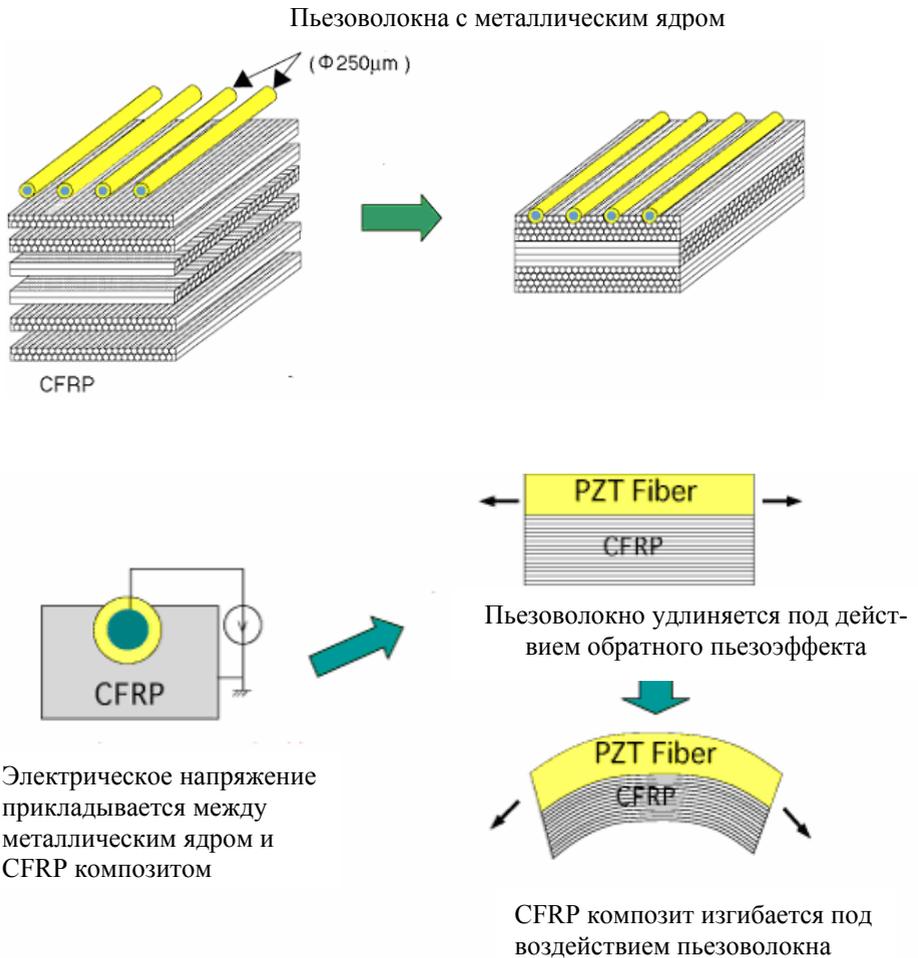


Рис. 14. - Композит на основе пьезоволокн с металлическим ядром в CFRP (Carbon fiber reinforced polymer) матрице

**Композит на основе пьезоволокн с металлическим ядром в CFRP (Carbon fiber reinforced polymer) матрице.**

Японскими специалистами гидротермальным методом и методом экструзии были изготовлены композитные пьезоэлек-

трические волокна с металлическим ядром. Вставка металлического ядра была осуществлена для улучшения механических свойств и для использования их в качестве электродов. Чтобы обеспечить функционирование этих волокон нового типа, была построена консольная структура с вложением волокон в поверхностный слой композитной карбоновой панели CFRP (рис.13).. Малая толщина пьезослоя вокруг металлического ядра обеспечивает большую напряженность электрического поля в пьезоматериале и, как следствие, высокую эффективность композита в качестве электромеханического преобразователя энергии.

## **2. Уравнения состояния и постановка краевых задач механики пьезоэлектрических сред**

Для большинства диэлектрических материалов механическое и электрическое поля не связаны между собой. Открытие братьев Кюри на примере конкретных кристаллов показало, что такая связь возможна. Первые количественные измерения, устанавливающие связь величины заряда с давлением на кристаллах сегнетовой соли, были проведены Ф. Поккельсом в 1894 г.

В математическую форму эти количественные соотношения были облечены немецким ученым Фойгтом (Voigt) в 1910 г. В 1928 г. он привел достаточно полную систему этих соотношений, которая обобщала накопленные знания в области пьезоэлектричества за предшествующий период. Фойгт использовал соотношения линейной теории упругости, построение которой завершается еще в 20 - 40-х годах XIX века благодаря усилиям плеяды блестящих ученых (Навье, Коши, Пуассон, Грин и др.), а также уравнениями электростатики. Последние получены из уравнений электродинамики, выведенных во второй половине XIX века английским ученым Максвеллом и описывающих распространение электромагнитных волн.

Соотношения, полученные Фойгтом, являются основополагающими для построения математической модели электроупругости.

Электроупругость - это научное направление в естествознании, которое занимается исследованием проблем, находящихся на стыке двух классических научных направлений: механики деформированного твердого тела и электродинамики (электростатики) сплошных сред.

Сам термин электроупругость появился сравнительно недавно (в 60-х годах.) и широко употребляется, главным образом, среди специалистов в области механики деформируемого твердого тела. Среди физиков более употребим традиционный термин «пьезоэлектричество».

### ***2.1. Система Уравнений Максвелла***

Электромагнитное поле в сплошной среде описывается системой макроскопических уравнений Максвелла. Для получения этих уравнений обычно используется подход, основанный на изучении взаимодействия точечных зарядов и поля (микроскопические уравнения) с последующим статистическим усреднением введенных величин по объему среды.

Наиболее простой вид уравнения Максвелла имеют в инерциальной системе координат, связанной с наблюдателем (лабораторная система координат). Это соответствует подходу Эйлера в механике сплошных сред. В системе единиц МКС эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_e; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

Физические величины, входящие в (1), имеют следующий смысл.

$\rho_e = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta V}$  – объемная плотность электрических зарядов (для электрически нейтральных тел  $\rho_e = 0$ ).

$\mathbf{j}$  – плотность электрического тока, величина, которая равна суммарному заряду, переносимому через единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\mathbf{j}$  в единицу времени.

$\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля, определяющий силу, действующую на неподвижный пробный заряд  $q'$ , помещенный в электрическое поле,  $\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot q'$ .

При медленно меняющемся токе напряженность электрического поля и плотность тока связывает закон Ома (период должен быть много больше времени свободного пробега электронов в проводнике)

$$\mathbf{j} = \delta \mathbf{E}. \quad (2)$$

$\delta$  – коэффициент проводимости (величина обратная сопротивлению).

$\mathbf{D}$  – ток смещения.

$\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля, характеризующий момент сил, действующий на элементарный магнитный диполь  $\mathbf{d}$ .

$$\mathbf{m} = \mathbf{d} \times \mathbf{H}.$$

$\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  – векторы электрической и магнитной индукции, характеризующие поляризацию и намагниченность среды. Вместо них часто рассматривают вектор поляризации  $\mathbf{P}$  и вектор намагниченности  $\mathbf{M}$ .

$$\mathbf{D} = e_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

или

$$\mathbf{D} = e \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

где  $e_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные в вакууме,  $e$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества. Справедливо следующее тождество:  $e_0 \cdot \mu_0 = c_0^{-2}$ , где  $c_0 = 300 \cdot 10^6$  м/с – скорость света в ва-

кууме,  $\epsilon_0 = \frac{10^9}{36\pi} \text{Ф/м}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Гн/м}$ .

Рассмотрим подробнее физический смысл вектора поляризации.

Явление поляризации тела связано с наличием в нем заряженных частиц, которые способны смещаться под действием внешнего электрического поля. Электрические заряды в теле подразделяются на две категории – свободные (сторонние) и связанные. Наличие свободных зарядов характерно для проводников. В твердых диэлектриках преобладают связанные заряды, перемещения которых ограничены микроскопическими расстояниями. Связанные заряды в целом не нарушают электрической нейтральности диэлектрика. Т.е., в отсутствие свободных зарядов внутри объема диэлектрика должно выполняться следующее условие:

$$\int_V \rho_{\text{связ}} dV = 0,$$

где  $\rho_{\text{связ}}$  – объемная плотность связанных зарядов,  $V$  - объем диэлектрика.

Связанные заряды в диэлектрике можно рассматривать как систему электрических диполей, состоящих из двух зарядов противоположного знака  $\pm \rho_{\text{связ}}$ , находящихся на расстоянии  $d\mathbf{x}$  друг от друга. В поляризованных средах (средах, подверженных воздействию внешнего электрического поля или кристаллах с определенным типом симметрии) диполи имеют преимущественную ориентацию. Введем вектор, характеризующий элементарный электрический диполь  $d\mathbf{P} = -\rho_{\text{связ}} d\mathbf{x}$ . Тогда

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} = -\text{div} \mathbf{P}. \quad (4)$$

Величина  $\mathbf{P}$  называется вектором поляризации. Напряженность электрического поля внутри диэлектрика может быть определена только с учетом его поляризации. Наряду с объемной плотностью вектор поляризации характеризует также и по-

верхностную плотность связанных зарядов на границе тела. Проинтегрируем выражение (4) с учетом формулы Гаусса-Остроградского по элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими площадками  $\Delta S_1, \Delta S_2$ , прилегающими с обеих сторон к границе тела.

$$\int_{\Delta V} \rho_{\text{связ}} dV = - \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \oint_{\Delta S} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS.$$

При стремлении к нулю толщины слоя, заключенному между площадками  $\Delta S_1, \Delta S_2$ , и учитывая, что вне тела вектор поляризации  $\mathbf{P}$  равен нулю, получим

$$q_{\text{связ}} = P_n / \Delta S_1,$$

где  $q_{\text{связ}}$  - плотность связанных зарядов на границе,  $P_n$  - проекция вектора поляризации на направление внешней нормали.

В результате изучения свойств электрических полей было установлено, что вектор напряженности электрического поля удовлетворяет уравнению Максвелла-Лоренца

$$e_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho_e + \rho_{\text{связ}}. \quad (5)$$

Подставив (3) в (5), получим третье уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}(e_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e.$$

В интегральной форме это уравнение имеет вид

$$\int_{\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_V \rho_e dV.$$

Здесь  $\Omega$  - поверхность, ограничивающая тело. Из этого уравнения следует, что на границе тела должно выполняться условие

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_e, \quad (6)$$

где  $q_e$  - поверхностная плотность сторонних зарядов.

Явление поляризации диэлектриков тесно связано с пьезоэлектрическим эффектом, заключающимся в появлении электрических зарядов на поверхности некоторых типов кристаллов при возникновении в них механических напряжений.

$$P^i = d_{kl}^i \sigma^{kl}, \quad (7)$$

где  $d_{kl}^i$  - тензор пьезоэлектрических модулей.

Существует и обратный пьезоэффект, который заключается в деформации кристалла во внешнем электрическом поле.

$$\varepsilon_{ij} = d_{ij}^k E_k. \quad (8)$$

Здесь следует отметить, что в формулах (7) и (8) присутствует один и тот же тензор пьезоэлектрических модулей  $d_{kl}^i$ .

Вектор намагниченности среды  $\mathbf{M}$  моделируется магнитными диполями аналогично вектору электрической поляризации  $\mathbf{P}$ .

Уравнения (2) и (3) являются определяющими соотношениями для среды с электромагнитным полем. В случае анизотропной среды эти соотношения примут следующий вид:

$$D^i = e^{ij} E_j, \quad B^i = \mu^{ij} H_j, \quad j^i = \delta^{ik} E_k. \quad (2a)$$

Здесь  $e^{ij}$  – симметричный тензор диэлектрических констант,  $\mu^{ij}$  – симметричный тензор магнитной проницаемости  $\delta^{ik}$  – симметричный тензор проводимости.

Вернемся к уравнениям Максвелла. Из третьего и четвертого уравнений системы (1) следует закон непрерывности заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \quad (9)$$

Умножив четвертое уравнение на  $\mathbf{E}$ , второе на  $\mathbf{H}$  и сложив их, получим

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{jE} = - \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

или

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{jE} = - \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

После интегрирования по конечному объему, используя теорему Гаусса-Остроградского, получим интегральное уравнение

$$\oint_{\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_V \mathbf{jE} dV = - \int_V \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (10)$$

Величина  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}$  называется вектором Умова-Пойтинга. Физически уравнение (10) интерпретируется как условие баланса мощности, где  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  – приток электромагнитной энергии из окружающей среды через поверхность  $\Omega$  в единицу времени;  $\left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial U_e}{\partial t}$  – прирост внутренней электромагнитной мощности;  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  – джоулево тепло.

## 2.2. Квазистатические уравнения Максвелла

Для решения задач статики и акустических колебаний конструкций, выполненных из пьезоматериалов, система уравнений Максвелла может быть существенно упрощена. В первых, пьезоматериалы, как правило, являются немагнитными диэлектриками. Из этого следует, что в уравнениях (1) и (10) необходимо положить  $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho_e = 0$  и  $\mathbf{M} = 0$ . Во вторых, скорости перемещения точек среды при механических колебаниях существенно ниже скорости света. Это позволяет отождествить электромагнитное поле и поляризацию в лабораторной и подвижной системах координат и пренебречь магнитным полем, которое создается движущимся электрическим. В этом случае можно положить  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ .

Теперь уравнения Максвелла примут вид [2,3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ;  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

Второе уравнение (11) указывает на потенциальный характер электрического поля т.е.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \quad (12)$$

где  $\varphi$  - электрический потенциал. Определим вектор Умова-Пойтинга как  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -(\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}).$$

С учетом (11) и  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{S} &= -\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} = \nabla \varphi \dot{\mathbf{D}} = \\ &= \operatorname{div}(\varphi \dot{\mathbf{D}}) - \varphi \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \operatorname{div}(\varphi \dot{\mathbf{D}}) - \varphi \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = \operatorname{div}(\varphi \dot{\mathbf{D}}) \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{D}} \varphi. \quad (13)$$

Тогда уравнение баланса мощности электрического поля без учета магнитных слагаемых запишется

$$\oint_{\Omega} \varphi \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = - \int_V \dot{\mathbf{D}} \nabla \varphi dV = - \int_V \dot{\mathbf{D}} \mathbf{E} dV. \quad (14)$$

### 2.3. Уравнение баланса энергии для деформируемой среды

Рассмотрим в Эйлеровых координатах пьезоэлектрическое тело, подверженное воздействию внешней нагрузки и находящееся в электрическом поле. Согласно первому закону термодинамики, имеем уравнение сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}(U + K) = L + D + Q, \quad (15)$$

где  $U$  – внутренняя энергия системы;

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV - \text{кинетическая энергия системы};$$

$$L = \int_V \mathbf{X} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \text{мощность массовых и поверхностных сил};$$

ных сил;

$$D = -\oint_{\Omega} \varphi \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_V \dot{\mathbf{D}} \mathbf{E} dV - \text{поток электромагнитной энергии через поверхность тела};$$

гии через поверхность тела;

$$Q = -\oint_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -\int_V \text{div} \mathbf{q} dV - \text{тепловой поток через поверхность тела};$$

ность тела;

$\rho$  – плотность материала;  $\mathbf{X}$  – вектор объемных сил;  $\mathbf{t}$  – вектор поверхностных сил;  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока.

Введя внутреннюю энергию  $W$ , отнесенную к единице объема  $U = \int_V W dV$ , представим закон сохранения энергии (15)

в виде

$$\int_V (\rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{W}) dV = \int_V (\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \text{div} \mathbf{q}) dV + \oint_{\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Omega,$$

откуда

$$\int_V \dot{W} dV = \int_V (X^i \cdot v_i - \rho v_i \cdot \dot{v}^i + E_i \cdot \dot{D}^i - \text{div} \mathbf{q}) dV + \oint_{\Omega} t^i \cdot v_i d\Omega$$

Заменяя поверхностный интеграл на объемный

$$\oint_{\Omega} t^i v_i d\Omega = \oint_{\Omega} \sigma^{ij} n_j v_i d\Omega = \int_V (\sigma^{ij} v_i)_{;j} dV,$$

и учитывая первый закон движения Коши

$$\sigma^{ij}_{;j} + X^i = \rho v^i,$$

получаем выражение внутренней мощности

$$\dot{W} = \sigma^{ij} v_{i;j} + E_i \dot{D}^i - q_{;i}^i = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}^i - q_{;i}^i. \quad (16)$$

Здесь  $\sigma^{ij}$  – контравариантные компоненты симметричного тензора напряжений Эйлера (Коши),  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i})$  – ковариантные компоненты тензора линейных деформаций,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений. Точкой с запятой в формулах обозначена ковариантная производная.

#### 2.4. Электрическая функция Гиббса

В качестве термодинамического потенциала для электрически поляризованных сред часто используют электрическую функцию Гиббса

$$H = W - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - S \cdot T, \quad (17)$$

где  $T$  – абсолютная температура;  $S$  – энтропия, отнесенная к единице объема. Энтропия связана с приращением количества тепла следующей зависимостью

$$T \cdot \dot{S} = -div \mathbf{q}. \quad (18)$$

Тогда

$$\dot{H} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{E}_i D^i - \dot{T} S \quad (19)$$

Учитывая, что электрическая функция Гиббса зависит от величин  $\varepsilon_{ij}$ ,  $E_i$  и  $T$ , получим

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} \dot{E}_i + \frac{\partial H}{\partial T} \dot{T}. \quad (20)$$

В курсе термодинамики доказывается, что из этого равенства следуют уравнения состояния

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D^i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad S = -\frac{\partial H}{\partial T}. \quad (21)$$

### 2.5. Определяющие соотношения

Разложим электрическую функцию Гиббса в ряд Тейлора в окрестности естественного состояния

$$(\varepsilon_{ij} = 0, E_i = 0 \text{ и } T = T_0).$$

$$\begin{aligned} H(\varepsilon_{ij}, E_k, T) = & H(0, 0, T_0) + \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial H}{\partial E_i} E_i + \frac{\partial H}{\partial T} \Theta + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial E_j} E_i E_j + \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} \Theta^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} \varepsilon_{ij} E_k + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} \Theta + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial T} E_i \Theta \right] + \dots \end{aligned}$$

Будем считать, что в начальном состоянии при условии

$$\sigma^{ij} = 0, D^i = 0, \Theta = T - T_0 = 0$$

функция Гиббса равна нулю. Тогда

$$\begin{aligned} H(\varepsilon_{ij}, E_k, T) = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial E_j} E_i E_j + \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} \Theta^2 \right) + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} \varepsilon_{ij} E_k + \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} \Theta + \frac{\partial^2 H}{\partial E_i \partial T} E_i \Theta \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (21) определим параметры состояния:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{ij} &= \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} E_k + \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \Theta = \\
 &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k - \lambda^{ij} \Theta \\
 D^k &= -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial E_i \partial E_k} E_i - \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial E_k \partial T} \Theta = \\
 &= e^{ki} E_i + \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + p^k \Theta \\
 S &= -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial E_i \partial T} E_i - \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial T^2} \Theta = \\
 &= \lambda^{ij} \varepsilon_{ij} + p^i E_i + \frac{C}{T_0} \Theta,
 \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
 C^{ijkl} &= \frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad \beta^{ijk} = -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k}, \quad \lambda^{ij} = -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}, \\
 e^{ki} &= -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial E_i \partial E_k}, \quad p^k = -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial E_k \partial T}, \quad \frac{C}{T_0} = -\frac{\partial^2 H(0,0,T_0)}{\partial T^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь знаки перед константами соответствуют общепринятым обозначениям. Константы, входящие в уравнение (22), имеют следующий смысл:  $C^{ijkl}$  - тензор модулей упругости при постоянном электрическом поле и температуре;  $\beta^{ijm}$  - тензор пьезоэлектрических констант при температуре  $T_0$ ;  $\lambda^{ij}$  - тензор термоупругих констант при постоянном электрическом поле;  $e^{mk}$  - тензор диэлектрической проницаемости при постоянной деформации и температуре;  $p^m$  - пирозлектрические коэффици-

енты при постоянной деформации;  $C$  - теплоемкость при постоянной деформации и электрическом поле.

Теперь электрическая энтальпия будет иметь вид:

$$H = \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} e^{ki} E_i E_k - \frac{1}{2} \frac{C}{T_0} \Theta^2 - \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \lambda^{ij} \varepsilon_{ij} \Theta - p^i E_i \Theta \quad (23)$$

## 2.6. Изотермический процесс

Ограничимся рассмотрением изотермических процессов ( $\Theta = 0$ ,  $S = 0$ ). В этом случае электрическая функция Гиббса и физические соотношения запишутся следующим образом:

$$H(\varepsilon_{ij}, E_k, T) = \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} e^{ki} E_i E_k - \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} E_k, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \\ D^k &= \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим вариацию электрической функции Гиббса, считая независимыми параметрами перемещения и потенциал электрического поля.

$$\int_V \delta H dV = \int_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i) dV \quad (26)$$

Преобразуем правую часть к поверхностному интегралу.

$$\begin{aligned} \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma^{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V (\sigma^{ij} \delta u_i)_{;j} dV - \int_V \sigma_{;j}^{ij} \delta u_i dV = \\ &= \int_{\Omega} \sigma^{ij} n_j \delta u_i d\Omega - \int_V (\rho \dot{u}^i - X^i) \delta u_i dV = \\ &= \int_{\Omega} t^i \delta u_i d\Omega + \int_V (X^i - \rho \dot{u}^i) \delta u_i dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_V D^i \delta E_i dV &= \int_V \mathbf{D} \nabla (\delta \varphi) dV = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{D} \delta \varphi) dV - \int_V \delta \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \\
&= \int_{\Omega} \delta \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \varphi q_e d\Omega
\end{aligned}$$

Таким образом, вариационное уравнение для поставленной задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\int_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i) dV = \\
&= \int_V (X^i - \rho \ddot{u}^i) \delta u_i dV + \int_{\Omega} (t^i \delta u_i + \delta \varphi q_e) d\Omega
\end{aligned} \tag{27}$$

где  $q_e$  - поверхностная плотность свободных зарядов.

Напомним, что вариационное уравнение (27) записано в переменных Эйлера. При решении задач механики твердого деформируемого тела чаще используют подход Лагранжа, для которого исходные зависимости записываются в начальной конфигурации. Если рассматриваются малые деформации и перемещения, то оба подхода совпадают. Ограничимся именно этим случаем.

## 2.7. Граничные условия для электроупругих систем

В задачах электроупругости граничные условия можно разделить на две группы: механические и электрические.

### 2.7.1. Механические граничные условия

Если пьезоэлектрическая среда занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $\Omega$ , то механические условия сводятся к обычным соотношениям теории упругости

$$\sigma^{ij} n_j = t^i \text{ на } \Omega_\sigma \text{ и } u_i = U_i \text{ на } \Omega_u. \tag{28}$$

### 2.7.2. Электрические граничные условия

Формулировка физически реализуемых электрических граничных условий зависит от способа передачи электрической

энергии пьезоэлектрическому телу. Как подведение, так и снятие энергии с деформируемого пьезоэлектрического тела осуществляется с помощью электродных покрытий, нанесенных на части поверхности тела. Предполагается, что они являются весьма тонкими идеальными проводниками с пренебрежимо малой массой. Наличие покрытия токопроводящим слоем (электродирование) поверхности  $\Omega_{el}$  делает ее эквипотенциальной.

$$\int_{\Omega_{эл}} \delta\varphi q_e d\Omega = \delta\varphi \int_{\Omega_{эл}} q_e d\Omega = Q_{el} \quad (29)$$

Здесь  $Q_{el}$  - суммарный заряд на электроде.

Конкретный вид граничных условий по электрической компоненте вектора состояния требует рассмотрения внешней электрической цепи и источников энергии. В качестве модельных источников электрической энергии используются широко применяемые в электротехнике генераторы напряжения и тока. Генератор напряжения обеспечивает заданный потенциал на электроде, а генератор тока задает подводимый ток.

- 1) На части поверхности  $\Omega_1$  (электродированной) задан потенциал электрического поля  $\varphi_0$ , а на неэлектродированной части поверхности  $\Omega_2$  задан свободный заряд плотностью  $q_0$ . В этом случае  $\varphi = \varphi_0$  на  $\Omega_1$  и  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_0$  на  $\Omega_2$ .
- 2) В случае возбуждения колебаний пьезоэлектрического тела электрическим полем заданной разностью потенциалов на электродах  $\Omega_1^\pm$ , покрывающих тело, задается значение потенциала  $\varphi_0 = \pm V_0(t)$  (рис. 15).
- 3) При нагружении пьезоэлектрического тела генератором тока с заданным значением тока  $I_0(t)$  разность потенциалов на электродах заранее неизвестна. В этом случае из условия непрерывности тока в цепи, включая пьезоэлектрическое тело, вытекает интегральное условие для вектора электрической индукции

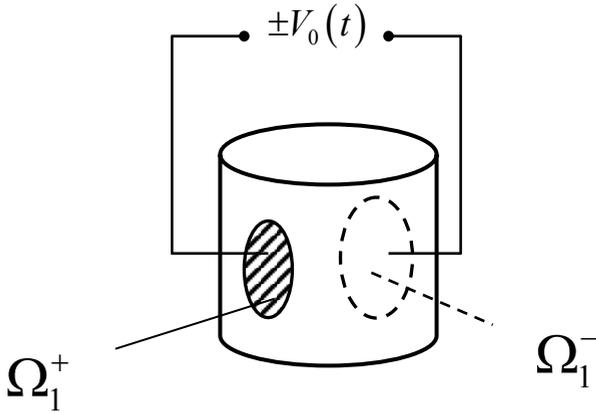


Рис.15.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{zt}} q_e d\Omega = \int_{\Omega_{zt}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -I_0(t) \quad (30)$$

Это интегральное условие нельзя непосредственно использовать как граничное условие. Поэтому в рассмотрение необходимо ввести неизвестное заранее значение потенциалов на электродах  $\varphi|_{\Omega_1^\pm} = \pm V(t)$ . Далее задача решается так же, как в случае задания граничных условий в виде разности потенциалов на электродах  $\Omega_1^\pm$ . После определения всех компонент сопряженного поля на основе уравнений электроупругости и интегрального условия (30) определяется неизвестная величина  $V(t)$ .

- 4) На пассивных электродах должно выполняться условие  $Q_{zt} = \int_{\Omega_{zt}} q_e d\Omega = \int_{\Omega_{zt}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0$ . Здесь  $Q_{zt}$  - заряд на электроде.
- 5) Для случаев, когда пьезоэлементы используются в качестве генераторов электрической энергии, предполагается, что

деформирование пьезокерамического тела осуществляется механическим путем, а нанесенные на части его поверхности электроды  $\Omega_1^+$  и  $\Omega_1^-$  служат для снятия электрической энергии (рис. 16).

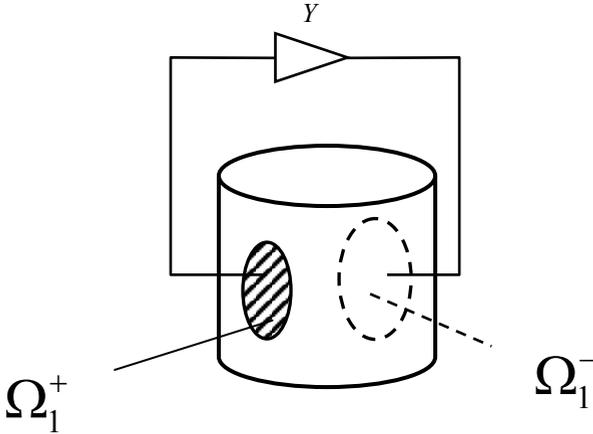


Рис.16.

При этом энергия, которая потребляется во внешней электрической цепи, замыкающей электроды, может быть представлена потерями на элементе с комплексной проводимостью  $Y = Y_1 + iY_2$  (величина обратная сопротивлению).

В этом случае неизвестными являются как значение разности потенциалов на электродах  $V(t)$ , так и ток в цепи  $I(t)$ . Чтобы получить электрическое граничное условие для рассматриваемой задачи, необходимо воспользоваться законом Ома для внешней цепи  $I(t) = Y \cdot V(t)$ . Тогда

$$\int_{\Omega_1} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -Y \cdot V(t) \quad (31)$$

Здесь интеграл берется по поверхности одного из электродов и представляет собой ток через пьезоэлектрический элемент.

Процесс построения решения граничных задач в этом случае состоит в задании на электродных покрытиях неизвестной разности электрических потенциалов  $V(t)$ . Если при этих граничных условиях найдено решение, то неизвестное значение разности потенциалов  $V(t)$  определяется из равенства (31).

б) Из граничного условия (31) следуют два важных предельных случая.

а) Для разомкнутой цепи ( $Y = 0$ ) имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \dot{D}_n d\Omega = 0.$$

б) Если электроды замкнуты ( $Y = \infty$ ), то из условия ограниченности тока смещения следует  $\varphi^+ - \varphi^- = 0$  (разность потенциалов между замкнутыми электродами).

### **3. Моделирование динамического поведения smart-систем с целью оптимизации диссипативных свойств**

Количественная оценка диссипативных свойств конструкций обычно основывается на результатах решения двух задач. Первая из них связана с рассмотрением свободных колебаний. При этом диссипация системы проявляется в затухании колебаний, а скорость затухания количественно оценивает диссипативные свойства системы. Вторая задача связана с рассмотрением вынужденных установившихся колебаний. При этом диссипативные свойства системы проявляются в ограничении резонансных амплитуд. Поэтому построение математической модели и создание соответствующих алгоритмов численной реализации позволит не только оценивать демпфирующие свойства системы, но и эффективно решать проблему оптимизации динамических характеристик smart-конструкций на основе пьезоэлектрических материалов. При этом среди динамических характеристик особый интерес составляют параметры, определяющие демпфирующие свойства системы.

Поиск методами численного моделирования оптимальных по демпфирующим свойствам конструкций связан с большим объемом вычислений. С одной стороны, необходимо исследовать в заданном диапазоне влияние параметров на демпфирующие свойства системы, с другой стороны, требуется при каждой комбинации этих параметров проанализировать поведение исследуемого объекта в определенном спектре динамических воздействий. При рассмотрении свободных колебаний это связано с необходимостью решения динамических задач при различных начальных условиях, а в задаче о вынужденных колебаниях - с построением решений при различных вариантах нагружения в заданном диапазоне частотном диапазоне возмущающих воздействий.

Альтернативой, описанным подходам, в том числе для решения задач оптимизации, предлагается постановка задачи о собственных колебаниях системы, позволяющая оценить демпфирующие свойства вне зависимости от внешних силовых, кинематических и других факторов. При этом собственные частоты являются комплексными величинами. Их действительная часть представляет собой частоту, а мнимая часть - показатель демпфирования (скорость затухания) собственных колебаний.

При исследовании динамического поведения smart-конструкций рассматривается электровязкоупругая задача для кусочно-однородного тела, состоящего из упругих или вязкоупругих элементов, занимающих объем  $V_1$ , и электроупругих (пьезоэлектрических) элементов, занимающих объем  $V_2$ . Пьезоэлектрические элементы через электродированную поверхность могут быть соединены внешней цепью, состоящей из сопротивлений, ёмкостей и индуктивностей.

Вариационное уравнение движения тела, состоящего из упругого и пьезоэлектрических элементов, как было показано выше, формулируется на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла.

Преобразовав уравнение (27) для случая кусочно-однородного тела, получим

$$\int_{V_1} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV - \int_{\Omega_\sigma} t^i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega_p} \delta \varphi q_e d\Omega = 0 \quad (32)$$

где  $\Omega_p$  – поверхность, ограничивающая пьезоэлектрический элемент. Для изотермических процессов в линейных электроупругих средах справедливы следующие физические соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \text{для } V_1, \\ \sigma^{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \\ D^k &= \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \end{aligned} \right\} - \text{для } V_2, \quad (33)$$

где  $C^{ijkl}$  – тензор упругих констант;  $\beta^{ijk}$  и  $e^{ki}$  – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

Если элемент тела  $V_1$  или  $V_2$  обладает вязкоупругими свойствами, то, тензор упругих констант  $C^{ijkl}$  должен быть заменен, согласно принципу Вольтерра, соответствующим вязкоупругим оператором  $C_*^{ijkl}$ . В случае колебательного характера движения с частотой вязкоупругий оператор  $C_*^{ijkl}$  может быть заменен комплексным аналогом динамической жесткости  $C_*^{ijkl}(\omega) = C_R^{ijkl}(\omega) + iC_I^{ijkl}(\omega)$  [4, 5]. Отношение мнимой части комплексного модуля к действительной имеет смысл тангенса потерь.

### ***3.1. Электроупругое тело с последовательной и параллельной RLC цепью***

Пьезоэлектрические элементы, соединенные шунтирующей цепью и присоединенные к механической конструкции, яв-

ляются устройствами, на которых происходит диссипация энергии и тем самым осуществляется дополнительное демпфирование колебаний. При наличии пьезоэлектрического эффекта часть механической энергии, вызванная колебаниями, может быть преобразована в электрическую энергию и рассеяна через шунтирующую цепь, которая и представляет собой механизм пассивного демпфирования. Поэтому, применяя соответствующие электрические цепи, можно рассеять внутреннюю энергию системы и, как следствие, подавить колебания посредством добавления пассивного демпфирования [6].

Среди шунтирующих цепей заслуживают особого внимания резонансные цепи. Обычно в их состав входят индуктивности и сопротивление. Эти цепи позволяют настраиваться на любую демпфируемую частоту. Кроме того, усовершенствования топологии цепи делают возможным одновременное демпфирование нескольких мод колебаний. С механической точки зрения система в целом (пьезоэлемент и резонансная шунтирующая цепь) подобна динамическому демпферу.

Так как пьезоэлемент имеет собственную емкость, то применение шунтирующих цепей для диссипации энергии является самым простым решением этой задачи. Простейший шунт – это резистор соединяющий электроды. Это было впервые экспериментально продемонстрировано Forward [7] и позднее проанализировано Hagoood и von Flotow [8].

Присоединение резистора создает  $RC$ -цепь с резонансной частотой демпфирования, то есть демпфирующий эффект зависит от частоты. Для демпфирования требуемых мод и частот необходимо размещать пьезоэлементы в области высокой интенсивности напряжений, что показали Davis и Lesieutre [9].

Чтобы увеличить степень демпфирования шунтированием, в дополнение к резистору устанавливается катушка индуктивности. Получающееся устройство является аналогом механического демпфера, поглощающего колебания. Forward [7] экспериментально исследовал применение  $RL$ -цепи для управления механическим резонансом стержня с пьезоэлектрическими преобразователями. Он добился снижения амплитуды колебаний для рассматриваемой резонансной моды на порядок.

В отличие от цепей, состоящих только из сопротивления,  $RL$ -цепи в общем случае демпфируют только одну моду колебаний. Эта методика демпфирования обычно упоминается как пассивное демпфирование шунтированием. Особенностью такого рода систем управления колебаниями является стабильность для определенных частот колебаний. Это качество обеспечивается фундаментальными свойствами пассивных систем демпфирования посредством шунтирования [10, 11]. Hagood и von Flotow [8] разработали первую аналитическую модель пьезоэлектрического демпфера колебаний на основе  $RL$ -цепи. Они выявили, что ключевым параметром является коэффициент электромеханической связи (КЭМС), характеризующий способность устройства преобразовывать механическую энергии в электроэнергию. Это - количественный показатель, который меняется в зависимости от рассматриваемой моды колебаний. Авторам удалось экспериментально и аналитически определить количественно коэффициент электромеханической связи через разность между собственными частотами при разомкнутыми и короткозамкнутыми электродами пьезоэлемента.

Резонансная последовательная шунтирующая цепь была предложена Hagood и von Flotow [8]. Та же самая схема рассматривается у Lesieutre [12], Caruso [13], Fleming и др. [10-11], Park и Inman [14] и др.

Параллельная резонансная шунтирующая цепь впервые была предложена Wu [15].

В работе [13] Giovanni Caruso показал, что последовательная  $RL$ -цепь является самой эффективной при пассивном демпфировании колебаний. Параллельная  $RL$ -цепь дает коэффициент демпфирования колебаний немного меньше, чем одна последовательная  $RL$ -цепь. Экспериментальные исследования подтвердили теоретические предсказания.

Шунтирование пьезоэлектрических материалов электрическими цепями весьма перспективно для подавления вибраций.

Пьезоэлектрические элементы, соединенные шунтирующей цепью и присоединенные к механической конструкции, являются устройствами, на которых происходит диссипация энергии и тем самым осуществляется дополнительное демпфирование колебаний. Из-за пьезоэлектрического эффекта часть меха-

нической энергии, связанной с колебаниями, может быть преобразована в электроэнергию и просто рассеяна через шунтирующую цепь, которая и представляет собой механизм пассивного демпфирования. Поэтому, применяя соответствующие электрические цепи, можно рассеять внутреннюю энергию и, как следствие, подавить колебания посредством добавления пассивного демпфирования [6].

Рассмотрим вариант электрических граничных условий, когда одна часть электродированной поверхности пьезоэлемента  $\Omega_m^{el}$  соединена с точкой нулевого потенциала последовательной  $RLC$ -цепью, а на другой части  $\Omega_k^{el}$  задан нулевой потенциал. В этом случае потенциал на незаземленном электроде будет вычисляться по следующей формуле:

$$\varphi_m = \frac{Q_m}{C} + RI_m + LI_m = \frac{Q_m}{C} + R\dot{Q}_m + L\ddot{Q}_m, \quad (34)$$

где  $\varphi_m$  и  $Q_m = \int_{\Omega_m^{el}} q_e d\Omega$  - электрический потенциал и суммарный заряд на  $\Omega_m^{el}$ ,  $I_m = \dot{Q}_m$  - ток в проводнике,  $R$  - активное сопротивление;  $C$  - ёмкость;  $L$  - индуктивность. Тогда интеграл по поверхности  $\Omega_m^{el}$  в уравнении (32) будет определять электрические граничные условия для пьезоэлектрических участков.

$$\int_{\Omega_m^{el}} q_e \delta\varphi d\Omega = -\delta\varphi_m Q_m \quad (35)$$

В уравнении (35) учтено, что электродированная поверхность  $\Omega_m^{el}$  эквипотенциальна, а цепь является внешним элементом по отношению к исследуемой системе (смена знака перед интегралом). В этой постановке система уравнений данная уравнением (32) при отсутствии внешней нагрузки ( $X^i = t^i = 0$ ) является однородной и может быть сформулирована как задача на собственные значения.

$$\int_{V_1} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV + \delta \varphi_m Q_m = 0 \quad (36)$$

В этом случае система уравнений (36), (33), (35) допускает квазигармоническое решение, описываемое временной функцией

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \bar{u}_i e^{i\psi t} = \tilde{u}_i(t) e^{i\omega t}, \\ \varepsilon_{ij}(t) &= \bar{\varepsilon}_{ij} e^{i\psi t} = \tilde{\varepsilon}_{ij}(t) e^{i\omega t}, \\ \varphi_m(t) &= \bar{\varphi}_m e^{i\psi t} = \tilde{\varphi}_m(t) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Здесь  $\psi = \omega + i\eta$  - комплексная собственная частота колебаний  $\tilde{u}_i(t) = \bar{u}_i e^{-\eta t}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \bar{\varepsilon}_{ij} e^{-\eta t}$ ,  $\tilde{\varphi}_m(t) = \bar{\varphi}_m e^{-\eta t}$  - медленно меняющиеся функции времени,  $\bar{u}_i$  комплексная мгновенная амплитуда колебаний. Найденные комплексные собственные частоты определяют резонансные частоты  $\text{Re}(\psi) = \omega$  системы и ее показатели демпфирования  $\text{Im}(\psi) = \eta$ . Комплексные мгновенные амплитуды колебаний определяют формы и фазы колебаний. В этом случае уравнение (36) может быть разрешено относительно суммарного заряда.

$$Q_m(t) = \frac{\bar{\varphi}_m \cdot e^{i\psi t}}{C^{-1} - \psi^2 \cdot L + i \cdot \psi \cdot R} \quad (37)$$

После очевидных преобразований получаем вариационное уравнение на собственные значения (черту над переменной опускаем).

$$\begin{aligned} & \int_{V_2} (\delta \varepsilon_{ij} (C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k) - \delta E_k (\beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i) - \psi^2 \rho \delta u^i u_i) dV + \\ & + \int_{V_1} (\delta \varepsilon_{ij} C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \psi^2 \rho \delta u^i u_i) dV + \frac{\varphi_m \delta \varphi_m}{C^{-1} - L\psi^2 + i\psi R} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, для пьезоэлектрического тела получено вариационное уравнение квазигармонических колебаний, которое содержит диссипативные слагаемые, обусловленные потерей энергии во внешних электрических цепях с сопротивлением  $R$ . Индуктивность внешнего контура  $L$  и ёмкость  $C$  выступают в качестве своеобразных аналогов механической массы и жесткости, с помощью которых можно управлять собственными частотами колебаний.

Для параллельной  $RLC$ -цепи протекающий через нее ток равен сумме токов, протекающих через ее элементы.

$$I_m = I_m^R + I_m^L + I_m^C = \frac{\varphi_m}{R} + C\dot{\varphi}_m + \frac{\int \varphi_m dt}{L} \quad (39)$$

Учитывая квазигармонический характер протекающего процесса, получим

$$I_m = \bar{\varphi}_m \left( \frac{1}{R} + i\psi C - \frac{i}{L\psi} \right) \cdot e^{i\psi t}$$

Выполнив в последнем уравнении интегрирование по времени, получаем суммарный заряд на электроде:

$$Q_m = \bar{\varphi}_m \left( -\frac{i}{\psi R} + C - \frac{1}{L\psi^2} \right) \cdot e^{i\psi t} \quad (40)$$

После преобразований аналогичных последовательной  $RLC$ -цепи получаем вариационное уравнение на собственные значения (черту над переменной опускаем):

$$\begin{aligned} & \int_{V_2} \left( \delta \varepsilon_{ij} \left( C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \right) - \delta E_k \left( \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \right) - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \\ & + \int_{V_1} \left( \delta \varepsilon_{ij} C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \varphi_m \delta \varphi_m \left( -\frac{i}{\psi R} + C - \frac{1}{L\psi^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

При отсутствии в  $RLC$ -цепях тех или иных элементов в уравнениях (38) и (41) должны быть опущены соответствующие слагаемые. Более сложные цепи могут быть синтезированы комбинацией уравнений (38) и (41) [16-19].

### **3.2. Конечно-элементная реализация задачи для последовательной и параллельной $RLC$ -цепей**

Сформулированная задача может быть решена с помощью метода конечных элементов. Для этого запишем вариационное уравнение (38) в матричной форме.

$$\int_{V_1} \left( \delta \{ \varepsilon_1 \}^T [D_1] \{ \varepsilon_1 \} - \psi^2 \delta \{ u_1 \}^T [\rho_1] \{ u_1 \} \right) dV + \int_{V_2} \left( \delta \{ \varepsilon_2 \}^T [D_2] \{ \varepsilon_2 \} - \psi^2 \delta \{ u_2 \}^T [\rho_2] \{ u_2 \} \right) dV + \frac{\delta \varphi_c \varphi_c}{C^{-1} - \psi^2 L + i \psi R} = 0 \quad (42)$$

Аналогично для уравнения (41).

$$\int_{V_1} \left( \delta \{ \varepsilon_1 \}^T [D_1] \{ \varepsilon_1 \} - \psi^2 \delta \{ u_1 \}^T [\rho_1] \{ u_1 \} \right) dV + \int_{V_2} \left( \delta \{ \varepsilon_2 \}^T [D_2] \{ \varepsilon_2 \} - \psi^2 \delta \{ u_2 \}^T [\rho_2] \{ u_2 \} \right) dV + \varphi_m \delta \varphi_m \left( -\frac{i}{\psi R} + C - \frac{1}{L\psi^2} \right) = 0 \quad (43)$$

Здесь обобщенные векторы перемещений, деформаций, напряжений и матрица плотности для областей  $V_1$  и  $V_2$  записываются следующим образом:

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_1\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma_1\} = \begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{12} \end{Bmatrix}, \quad [\rho_1] = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\{u_2\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \varphi \end{Bmatrix},$$

$$\{\varepsilon_2\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma_2\} = \begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{12} \\ D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{Bmatrix}, \quad [\rho_2] = \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Физические соотношения (33) для пьезокерамики, поляризованной в направлении оси  $X_3$ , в матричной форме будут иметь вид

$$\{\sigma_2\} = [D_2]\{\varepsilon_2\} = \begin{bmatrix} C & \beta \\ \beta^T & -e \end{bmatrix} \{\varepsilon_2\} \quad (46)$$

где

$$[D_2] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{13} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{13} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & \beta_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 & -e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 & 0 & 0 & -e_{11} & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{13} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \end{bmatrix} \quad (47)$$

В случае поляризации керамики в направлении какой-либо другой оси соответствующим образом должна быть преобразована матрица коэффициентов  $[D_2]$  в (47). Для элемента тела  $V_1$  матрица упругости  $[D_1]$  будет иметь размер  $6 \times 6$  и содержать только элементы  $C_{ij}$ .

Вариационная задачи (42) и (43) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) сводится к алгебраической проблеме собственных значений:

$$\left( [K^s] - \psi^2 [M^s] + [G(\psi)] \right) \{X^s\} = 0 \quad (48)$$

где  $\{X^s\}$  - комплексный вектор узловых параметров,  $\psi$  - комплексная собственная частота,  $[K^s]$  - матрица жесткости (в общем случае комплексная),  $[M^s]$  - матрица масс,  $[G]$  - матрица коэффициентов внешних  $RLC$ -цепей.

Полученные из решения задачи на собственные значения (48) комплексные частоты  $\psi = \omega + i\eta$  определяет резонансные

частоты ( $\omega$ ) и показатели демпфирования ( $\eta$ ) системы. Комплексные собственные векторы определяют формы и фазы колебаний.

Уравнение (48) существенно отличается от обобщенной проблемы на собственные значения наличием матрицы  $[G(\psi)]$ . Условием существования нетривиального решения является

$$D(\psi) = \det\left(\left[K^s\right] - \psi^2\left[M^s\right] + \left[G(\psi)\right]\right) = 0 \quad (49)$$

Для решения поставленной задачи - определения динамических характеристик электровязкоупругих систем с внешними электрическими цепями на основе решения спектральной задачи использовались некоторые возможности программного комплекса ANSYS.

1. Осуществлялся предварительный анализ собственных частот и форм колебаний электроупругого тела без внешних цепей.
2. Строилась конечно-элементная сетка и исследовалась сходимость при модальном анализе тела без внешних цепей.
3. Формировались матрицы жесткости  $[K^s]$  и масс  $[M^s]$ , используемые в уравнении (49).

Характеристическое уравнение (49) с комплексными коэффициентами решалось с помощью модифицированного метода парабол, позволяющего определять корни в нужном порядке.

#### 4. Примеры численного анализа и оптимизации

Для оценки перспективности описанных технологий был выполнен численный эксперимент по расчету и оптимизации демпфирующих свойств кусочно-однородного упруго - электроупругого (пьезоэлектрического) тела. Часть пьезоэлектрического элемента была покрыта электродированным пьезоэлектрическим слоем, к которому подсоединяется двухполюсник в виде внешней электрической *RLC*-цепи. Условие электродирования

обеспечивает эквипотенциальность поверхности по электрическому потенциалу. Рассматривались два подхода к решению поставленной задачи. В первом случае решалась задача о собственных колебаниях, где определялась комплексная собственная частота. Во втором случае определялась резонансная амплитуда при установившихся вынужденных колебаниях системы, нагруженной гармонической силой в определенной точке.

Пример 1.

Для первого варианта объектом моделирования являлся макет крыла самолета из упругого материала, представляющей собой косоугольную пластину шириной  $h = 9$  м, длиной  $b = 15$  м и толщиной  $t = 0.3$  м, защемленной по торцу и занимающей объем  $V_1$ . К пластине присоединен пьезоэлемент длиной  $a = 3$  м и толщиной  $t_1 = 0.15$  м, занимающий объем  $V_2$  (рис.17). Электродированная поверхность пьезоэлектрического элемента через двухполюсник соединялась с точкой нулевого потенциала (рис.18).

Предполагалось найти структуру и параметры двухполюсника для наилучшего гашения первой и второй моды колебаний (рис.19). Пьезослой считался выполненным из пьезокерамики PZT-5, пластина – из алюминиевого сплава.

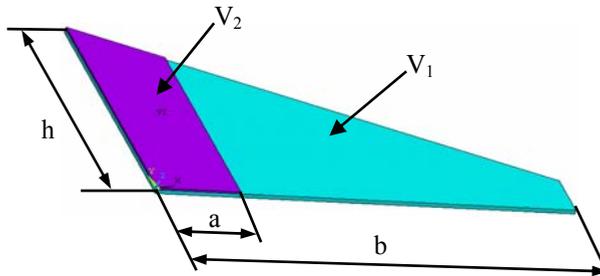


Рис.17. - Макет крыла самолета с присоединенным пьезоэлементом

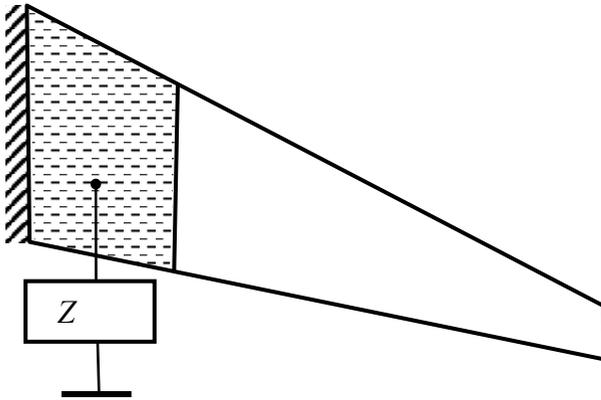


Рис. 18. - Схема крыла.

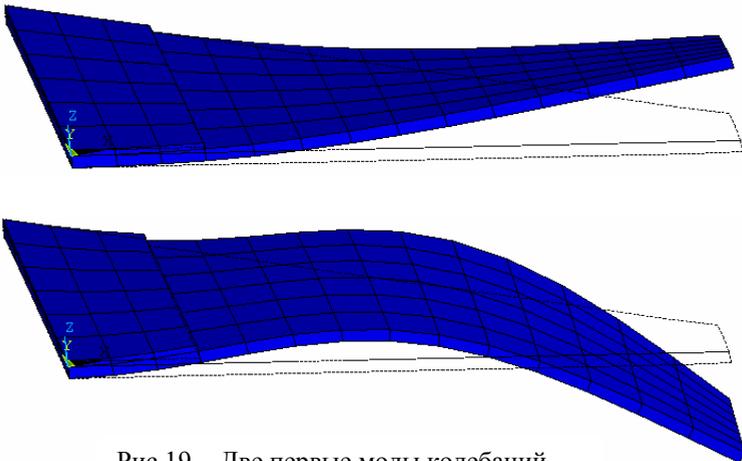
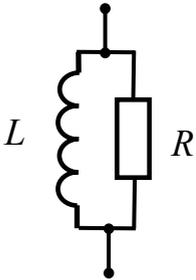
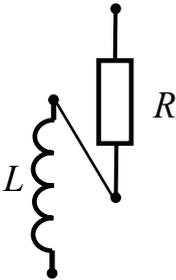


Рис.19. - Две первые моды колебаний

В качестве двухполюсника рассматривались следующие варианты цепей (таблица 1):

Таблица 1

 <p>1) Одиночный резистор <math>R</math></p>	 <p>2) Одиночная индуктивность <math>L</math></p>	 <p>3) Одиночная емкость <math>C</math></p>
 <p>4) Параллельная <math>RL</math>-цепь</p>	 <p>5) Последовательная <math>RL</math>-цепь</p>	

Зависимости коэффициентов демпфирования  $N = \eta(c^{-1})$  и частот  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (Hz) от параметров двухполюсника для различных мод колебаний приведены на рис. 20 – 25.

Из рисунков 20-25 видно, что на показатель демпфирования в простейших цепях влияет только пассивное сопротивление  $R$ .

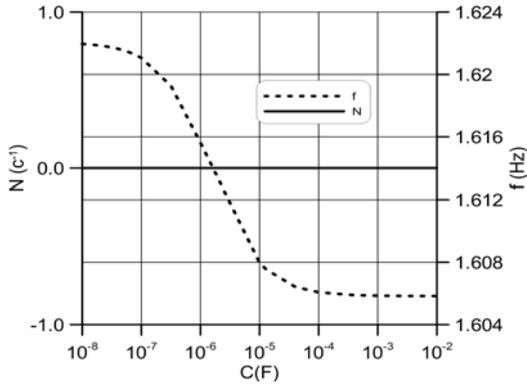


Рис.20. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от ёмкости  $C$

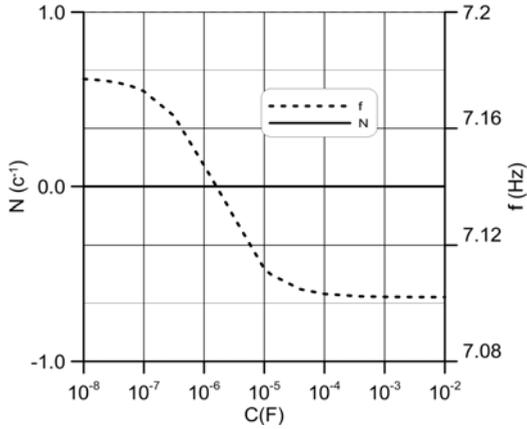


Рис.21. - Зависимость второй частоты и коэффициента демпфирования от ёмкости  $C$

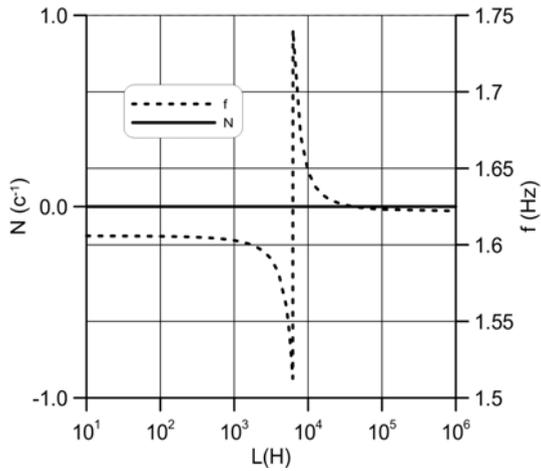


Рис.22. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от индуктивности  $L$

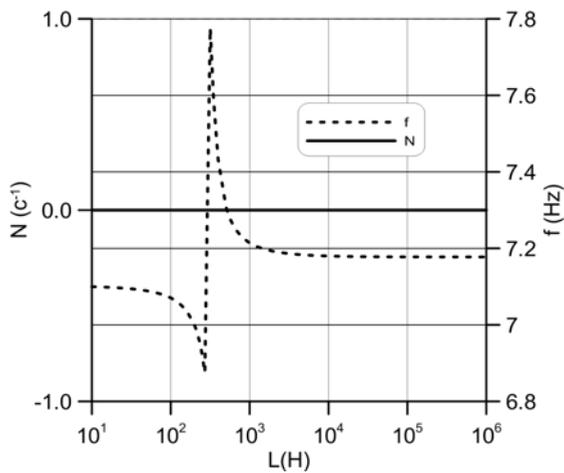


Рис.23. - Зависимость второй частоты и коэффициента демпфирования от индуктивности  $L$

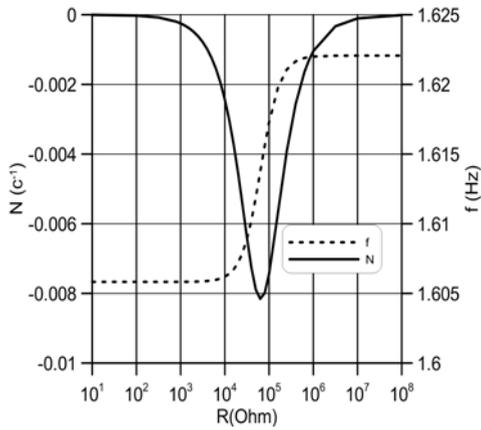


Рис.24. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$

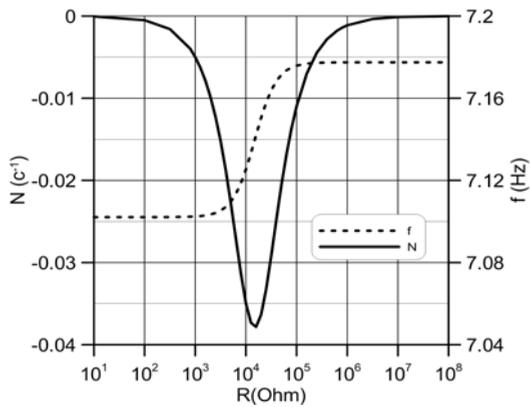


Рис. 25. - Зависимость второй частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$ .

На рисунках 26-33 приведены графики зависимости коэффициентов демпфирования конструкции от величины сопротивления шунтирующего резистора  $R$  при различных значениях индуктивности  $L$  для параллельных и последовательных цепей.

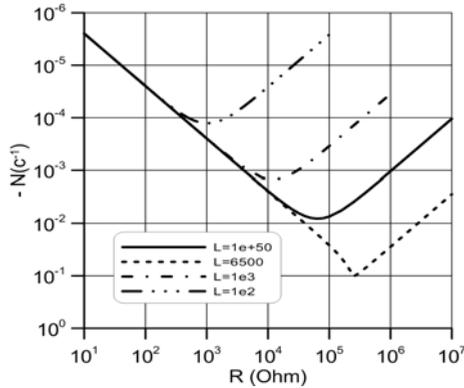


Рис.26. - Зависимость коэффициента демпфирования **первой моды** от  $R$  для **параллельной**  $RL$ -цепи при фиксированных  $L$ .

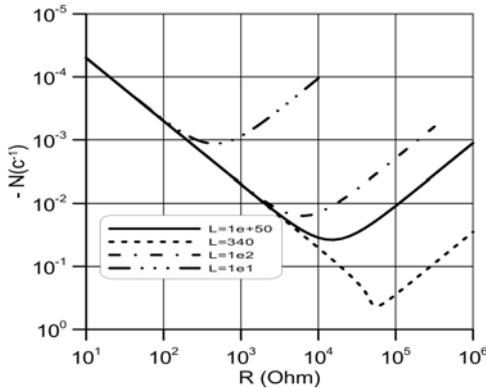


Рис.27. - Зависимость коэффициента демпфирования **второй моды** от  $R$  для **параллельной**  $RL$ -цепи при фиксированных  $L$ .

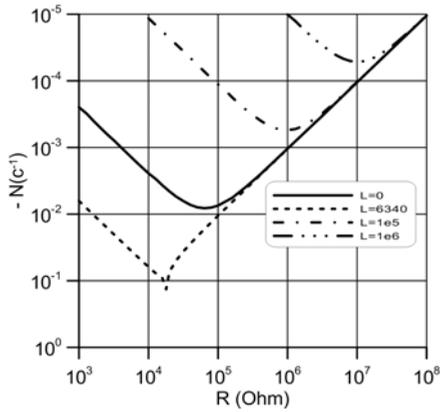


Рис.28. - Зависимость коэффициента демпфирования **первой моды** от  $R$  для **последовательной**  $RL$ -цепи при фиксированных  $L$ .

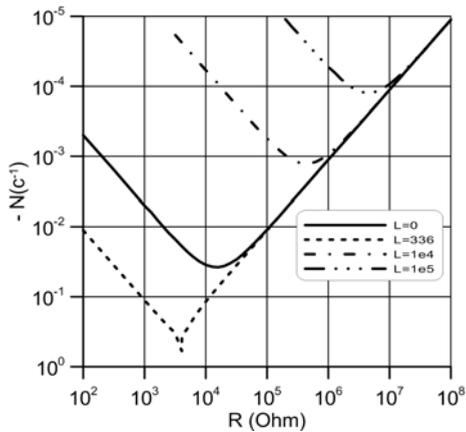


Рис. 29. - Зависимость коэффициента демпфирования **второй моды** от  $R$  для **последовательной**  $RL$ -цепи при фиксированных  $L$ .

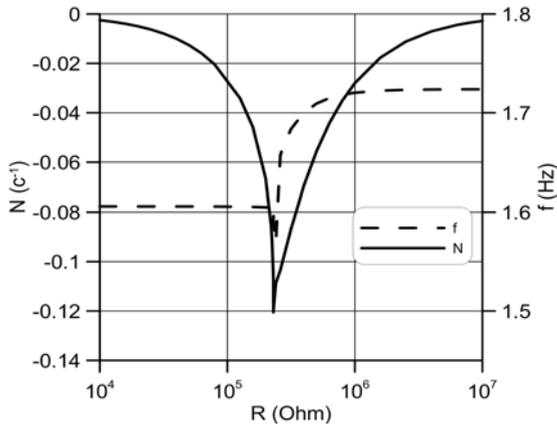


Рис.30. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$  для **параллельной**  $RL$ -цепи при оптимальном  $L = 6500H$ .

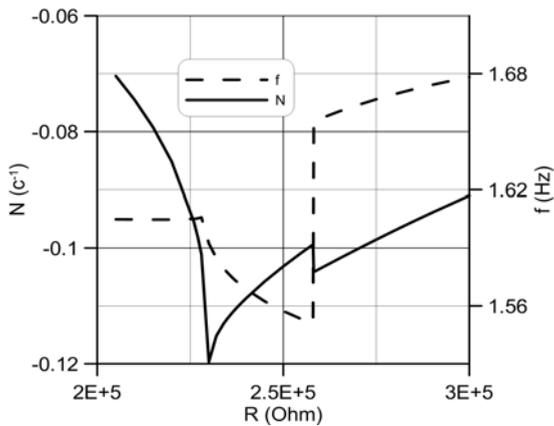


Рис.31. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$  для **параллельной**  $RL$ -цепи при оптимальном  $L = 6500H$  (растянутая область вблизи оптимума)

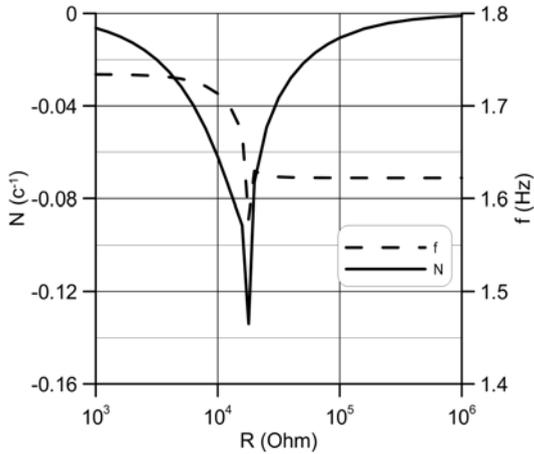


Рис.32. - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$  для **последовательной**  $RL$ -цепи при оптимальном  $L = 6340H$  .

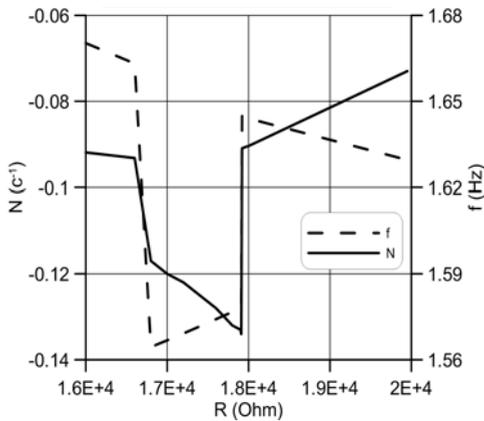


Рис.33 - Зависимость первой частоты и коэффициента демпфирования от сопротивления  $R$  для **последовательной**  $RL$ -цепи при оптимальном  $L = 6340H$  (растянутая область).

Сравнивая результаты определения коэффициентов демпфирования элементарной R цепи и последовательной RL видно, что последняя в 15 раз более эффективна. Это объясняется тем, что собственная емкость пьезоэлемента и индуктивность образуют резонансный контур, что приводит к заметному увеличению электрического тока через цепь. Графики для второй, третьей и четвертой мод по характеру не отличаются от первой.

Пример 2.

Для иллюстрации второго подхода рассматривалась задача об установившихся вынужденных колебаниях. Динамические свойства системы определяются на основе анализа семейства амплитудно-частотных характеристик, полученных при различных способах возбуждения гармонической нагрузкой частотой  $p$  ( $\{F\} = \{F_0\} e^{ipt}$ ).

В рамках разработанной схемы метода конечных элементов задача построения амплитудно-частотных характеристик электроупругих систем сводится к решению системы линейных неоднородных уравнений (50) для различных значений частоты  $p$ , полученной из уравнения (48) путем добавления вектора нагрузок.

$$([K] - p^2 [M] + [G(p)]) \{X_0\} = \{F_0\} \quad (50)$$

Здесь  $[K]$  – матрица жесткости,  $[M]$  – матрица масс,  $[G(p)]$  – матрица коэффициентов внешних RLC-цепей,  $\{X_0\}$  – вектор амплитуды колебаний,  $\{F_0\}$  – вектор амплитуды нагрузок. Элементы матрицы  $G$  зависят от параметров и вида RLC-цепей.

Рассматривалась задача о колебаниях конической оболочки, изображенной на рис. 34 ( $r = 0.643$  м,  $h = 0.84$  м, угол при вершине  $\alpha = 21^\circ$ , толщина  $t = 0.008$  м). Оболочка по части по-

верхности покрыта пьезослоем, поляризованным в направлении толщины.

Материал оболочки имел механические характеристики стали с тангенсом потерь  $5 \cdot 10^{-5}$ , а электромеханические характеристики пьезослоя соответствовали пьезокерамике PZT-4.

Для гашения неосесимметричных форм колебаний электродирование пьезослоя было выполнено в виде 16 секторов. Количество секторов определяется числом полуволн, образующихся в окружном направлении при колебаниях по низшим собственным частотам. В нашем случае три первые моды характеризуются образованием 4, 3 и 5 волн в окружном направлении (рис. 35-37). Все сектора пьезослоя зашунтированы идентичными последовательными  $R_i L_i$  цепями. Колебания возбуждались осевой силой  $P = 1N$ , приложенной в точке большого радиуса конуса.

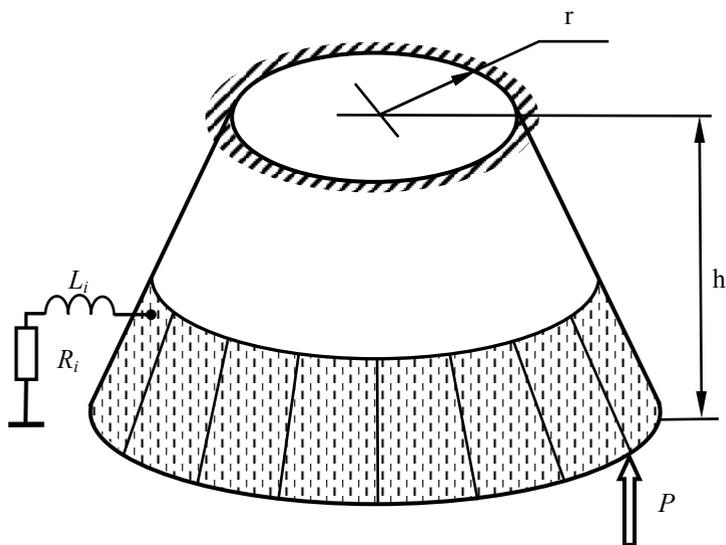


Рис.34 – Схема конической оболочки

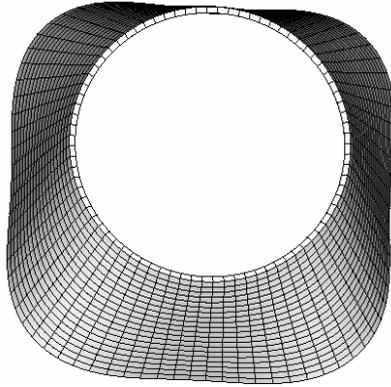


Рис.35. - Форма колебаний конической оболочки при первой собственной частоте  $f_1=97$  Hz

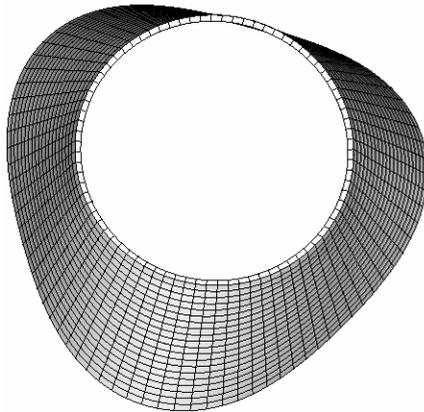


Рис.36. - Форма колебаний конической оболочки при второй собственной частоте  $f_2=111$  Hz

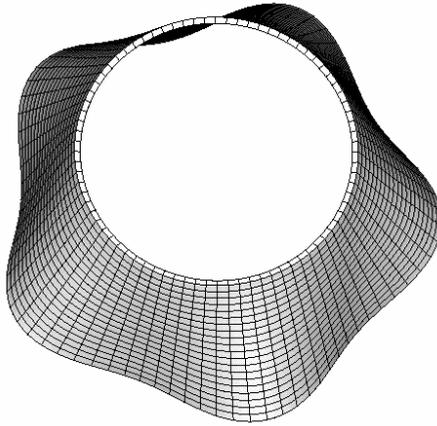


Рис.37. - Форма колебаний конической оболочки при третьей собственной частоте  $f=118$  Hz

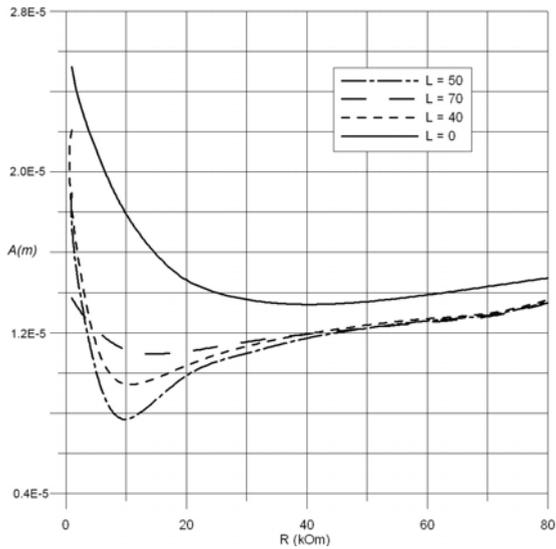


Рис.38. - Зависимости амплитуд колебания от величины сопротивления резисторов

Оптимизация заключалась в определении таких значений сопротивления и индуктивности, при которых амплитуда колебаний достигала бы минимума, т.е. осуществлялось максимальное демпфирование колебаний. Амплитуда колебаний вычислялась в точке приложения силы при решении системы (50).

На рисунке 38 приведено семейство кривых, показывающих зависимости амплитуд колебания от величины сопротивления резисторов для индуктивности, равной 0, 40, 50 и 70 Гн. Из графика видно, что максимальное гашение колебаний происходит при сопротивлении, равном 11 кОм, и индуктивности, равной 50 Гн.

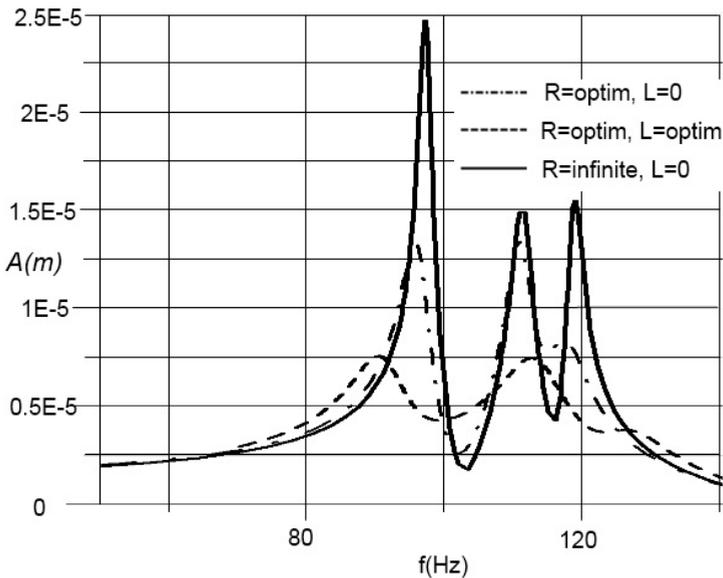


Рис.39. - Амплитудно-частотные характеристики оболочки с различными вариантами параметров сопротивления и индуктивности.

Для оценки снижения резонансных амплитуд колебаний были построены амплитудно-частотные характеристики колебаний рассматриваемой оболочки с различными вариантами параметров сопротивления и индуктивности (рис.39). Из графиков,

приведенных на рис.39, видно, что при отсутствии индуктивности и оптимальном сопротивлении амплитуда колебаний уменьшилась вдвое. При подключении катушки индуктивности удалось снизить амплитуду в четыре раза.

### **Заключение**

Исследование возможностей современных технологий, основанных на модальном анализе электровязкоупругих систем с внешними пассивными дискретными связями, подтвердило их высокую эффективность для решения задачи оптимизации динамических характеристик конструкций из smart материалов.

Тот факт, что частотные и диссипативные характеристики определяются из решения задачи о собственных колебаниях, позволяет считать их универсальными для данной конструкции, т.к. они не зависят ни от начальных условий, ни от вида и способа нагружения.

Использование программного комплекса ANSYS для построения конечноэлементной сетки и формирования глобальных матриц жесткости и масс электроупругого тела позволяет исследовать объекты практически любой пространственной конфигурации.

Разработанная процедура построения конечноэлементной модели электрических цепей позволят рассматривать внешние связи произвольного вида.

Учет вязкоупругих свойств посредством комплексных динамических молей отличается универсальностью, надежностью и математической эффективностью.

### **Литература**

1. Henry A. Sodano .Macro-Fiber Composites for Sensing, Actuation and Power Generation. Thesis Submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Mechanical Engineering July 28, 2003 Blacksburg, Virginia Copyright 2003, 145p.

2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М: Наука, 1988. 471с.
3. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. Киев: Наук. думка, 1988. 319 с.
4. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов: Экспериментальные и численные методы. Учеб. пособие для вузов.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 304 с.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1977, 384с.
6. Felipe Antonio C. Viana Valder Steffen, Jr Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits //J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. July-September 2006, Vol. XXVIII, No. 3 / 293-310.
7. Forward RL. Electronic damping of vibrations in optical structures. Journal of Applied Optics 1979;18:690–7.
8. Hagood NW, Von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. Journal of Sound and Vibration 1991;146:243–68.
9. Davis CL, Lesieutre GA. Modal strain energy approach to the prediction of resistively-shunted piezoceramic damping. Journal of Sound and Vibration 1995;184(1):129–139.
10. Moheimani S.O.R., Fleming A.J. and Behrens S. 2002 On the feedback structure of wideband piezoelectric shunt damping systems *Smart Mater. Struct.* **12** 49–56
11. Moheimani S.O.R., Fleming A.J. and Behrens S. 2002 On the feedback structure of wideband piezoelectric shunt damping systems *Proc. IFAC World Congr. (Barcelona, Spain, July 2002)*
12. Lesieutre GA. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. The Shock and Vibration Digest May 1998; 30(3).
13. Giovanni Caruso. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping *Smart Mater. Struct.* 10 (2001) 1059–1068

14. Park, C. H. and Inman, D. J., 2003, "Enhanced Piezoelectric Shunt Design", *Shock and Vibration*, Vol. 10, No. 2, pp 127-133.
15. Wu, S. Y., 1996, "Piezoelectric Shunts with Parallel R-L Circuit for Structural Damping and Vibration Control", *Proc. SPIE Smart Structures and Materials, Passive Damping and Isolation*; SPIE Vol. 2720, pp 259-269.
16. Matveyenko V.P., Kligman E.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions. // *Journal of Vibration and Control*, 1997, V.3, p. 87-102.
17. Клигман Е.П., Матвеевко В.П., Юрлова Н.А. Оптимизация динамических свойств тонкостенных электроупругих систем // *Известия РАН. МТТ* 2005 г. №2 – 179-187.
18. Matveyenko V.P., Kligman E.P., Yurlova N.A. Simulation and optimization of dissipative properties of viscoelastic and electroviscoelastic deformable systems.// *Proceedings European Conference on Structural Control 4ECSC St. Petersburg 2008 September 8-12, 2008.* , Vol. 2 - p. 544-556.
19. Johnson, C. D., 1995, "Design of Passive Damping Systems", *Journal of Vibration and Acoustics* Vol. 117, Special 50th Anniversary Design Issue, pp 171-176