

621.05  
076



И. А. ДРУЖИНСКИЙ

# МЕХАНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

**И. А. ДРУЖИНСКИЙ**  
лауреат Государственной премии СССР  
доктор технических наук

# **МЕХАНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

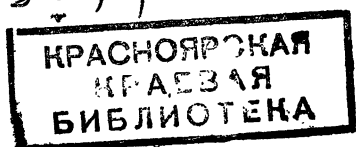


**ЛЕНИНГРАД  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
1977**

6П5.1  
Д76  
УДК 621.01

Рецензент Д. Г. Гольцикер

3074



Дружинский И. А.

Д76

Механические цепи. Л., «Машиностроение»  
(Ленингр. отд-ние), 1977.

240 с. с ил.

Книга содержит необходимые теоретические материалы и практические приемы решения динамических задач механики при гармоническом воздействии с использованием метода комплексных сопротивлений. Рассмотрены линейные системы с сосредоточенными элементами, находящиеся в поступательном, вращательном и комбинированном движениях.

В качестве рабочего органа подробно изложены механические цепи: их сущность, способы построения в зависимости от действия сил (крутящих моментов) или скоростей (угловых скоростей), средства для проведения анализа и синтеза механических цепей.

Книга предназначена для инженеров-механиков, работающих в области конструирования и исследования машин; она также может быть полезной для аспирантов и студентов старших курсов механико-машиностроительных факультетов.

Д 20302—001  
038(01)—77 001—77

6П5.1

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $m$  — масса тела, кг·с<sup>2</sup>/м;  
 $r$  — сопротивление, пропорциональное скорости, кгс·с/м;  
 $k$  — упругость, кгс/м;  
 $1/k$  — эластичность, м/кгс;  
 $Q$  — внешняя сила, кгс;  
 $Q_m, Q_r, Q_k$  — часть внешней силы, идущей на преодоление соответственно массы, сопротивления или упругости, кгс;  
 $y$  — линейное перемещение, м;  
 $y_m, y_r, y_k$  — часть линейного перемещения, образуемого под действием частей внешней силы, м;  
 $v = dy/(dt) = \dot{y}$  — линейная скорость, м/с;  
 $a = \dot{v} = \ddot{y}$  — линейное ускорение, м/с<sup>2</sup>;  
 $I$  — момент инерции тела, кгс·м·с<sup>2</sup>  
 $\rho$  — сопротивление вращению, пропорциональное угловой скорости, кгс·м·с/рад;  
 $\kappa$  — упругость крутильная, кгс·м/рад;  
 $M$  — внешний крутящий момент, кгс·м;  
 $M_H, M_r, M_\kappa$  — часть внешнего крутящего момента, идущего на преодоление соответственно момента инерции, сопротивления вращению<sup>1</sup> и упругости крутильной, рад;  
 $\varphi$  — угол поворота, рад;  
 $\varphi_H, \varphi_r, \varphi_\kappa$  — часть углового поворота образуемого под действием частей внешнего крутящего момента, рад;  
 $\delta = d\varphi(dt) = \dot{\varphi}$  — угловая скорость, рад/с;  
 $\varepsilon = \dot{\delta} = \ddot{\varphi}$  — угловое ускорение, рад/с<sup>2</sup>;  
 $t$  — время, с;  
 $\omega$  — круговая частота, рад/с;  
 $f = \omega/(2\pi)$  — циклическая частота, рад;  
 $\zeta$  — фазовый угол, рад;  
 $j = \sqrt{-1}$  — мнимое число ( $j^2 = -1$ ;  $j^3 = -j$ ;  $j^4 = 1$ );  
 $\tau = 1/f = 2\pi/\omega$  — период колебания, с/рад.

<sup>1</sup> Момент сопротивления в данном понимании не соответствует принятому в курсе «Сопротивления материалов» термину и имеющему размерность м<sup>3</sup>.



*Посвящается рабочим, техникам, инженерам  
ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции  
Станкостроительного объединения имени Я. М. Свердлова,  
где многие годы проработал конструктором автор*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий период развития науки и техники характеризуется процессом взаимного проникновения различных отраслей наук, которое приводит к тому, что грани между науками становятся условными, а наиболее рациональные методы исследований, применяемые в сопредельных областях знаний, используются и в других науках: в теоретической механике, в теории автоматического регулирования, теории радиоэлектрических и электронных цепей используют различные методы решения задач, связанные с применением корректирующих звеньев. Кроме того, необходимо отметить возможность использования методов, применяемых в электротехнике.

Физическая теория современной механики располагает мощными средствами анализа сложных динамических систем. К ним относятся принцип Гамильтона и его частные решения в виде уравнений Лагранжа, концепции виртуальных перемещений и принцип Даламбера, основанные на законах Ньютона.

Классический метод анализа динамических механических систем позволяет привести такие этапы решений, как определение системы, установление и решение уравнений движения, выбор граничных условий и определение постоянных, введение параметров действительной системы в общее решение и получение частных решений. Этот общий метод применим к любой системе в том единственном случае, когда дифференциальные уравнения могут быть решены. Однако время, затрачиваемое на решение, столь значительно, что вынуждает отказываться от такого анализа. Более рациональное решение сложных динамических задач позволяют осуществить методы, разработанные в последние тридцать лет. К ним относятся методы решений Фурье, Бромвича, Лурье, Данилевского, Лапласа, Карсона, Хевисайда, Дюамеля.

Для большого класса динамических линейных задач с достаточной простотой, но значительной полнотой применим метод комплексных сопротивлений, который в этой работе систематизированно рассматривается. Введение абстрагированных механических цепей позволяет в алгебраической форме решать сложнейшие

дифференциальные уравнения и, что важно, получать конкретные решения для всех сил и скоростей в динамической системе, ее звеньях и отдельных элементах.

Широкий круг вопросов из разных областей технологии, механики и математики, рассматриваемых в этой книге, затруднил выбор буквенных обозначений физических величин, поэтому автор был вынужден применять буквенные обозначения, не всегда принятые в технической литературе.

В этом направлении, которое исследует автор, были опубликованы отдельные статьи в СССР и за рубежом. Это работы, А. Белова, Л. Варшавского, Г. Гамбурцева, В. Федоровича, А. Харкевича и несколько позже работы Г. Хехта (Германия), Г. Ольсона, К. Моллоя, Р. Торна (США). Однако в этих работах рассматриваются несложные системы и не исследуются задачи, связанные с действием нескольких сил, систем, приводящих к непланарным цепям и использованию четырехполюсников.

Автор будет считать свою цель достигнутой, если материал, изложенный в книге, поможет исследователям и конструкторам решать конкретные задачи, вызовет интерес развивать и дополнять изложенные методы, а, возможно, будет способствовать созданию еще более эффективных средств решения задач.

Все замечания и пожелания автор просит направлять по адресу: 191065, Ленинград, Д-65, ул. Дзержинского, 10, издательство «Машиностроение».

## ВВЕДЕНИЕ

Действие силы или крутящего момента на тело во время его поступательного или вращательного движения вызывает различные результаты из-за того, что это тело может вести себя по-разному — как масса (инерция), сопротивление или упругость — и показывать, таким образом, три различные формы явлений.

В физически осуществимой механической динамической системе, находящейся в поступательном или во вращательном движении, весьма сложно рассматривать массу, наделенную свойствами упругости и сопротивления, упругость, наделенную свойствами массы и сопротивления, и сопротивление, наделенное свойствами массы и упругости.

В теории и на практике принимается гипотеза, согласно которой механическая динамическая система упрощается и в ней рассматриваются идеализированные сосредоточенные элементы системы. Под сосредоточенным элементом понимают абстрагированный предел реальной системы при бесконечном уменьшении влияния прочих свойств системы. Ниже будут рассмотрены линейные динамические системы с сосредоточенными элементами, приведены сведения о гармонических колебаниях и частотах, подробно рассмотрены пассивные и активные элементы, комплексные сопротивления и подвижности элементов для поступательного и вращательного движений, а также сведения по электромеханическим аналогиям. В работе широко используются комплексные числа, поэтому при изучении свойств целой функции  $y = f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$  под  $x$  будем понимать не только действительные, но и комплексные числа вида  $a = a_1 + ja_2$  (где величину  $j$  называют мнимой единицей, а величину  $ja_2$  — мнимым числом), используя все три формы комплексного числа: алгебраическую, тригонометрическую и показательную:  $a = a_1 + ja_2 = a(\cos \alpha + j \sin \alpha) = ae^{j\alpha}$ .

При выполнении действий с вектором будем помнить, что умножение на  $+j$  или деление на  $-j$  дает поворот вектора  $\mathbf{a}$  против часовой стрелки на угол  $+\pi/2$ . Аналогично умножение на  $-j$  или деление на  $+j$  дает поворот вектора  $\mathbf{a}$  по часовой стрелке на

угол  $-\pi/2$ ; умножение и деление вектора на  $j^2$  соответствует повороту на угол  $\pm\pi$ . Если обозначить  $\alpha$  угол между векторами  $a$  и  $a_1$ , причем  $a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$ , то модуль комплексного числа  $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  и аргумент комплексного числа  $\alpha = \operatorname{arctg} a_2/a_1$ .

Более часто будем пользоваться элементами операционного исчисления, основанного на изображении функции времени  $t$  новой переменной  $p$ , переход к которой от функции времени  $t$  выполняется при помощи преобразований Лапласа. Условимся называть изображением данной функции  $f(t)$  вещественного переменного  $t$  функцию  $F(p)$  комплексного переменного  $p$ , определяемую равенством  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  и обозначаемую  $F(p)$

$\doteq f(t)$ , причем  $p = \beta + j\omega$ , а вещественная часть  $\beta$  положительна и достаточно велика, чтобы интеграл был конечным [1].

Покажем простейшие формулы перехода от функции времени  $t$  к функции времени  $p$ . Изображение постоянной величины  $a$ :

$$F(a) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} a dt = \frac{ae^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = -\frac{a}{p} (0 - 1) = \frac{a}{p}.$$

Изображение первой и второй производной функции  $f(t)$ :

$$f'(t) \doteq pF(p); \quad f''(t) \doteq p^2F(p).$$

Изображение интеграла  $\int_0^t f(t) dt$ :

$$F(p) \doteq F(p)/p = \int_0^t f(t) dt.$$

Изображение экспоненциальной функции  $f(t) = e^{-j\omega t}$ :

$$F(p) \doteq 1/(p + j\omega).$$

Изображение основных тригонометрических функций:

$$\sin \omega t \doteq \omega/(p^2 + \omega^2); \quad \cos \omega t \doteq p/(p^2 + \omega^2).$$

**Гармонические колебания.** Гармоническая функция  $y = A \sin(\omega t + \zeta)$  образуется как проекция точки  $a$  при вращении кривошипа радиусом  $Oa$  на плоскость  $xOy$ . Здесь  $A$  — амплитуда синусоиды, равная высоте полуволны;  $\omega$  — круговая частота или угловая скорость;  $\zeta$  — угол сдвига фазы; время  $t$  отсчитывается от момента, когда  $\tau = \zeta$ , т. е.  $\tau = \omega t + \zeta$ . Время, в течение которого точка  $A$  описывает полную окружность, называется периодом:  $\tau = 2\pi/\omega$ . Обратная величина  $1/\tau = f = \omega/(2\pi)$  — циклическая частота (рис. В.1, а, б),  $\omega = 2\pi f$ . Ограничимся кратким анализом функции  $y = A \sin(\omega t + \zeta)$ .

**Изменение  $\omega$ .** Чем величина  $\omega$  больше, тем больше будут высокочастотные колебания, а период колебаний будет меньше; при низкочастотных колебаниях период колебаний будет больше. Деформации синусоиды происходят вдоль оси  $Ox$  (рис. В.1, в).

**Изменение  $A$ .** Если  $A > 0$ , то функция соответствует изображению  $\sin(\omega t + \zeta)$ ; предельное значение этой функции будет  $\pm A \sin(\omega t + \zeta)$ . Если

$A < 0$ , то синусоида будет иметь зеркальное изображение (рис. В.1, а). Деформации синусоиды происходят вдоль оси  $Oy$ .

**Изменение  $\zeta$ .** Если  $\zeta = 0$ , то синусоида проходит через начало координат. Если  $\zeta \neq 0$ , то при  $\zeta > 0$ , когда  $\omega t + \zeta$ , начало координат следует перенести влево на величину  $|\zeta|$ , а при  $\zeta < 0$ , когда  $\omega t - \zeta$ , — вправо на величину  $|\zeta|$ . Следовательно, изменение угла сдвига фазы производит смещение синусоиды вдоль оси  $Ox$  без изменения характера кривой (рис. В.1, б).

Дифференцирование функции  $y = A \sin(\omega t + \zeta)$  приводит к смещению синусоиды на величину  $+\pi/2$ ;  $\dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \zeta)$ .

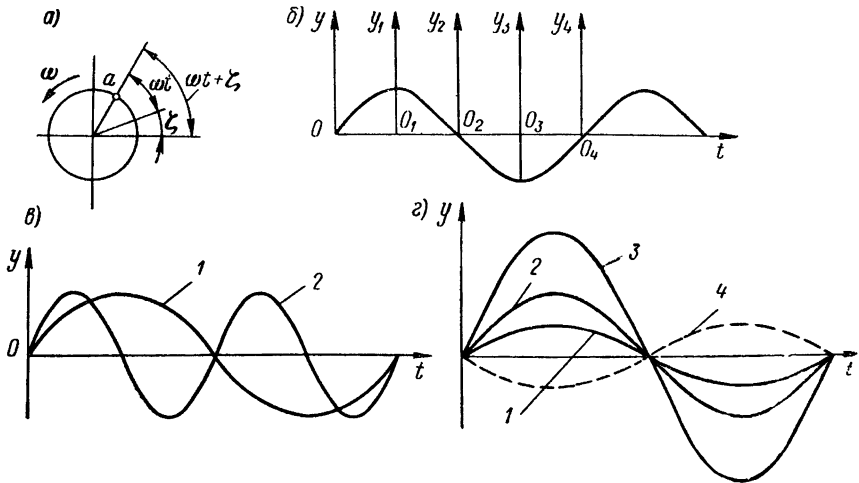


Рис. В.1. Графическое изображение гармонического колебания

Интегрирование этой же функции приводит к смещению синусоиды на величину  $-\pi/2$ ;  $\int y dt = -A/\omega \cos(\omega t + \zeta)$ .

В этих операциях следует изменить амплитуду: при дифференцировании — на величину  $\omega A$  и  $(-\omega^2 A)$ , а при интегрировании на величину  $A/\omega$  и  $-A/\omega^2$ . В частном случае, если  $\omega = 1$ , деформация синусоиды вдоль оси  $Oy$  не происходит.

При сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты образуется новое колебание такой же частоты:  $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \zeta_1)$ ;  $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \zeta_2)$ ;  $y_{12} = y_1 + y_2 = A_{12} \sin(\omega t + \zeta_{12})$ .

При этом  $A_{12}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\zeta_1 - \zeta_2)$ ;  $\zeta_{12} = (A_1 \sin \zeta_1 + A_2 \sin \zeta_2) / (A_1 \cos \zeta_1 + A_2 \cos \zeta_2)$ .

При сложении двух гармонических колебаний с разными частотами получается обычно сложная кривая, отличная от синусоиды; при этом, если частоты очень близки, образуется кривая с периодическим биением (рис. В.2, а); если частоты отличаются очень заметно, то высокочастотная слагаемая выступает на суммарной кривой как пульсация, наложенная на низкочастотную слагаемую (рис. В.2, б); если частоты отличаются не очень заметно, то суммарная кривая приобретает характер, близкий к трапеции (рис. В.2, в).

**Частоты.** Вокруг нас находятся колебания различного происхождения: физические явления природы (движение облаков, волны моря и озера, землетрясения, солнечные лучи и мерцание звезд), человеческая речь, уличные и производственные шумы (вибрации при полете самолета, движении поезда и автомобиля), звуки музыки (гармоничные и дисгармоничные, с красивым тембром и глухие, как звук барабана с порванной кожей).

На рис. В.3 показан музыкальный ряд колебаний; он приведен для восприятия количественных показателей частот и очень полезен для практических сравнений. Область восприятия человеком музыкальных звуковых колебаний находится в пределах диапазона пианино от звука си субконтроктавы с  $\omega = 27,5$  1/с, до звука ля четвертой октавы с  $\omega = 3520$  1/с. Каждая октава отличается изменением частоты в два раза, при этом, как наглядно показано на

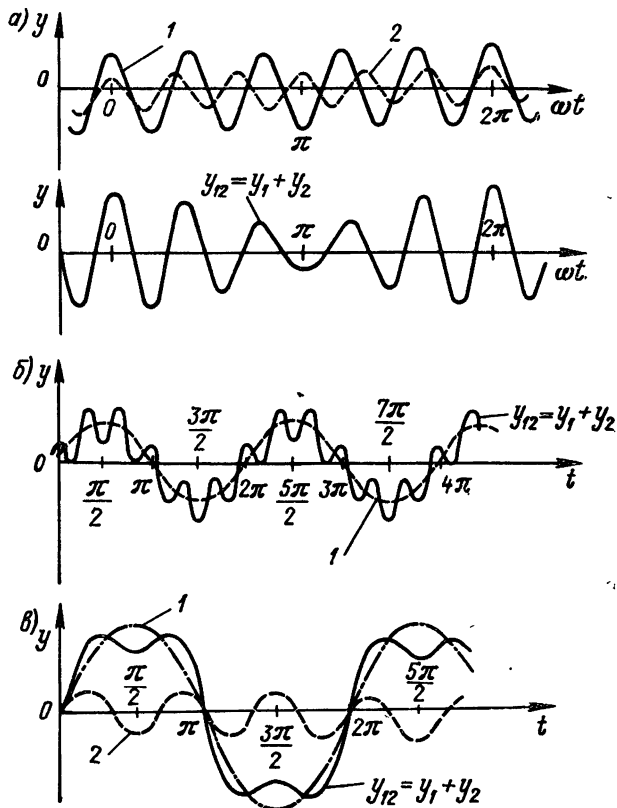
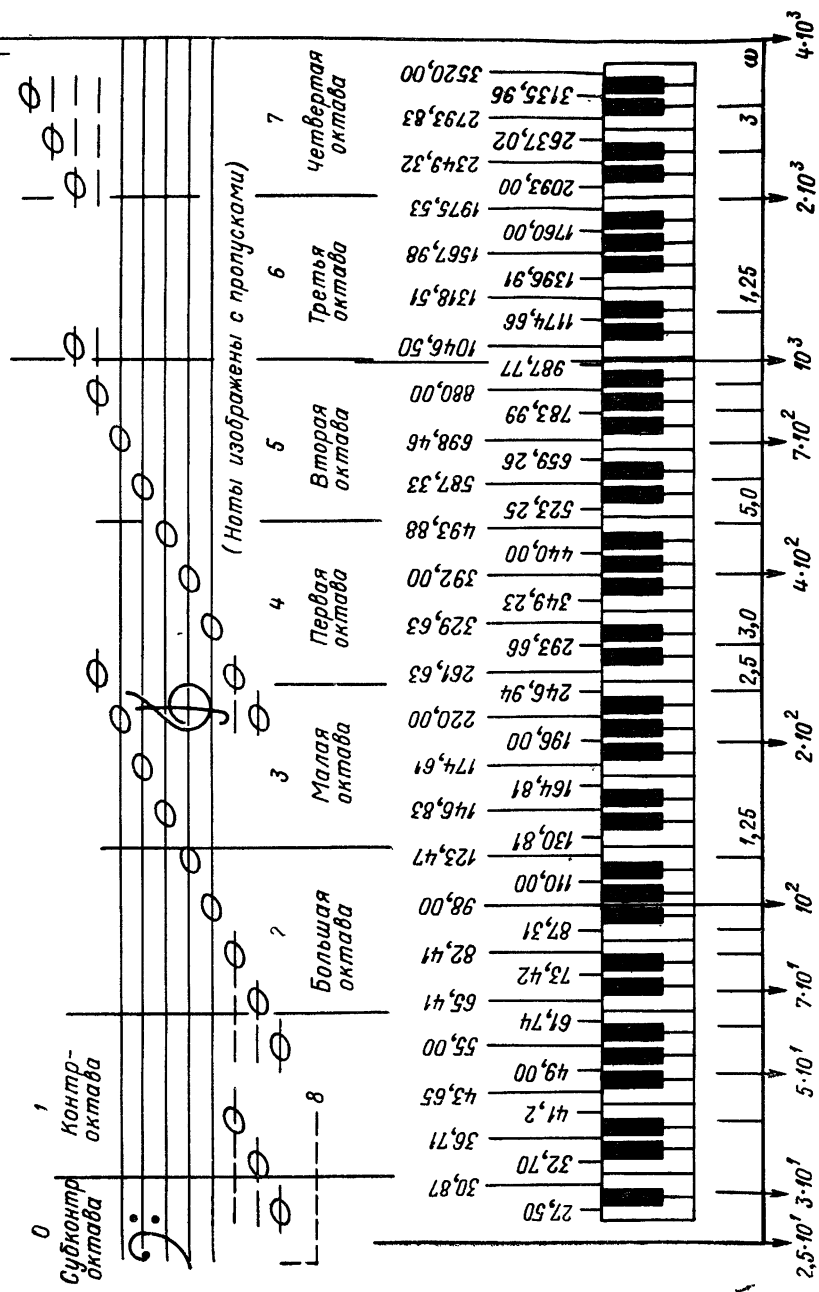


Рис. В.2. Сложение двух гармонических кривых с разными круговыми частотами

сетке, нанесенной на клавиатуру, все частоты располагаются по логарифмической шкале. Подобное знакомство позволяет представлять себе характер звуков в процессе испытания машин, приборов с порядком возникающих частот. Окраска звука или тембра характеризуется сложностью гармоник, образующих эти колебания (рис. В.4). Эта периодическая функция получается в результате сложения нескольких гармоник с разной (в данном случае кратной) частотой и одинаковой амплитудой; при этом кривую с наименьшей частотой называют основной гармоникой, а все последующие — 1, 2-й ... гармониками.

В практике диапазон частот значительно больше музыкального и находится в пределах от дробных до нескольких тысяч в секунду; при этом принято считать низкими частоты до 300 1/с, или 300 Гц; средними — до 750 Гц; высокими — свыше 750 Гц.

Рис. В.3. Частоты музыкального ряда. Октавы и логарифмические зависимости



**Пассивные элементы.** Пассивными будем считать элементы, не имеющие независимых источников силы (крутящего момента) или линейной (угловой) скорости, либо имеющие несколько источников силы или скорости, алгебраическая сумма которых равна нулю.

*Масса в поступательном движении.* Масса — пассивный элемент механической системы, препятствующий изменению скорости движения и накапливающий кинетическую энергию  $E$  движения. При поступательном движении кинетическая энергия массы уве-

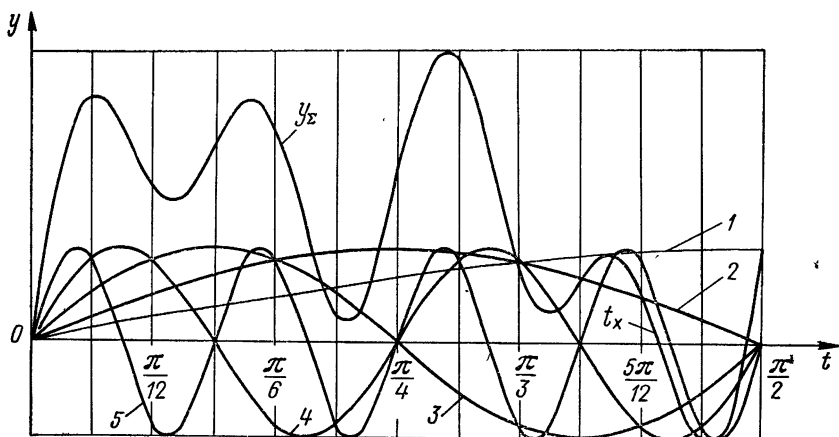


Рис. В.4. Сложение нескольких гармонических кривых

личивается при увеличении ее линейной скорости ( $v_2 > v_1$ ,  $E_2 > E_1$ ), т. е. при наличии линейного ускорения; кинетическая энергия уменьшается при уменьшении линейной скорости массы ( $v_2 < v_1$ ,  $E_2 < E_1$ ) и остается постоянной при постоянной скорости массы ( $v_2 = v_1 = v = \text{const}$ ,  $E_2 = E_1 = E = \text{const}$ ). Кроме поступательного движения массы, ее можно вращать вокруг оси; на вращение тела влияет не только масса тела, но и ее распределение вокруг оси вращения. Математическая зависимость между массой и так называемым радиусом инерции характеризует момент инерции. Таким образом, момент инерции представляет постоянную во времени величину, характеризующую пассивный элемент, обладающий инерцией, в котором накапливается кинетическая энергия вращательного движения. Так же как для поступательного, во вращательном движении кинетическая энергия инерционного элемента увеличивается или уменьшается при соответствующем увеличении или уменьшении угловой скорости ( $\delta_2 > \delta_1$ ,  $E_2 > E_1$ ;  $\delta_2 < \delta_1$ ,  $E_2 < E_1$ ;  $\delta_2 = \delta_1 = \delta = \text{const}$ ,  $E_2 = E_1 = E = \text{const}$ ).

Известно, что при изменении линейной скорости  $v_m$ , действующей на массу, возникает сила

$$Q_m = m \frac{dv_m}{dt}. \quad (\text{В.1})$$



Из (В.1) можно написать, что изменение скорости при действии силы на массу происходит по уравнению

$$v_m = \frac{1}{m} \int Q_m dt. \quad (\text{В.2})$$

Пусть изменение величины скорости, действующей на массу, происходит по гармоническому закону

$$v_m = V_{m\pi} \sin(\omega t + \zeta), \quad (\text{В.3})$$

где  $V_{m\pi}$  — наибольшее (предельное) значение скорости, или амплитуда скорости.

Подставляя значение  $v_m$  из (В.2) в (В.3), получаем

$$1/m \int Q_m dt = V_{m\pi} \sin(\omega t + \zeta).$$

Преобразовывая это выражение и дифференцируя его, получаем

$$\int Q_m dt = mV_{m\pi} \sin(\omega t + \zeta);$$

$$\frac{d}{dt} \int Q_m dt = \frac{d}{dt} [mV_{m\pi} \sin(\omega t + \zeta)]; \quad Q_m = \omega mV_{m\pi} \cos(\omega t + \zeta).$$

Помня, что  $\cos(\omega t + \zeta) = \sin(\omega t + \zeta + \pi/2)$ , получаем

$$Q_m = Q_{m\pi} \sin\left(\omega t + \zeta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{В.4})$$

Так как  $Q_{m\pi} = j\omega mV_{m\pi}$  или  $Q_m = j\omega m\dot{y}$  и зная, что  $j$  соответствует повороту вектора против часовой стрелки на угол  $+\pi/2$ , замечаем, что выражение (В.4) отличается от (В.3) на угол  $+\pi/2$ .

Последнее выражение, графически изображаемое поворотом вектора  $j$  на угол  $+\pi/2$ , показывает, что скорость отстает от силы на угол  $\pi/2$  (рис. В.7, а, б). В тот момент, когда скорость  $v_m$  проходит через нуль, сила  $Q_m$  достигает наибольшего положительного или отрицательного значения.

Рассмотрим противоположную задачу, когда при изменении силы  $Q_m$ , действующей на массу, возникает скорость  $v_m$  (В.2) и изменение силы при действии скорости на массу происходит по уравнению (В.1).

Пусть изменение силы, действующей на массу, происходит по закону (В.4). Подставим значение  $Q_m$  из (В.1) в (В.4)

$$m dv_m/(dt) = Q_{m\pi} \sin(\omega t + \zeta + \pi/2).$$

Преобразовывая это выражение и интегрируя его, получаем

$$\frac{dv_m}{dt} = \frac{Q_{m\pi}}{m} \sin\left(\omega t + \zeta + \frac{\pi}{2}\right); \quad \int dv_m = \frac{Q_{m\pi}}{m} \int \sin\left(\omega t + \zeta + \frac{\pi}{2}\right) dt;$$

$$v_m = -\frac{Q_{m\pi}}{m\omega} \cos\left(\omega t + \zeta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Зная, что  $[-\cos(\omega t + \zeta + \pi/2)] = \sin(\omega t + \zeta)$  и  $Q_{мп} = jV_{мп}\omega m$ , можем написать  $Q_{мп}/(\omega m) = jV_{мп}$  и окончательно как в (В.3). Сравнивая (В.4) и (В.3), обнаруживаем наличие угла  $+\pi/2$ , что компенсирует отсутствие величины  $j$  в выводимой зависимости и это также подтверждает опережение силы перед скоростью.

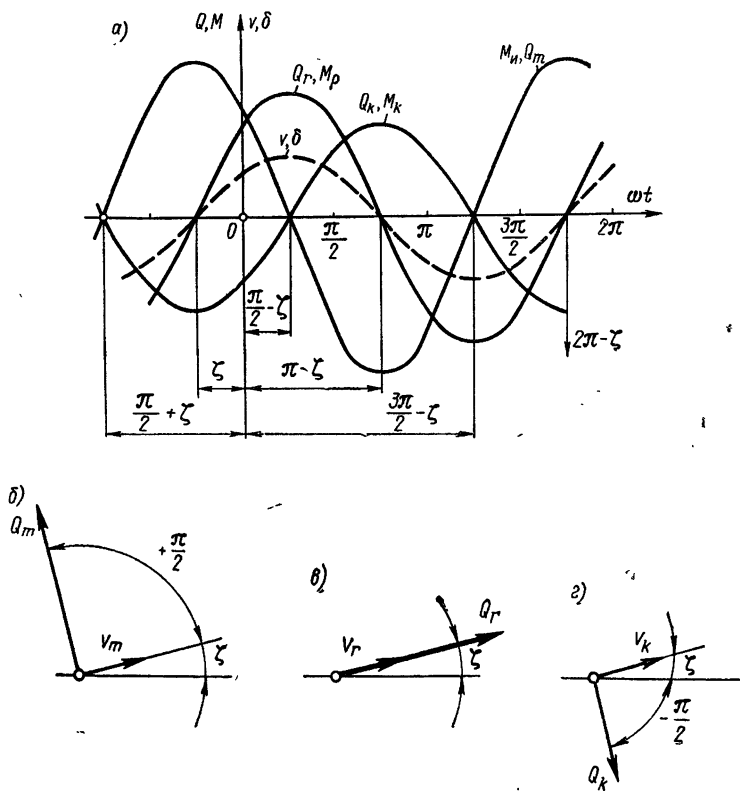


Рис. В.5. Действие сил и скоростей в системе с одной степенью свободы

Проводя подобные рассуждения для массы во вращательном движении, обладающей моментом инерции  $I$ , напишем, что крутящий момент  $M_{И} = I d\delta_{И}/(dt)$  и угловая скорость  $\delta_{И} = 1/I \int M_{И} dt$ . Если изменение угловой скорости, действующей на вращающуюся массу, происходит по закону  $\delta_{И} = \Delta_{Ип} \sin(\omega t + \zeta)$ , где  $\Delta_{Ип}$  — наибольшее (предельное) значение угловой скорости или амплитуда угловой скорости, то изменения крутящего момента будут происходить по закону  $M_{И} = M_{Ип} \sin(\omega t + \zeta + \pi/2)$ , где  $M_{Ип} = \omega I \Delta_{Ип}$ ; при этом крутящий момент,

так же как и сила, опережает угловую скорость (скорость в поступательном движении) на угол  $+\pi/2$  или на величину  $+j$ .

*Сопrotивление в поступательном движении.* Наименее конкретным понятием в механике, обусловленным значительным количеством поправочных коэффициентов, является понятие сопроtивления, которое возникает от взаимодействия двух перемещающихся сред, в результате чего получается необратимый процесс преобразования кинетической энергии в тепло. Этот процесс является полезным, когда рассматриваются тормозящие устройства (парашюты, гидравлические и механические тормоза и муфты, разного рода демпферы), и является вредным во многих происходящих на земле процессах: при постоянной внешней нагрузке скорость в воздухе будет больше, чем в воде, а в воде больше, чем в масле.

Итак, сопроtивление — пассивный элемент механической системы, пропорциональный первой степени скорости, что соответствует вязкому трению<sup>1</sup>.

В механических системах между двумя взаимно перемещаемыми поверхностями, если сопроtивление  $r$  мало и стремится к нулю ( $r \rightarrow 0$ ), то это значит, что даже при небольшой внешней силе скорость, определяемая только процессом торможения, будет стремиться к бесконечности ( $v \rightarrow \infty$ ); и наоборот, если сопроtивление будет увеличиваться, то оно, достигая бесконечно большой величины ( $r \rightarrow \infty$ ), делает перемещение невозможным ( $v \rightarrow 0$ ). Напомним, что в ряде отделов физики взгляд на сопроtивление иной: в электричестве, если сопроtивление равно нулю, это соответствует замыканию цепи, где отсутствует сопроtивление, а если сопроtивление равно бесконечности, то это соответствует прерыванию цепи.

Известно, что при изменении линейной скорости  $v_r$ , действующей на сопроtивление, возникает сила

$$Q_r = r v_r. \quad (\text{B.5})$$

Из (B.5) можно написать, что изменение скорости при действии силы на сопроtивление происходит по уравнению

$$v_r = \frac{Q_r}{r}. \quad (\text{B.6})$$

Пусть изменение скорости, действующей на сопроtивление, происходит по гармоническому закону

$$v_r = V_{rn} \sin(\omega t + \zeta), \quad (\text{B.7})$$

где  $V_{rn}$  — наибольшее (предельное) значение скорости, или амплитуда скорости.

---

<sup>1</sup> Не рассматриваются вопросы сухого (кулонова) трения и трения, пропорционального иной степени скорости.

Подставляя значение  $v_r$  из (B.6) в (B.7), получаем  $Q_r/r = V_{rп} \sin(\omega t + \zeta)$  или  $Q_r = rV_{rп} \sin(\omega t + \zeta)$ .

Принимая из (B.5), что  $Q_{rп} = rV_{rп}$ , находим

$$Q_r = Q_{rп} \sin(\omega t + \zeta). \quad (\text{B.8})$$

Сравнивая уравнения (B.8) и (B.7), устанавливаем, что сила и скорость, действующие через сопротивление, совпадают по фазе, что видно из рис. B.7, а, в.

Проводя подобные рассуждения для сопротивления во вращательном движении, напишем, что крутящий момент  $M_\rho = \rho\delta_\rho$  и угловая скорость  $\delta_\rho = M_\rho/\rho$ .

Если изменение угловой скорости происходит по закону  $\delta_\rho = \Delta_{\rhoп} \sin(\omega t + \zeta)$ , где  $\Delta_{\rhoп}$  — наибольшее значение угловой скорости, изменение крутящего момента происходит по закону  $M_\rho = M_{\rhoп} \sin(\omega t + \zeta)$ , где  $M_{\rhoп} = \rho\Delta_{\rhoп}$ , при этом крутящий момент и угловая скорость, действующие через сопротивление вращению, совпадают по фазе.

*Упругость в поступательном движении.* Упругость — пассивный элемент механической системы с неизменяемой во времени жесткостью, препятствующий изменению нагрузки, в котором накапливается потенциальная энергия ( $\Pi$ ). При поступательном движении потенциальная энергия этой упругости увеличивается при увеличении силы ( $Q_2 > Q_1$ ,  $\Pi_2 > \Pi_1$ ), потенциальная энергия этой упругости уменьшается при уменьшении силы ( $Q_2 < Q_1$ ,  $\Pi_2 < \Pi_1$ ) и остается постоянной при постоянной силе ( $Q_2 = Q_1 = Q = \text{const}$ ,  $\Pi_2 = \Pi_1 = \Pi = \text{const}$ ).

Известно, что при изменении линейной скорости  $v_k$ , действующей на упругость, возникает сила

$$Q_k = k \int v_k dt. \quad (\text{B.9})$$

Это выражение становится понятным из следующих рассуждений. Зависимость между силой и перемещением пружины будет  $Q_k = ky_k$ . Если мы продифференцируем это выражение, то

$$\frac{dQ_k}{dt} = k \frac{dy_k}{dt} = kv_k, \quad (\text{B.10})$$

отсюда  $Q_k = k \int v_k dt$ .

Из (B.10) можно написать, что скорость при действии силы на упругость изменяется следующим образом:

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{dQ_k}{dt}. \quad (\text{B.11})$$

Пусть изменение скорости, действующей на упругость, происходит по гармоническому закону

$$v_k = V_{кп} \sin(\omega t + \zeta), \quad (\text{B.12})$$

где  $V_{кп}$  — наибольшее (предельное) значение скорости, или амплитуда скорости.

Подставляя значение (В.11) в (В.12), получаем  $1/k \, dQ_k/(dt) = V_{kп} \sin(\omega t + \zeta)$ . Преобразовывая это выражение и интегрируя его, получаем:

$$\frac{dQ_k}{dt} = kV_{kп} \sin(\omega t + \zeta); \quad Q_k = kV_{kп} \int \sin(\omega t + \zeta) dt;$$

$$Q_k = -\frac{kV_{kп}}{\omega} \cos(\omega t + \zeta);$$

$$Q_k = Q_{kп} \sin\left(\omega t + \zeta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{В.13})$$

Так как  $k/(j\omega) V_{kп} = Q_{kп}$ , то можно заметить, что выражения (В.12) и (В.13) отличаются значением угла  $-\pi/2$ . Иными словами, сила отстает от скорости на угол  $\pi/2$ , что соответствует величине  $-j$ .

Проводя подобные рассуждения для упругости во вращательном движении напишем, что изменение угловой скорости будет  $\delta_{\kappa} = d\varphi_{\kappa}/(dt)$ . Как показано ниже,  $M_{\kappa} = \kappa\varphi_{\kappa}$ , или  $dM_{\kappa}/(dt) = \kappa \, d\varphi_{\kappa}/(dt) = \kappa\delta_{\kappa}$ , и изменение крутящего момента  $M_{\kappa} = \kappa \int \delta_{\kappa} dt$ . Если оно происходит по закону  $M_{\kappa} = M_{\kappaп} \sin(\omega t + \zeta)$ , где  $M_{\kappaп}$  — наибольшее значение крутящего момента, или амплитуда, то  $\delta_{\kappa} = \Delta_{\kappaп} \sin(\omega t + \zeta + \pi/2)$ . Так же как для поступательного движения устанавливаем, что крутящий момент отстает на угол  $\pi/2$  от угловой скорости при действии на крутильную упругость, что видно из рис. В.7, а, г.

**Активные элементы.** Источник силы и источник скорости, представляющие собой два типа источников энергии и зависящие от времени, являются активными элементами. Несмотря на то что подобная классификация условна и носит скорее математический характер, она весьма удобна.

Поведение силы и скорости или реакция системы определяются параметрами системы, так же как и их взаимоотношения. И сила и скорость могут быть либо причиной, либо следствием в системе в зависимости от того, что является причиной движения. Если причиной движения является сила, то в системе, как следствие, произойдет изменение скорости. Если причиной движения является скорость (точнее гармоническое перемещение или кинематическое воздействие), то, как следствие, сила будет зависимой функцией: в системе произойдет изменение силы. Все это подчеркивает обратимость второго закона Ньютона  $Q = m\ddot{y}$ ;  $\dot{y} = 1/m \int Q \, dt$ .

*Источник силы и ее производные.* Система (см. рис. В.5, б) под действием силы  $Q(t)$  может быть описана одним из трех уравнений в зависимости от функции  $y$ ,  $v$ ,  $a$ :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = Q(t); \quad (\text{В.14})$$

$$m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = Q(t); \quad (B.15)$$

$$ma + r \int a dt + k \iint a dt^2 = Q(t).$$

Рассуждая подобным образом, можно написать интегрально-дифференциальные уравнения, например для  $dM(t)/(dt)$  и  $d\varepsilon/(dt) + \rho\varepsilon + \kappa \int \varepsilon dt = dM(t)/(dt)$  или  $M d^3\varphi/(dt^3) + \rho d^2\varphi/(dt^2) + \kappa d\varphi/(dt) = dM(t)/(dt)$  или для  $\int Q(t) dt mv + r \int v dt + k \iint v dt^2 = \int Q(t) dt$ .

В табл. В.1 и В.2 показаны изменения величин перемещений, скоростей и ускорений для пассивных элементов. В этих таблицах

Т а б л и ц а В.1

Параметры перемещения (углового поворота), скорости (угловой скорости) и ускорения (углового ускорения) для пассивных элементов в зависимости от действия силы (крутящего момента) или ее (его) производных

|             | $\frac{dQ(t)}{dt}; \frac{dM(t)}{dt}$         | $Q(t); M(t)$  | $\int Q(t)dt; \int M(t)dt$                                  |
|-------------|--|---|---|
| $m, И$      | $m \frac{da}{dt}; И \frac{d\varepsilon}{dt}$ | $ma; И\varepsilon$                                  | $m\int a dt; И\int \varepsilon dt$                          |
| $r, \rho$   | $ra; \rho\varepsilon$                        | $r\int a dt; \rho\int \varepsilon dt$               | $r\int\int a dt^2; \rho\int\int \varepsilon dt^2$           |
| $k, \kappa$ | $k\int a dt; \kappa\int \varepsilon dt$      | $k\int\int a dt^2; \kappa\int\int \varepsilon dt^2$ | $k\int\int\int a dt^3; \kappa\int\int\int \varepsilon dt^3$ |

Дифференциал по ускорению Ускорение (угловое (угловому ускорению) → ускорение)

|             |   |  |  |
|-------------|---|--|--|
| $m, И$      | <del><math>m \frac{d^2v}{dt^2}; И \frac{d^2\delta}{dt^2}</math></del> | <del><math>m \frac{dv}{dt}; И \frac{d\delta}{dt}</math></del>        | <del><math>mv; И\delta</math></del>                    |
| $r, \rho$   | <del><math>r \frac{dv}{dt}; \rho \frac{d\delta}{dt}</math></del>      | <del><math>rv; \rho\delta</math></del>                               | <del><math>r\int v dt; \rho\int \delta dt</math></del> |
| $k, \kappa$ | <del><math>k\int v dt; \kappa\int \delta dt</math></del>              | <del><math>k\int\int v dt^2; \kappa\int\int \delta dt^2</math></del> |  |

← Скорость (угловая скорость) ← Перемещение (угловой поворот) ← Интеграл от перемещения (углового поворота)

|             |   |  |  |
|-------------|---|--|--|
| $m, И$      | $m \frac{d^3y}{dt^3}; И \frac{d^3\varphi}{dt^3}$    | $m \frac{d^2y}{dt^2}; И \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ | $m \frac{dy}{dt}; И \frac{d\varphi}{dt}$ |
| $r, \rho$   | $r \frac{d^2y}{dt^2}; \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ | $r \frac{dy}{dt}; \rho \frac{d\varphi}{dt}$      | $ry; \rho\varphi$                        |
| $k, \kappa$ | $k \frac{dy}{dt}; \kappa \frac{d\varphi}{dt}$       | $ky; \kappa\varphi$                              | $k\int y dt; \kappa\int \varphi dt$      |

33074

Параметры силы (крутящего момента) и ее (его) производных  
для пассивных элементов в зависимости  
от действия скорости (угловой скорости)

Двойной интеграл от силы (крутящего момента)  
Интеграл от силы (крутящего момента)  
Сила (крутящий момент)

|             |  |  |  |
|-------------|--|--|--|
|             | $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$<br>$\epsilon = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ | $\int a dt = v = \frac{dy}{dt}$<br>$\int \epsilon dt = \delta = \frac{d\varphi}{dt}$ | $\iint a dt^2 = \int v dt = y$<br>$\iint \epsilon dt^2 = \int \delta dt = \varphi$ |
| $m, И$      | $\frac{1}{m} Q; \frac{1}{И} M$   | $\frac{1}{И} \int M dt$  | $\frac{1}{m} \iint Q dt^2$<br>$\frac{1}{И} \iint M dt^2$                           |
| $r, \rho$   | $\frac{1}{r} \frac{dQ}{dt}; \frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt}$  | $\frac{1}{r} Q; \frac{1}{\rho} M$  | $\frac{1}{r} \int Q dt; \frac{1}{\rho} \int M dt$                                  |
| $k, \kappa$ | $\frac{1}{k} \frac{d^2Q}{dt^2}; \frac{1}{\kappa} \frac{d^2M}{dt^2}$                                  | $\frac{1}{k} \frac{dQ}{dt}; \frac{1}{\kappa} \frac{dM}{dt}$                          | $\frac{1}{k} Q; \frac{1}{\kappa} M$  |

Дифференциал от силы (крутящего момента)  
Двойной дифференциал от силы (крутящего момента)

наклонные линии соединяют клетки с одинаковыми значениями параметров в зависимости от действия сил и скоростей. Номограмма (рис. В.6) устанавливает связь между параметрами пассивных и активных элементов динамической системы.

**Источник скорости и ее производные.** Система (см. рис. В.6, а) под действием скорости  $v(t)$  может быть описана уравнением  $1/m Q_m + 1/r dQ_r/(dt) + 1/k d^2Q_k/(dt^2) = dv(t)/dt = a(t)$ . Согласно номограмме для источника  $\int v(t) dt$  можно написать

$$1/m \iint Q_m dt^2 + 1/r \int Q_r dt + 1/k Q_k = y(t) = \int v(t) dt.$$

Это уравнение для вращательного движения имеет вид

$$1/И \iint M_И dt^2 + 1/\rho \int M_\rho dt + 1/\kappa M_\kappa = \varphi(t) = \int \delta(t) dt.$$

Особенностью для источника энергии — скорости является необходимость брать значения пассивных элементов в виде дроби ( $1/m$ ;  $1/r$ ;  $1/k$ ), показанные сверху номограммы.

**Комплексные сопротивления.** Рассмотрим полное комплексное сопротивление (ПКС) поступательной системы, имеющей внешним источником воздействия силу Пусть имеется динамическая

система с одной степенью свободы (рис. В.5, а), в которой поршень с массой  $m$  перемещается в цилиндрических направляющих и вызывает появление сопротивления  $r$ , пропорционального скорости. Перемещение массы производится периодической силой  $Q(t)$ , создаваемой вращающимся с круговой частотой  $\omega$  кривошипом

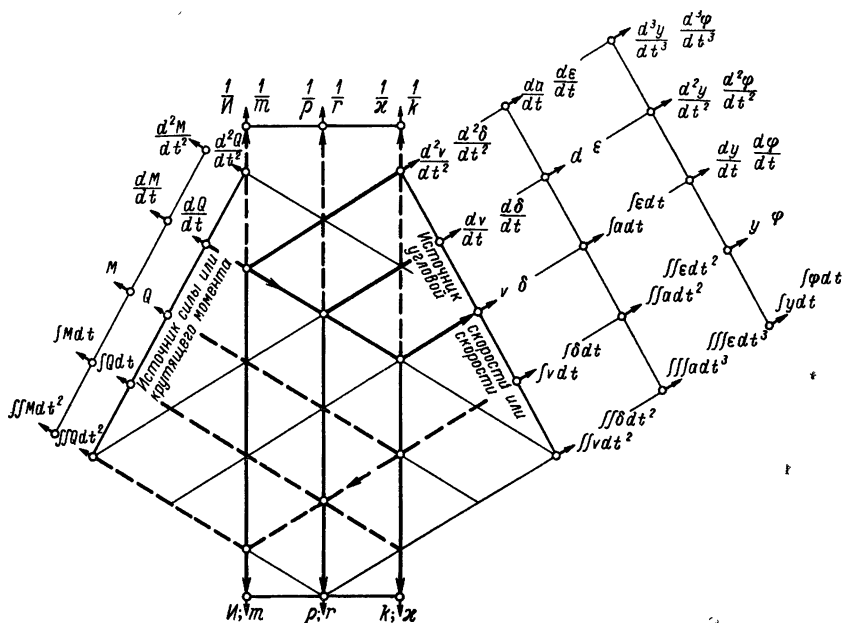


Рис. В.6. Номограмма для выбора параметров динамической системы

радиуса  $R$ , палец которого входит в прорез кулисы, соединенной с поршнем; силовое замыкание системы осуществляется пружиной с упругостью  $k$ .

На рис. В.5, б показано в виде динамической схемы описанное конструктивное решение. Действие периодической силы  $Q(t)$  в векторном изображении (рис. В.5, в) обозначим

$$Q = Q_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) = Q_0 e^{j\omega t}. \quad (\text{В.16})$$

Линейное перемещение в общем виде

$$y = y_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) = y_0 e^{j\omega t}. \quad (\text{В.17})$$

Линейная скорость определяется из уравнения (В.17)  $\dot{y} = j\omega (y_0 e^{j\omega t}) = j\omega y$  или

$$y = \frac{\dot{y}}{j\omega}. \quad (\text{В.18})$$



Линейное ускорение определяется из уравнения (В.18):

$$\ddot{y} = j\omega (j\omega y_0 e^{j\omega t}) = j\omega \dot{y} = (j\omega)^2 y = -\omega^2 y;$$

$$\ddot{y} = j\omega \dot{y}. \quad (\text{В.19})$$

Согласно принципу Даламбера алгебраическая сумма сил, действующих на тело, равна нулю, т. е.  $Q - Q_m - Q_r - Q_k = 0$ .

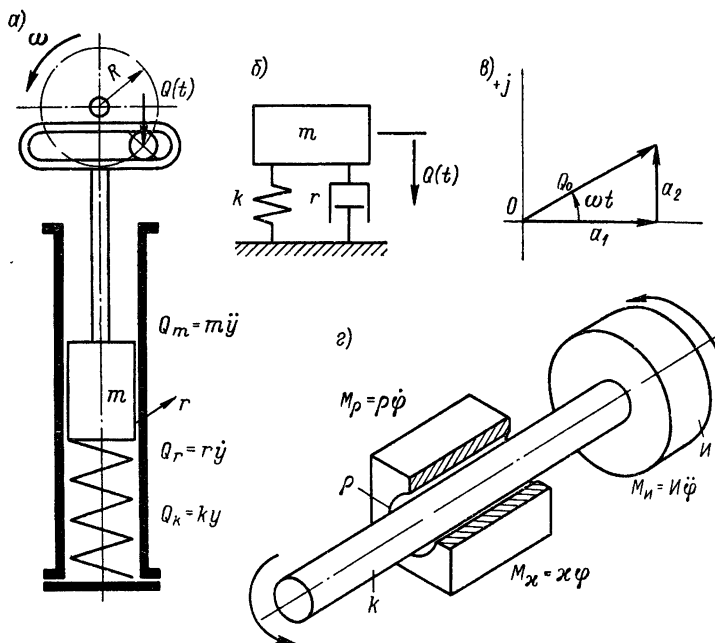


Рис. В.7. Динамическая система с одной степенью свободы

При этом, используя (В.18) и (В.19), получим

$$Q_m = m\ddot{y} = j\omega m\dot{y}; \quad (\text{В.20})$$

$$Q_r = r\dot{y}; \quad (\text{В.21})$$

$$Q_k = ky = \frac{k}{j\omega} \dot{y}; \quad (\text{В.22})$$

$$Q = \left( j\omega m + r + \frac{k}{j\omega} \right) \dot{y}. \quad (\text{В.23})$$

Отношение  $Q/\dot{y}$  называют импедансом, или ПКС поступательной системы и обозначают:

$$S = \frac{Q}{\dot{y}} = j\omega m + r + \frac{k}{j\omega}. \quad (\text{В.24})$$

Уравнение (В.24) перепишем в виде:

$$S = j\omega m - j\frac{k}{\omega} + r = j\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right) + r = j\sigma + r, \quad (\text{В.25})$$

здесь  $\sigma = (\omega m - k/\omega)$  — активная составляющая комплексного сопротивления;  $r$  — реактивная составляющая комплексного сопротивления;  $\omega m$  — сопротивление массы;  $k/\omega$  — сопротивление упругости. Если  $\omega m > k/\omega$ , то  $\sigma > 0$ ; если  $\omega m < k/\omega$ , то  $\sigma < 0$ , если  $\omega m = k/\omega$ , то  $\sigma = 0$ .

Периодическую силу в векторном изображении обозначим  $Q$ , а линейное перемещение в векторном изображении  $y$ .

Для вращательной системы (рис. В.5, з) получим

$$\begin{aligned} M_H &= I\ddot{\varphi} = j\omega I\dot{\varphi}; & M_p &= \rho\dot{\varphi}; \\ M_x &= \kappa\varphi = \frac{\kappa}{j\omega}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{В.26})$$

Отношение  $M/\dot{\varphi}$  называют импедансом, или ПКС вращательной системы и обозначают  $S$ . В таком случае

$$S = \frac{M}{\dot{\varphi}} = j\omega I + \rho + \frac{\kappa}{j\omega}. \quad (\text{В.27})$$

*Частные комплексные сопротивления (ЧКС) поступательной или вращательной системы.* Для каждого элемента существует комплексное сопротивление, которое будем называть частным сопротивлением.

Принимая ЧКС, как частное от деления силы (крутящего момента) на скорость (угловую скорость), можем написать:

для поступательной системы

$$S_m = \frac{Q_m}{\dot{y}} = j\omega m; \quad S_r = \frac{Q_r}{\dot{y}} = r; \quad S_k = \frac{Q_k}{\dot{y}} = \frac{k}{j\omega}, \quad (\text{В.28})$$

для вращательной системы:

$$S_H = \frac{M_H}{\dot{\varphi}} = j\omega I; \quad S_p = \frac{M_p}{\dot{\varphi}} = \rho; \quad S_x = \frac{M_x}{\dot{\varphi}} = \frac{\kappa}{j\omega}. \quad (\text{В.29})$$

*Полная комплексная подвижность (ПКП) поступательной системы, имеющей внешним источником воздействия перемещение или его производную — скорость.* Пусть имеется динамическая система (рис. В.6, а), находящаяся под воздействием кинематического возбуждения. Примерами такого возбуждения, передаваемого на конструкцию, являются подрессоривание подвижного экипажа (локомотива, автомобиля, изолированного фундамента прецизионного станка, вибраторов и т. п.) (рис. В.6, б, в, з). Ранее были получены (В.17)—(В.19) значения для линейных

перемещений  $y$ , скорости  $\dot{y}$  и ускорения  $\ddot{y}$  в зависимости от действующих сил.

Из принципа Даламбера<sup>1</sup> следует, что алгебраическая сумма скоростей, действующих на тело, также равна нулю, т. е.

$$\dot{y} - \dot{y}_m - \dot{y}_r - \dot{y}_k = 0. \quad (\text{В.30})$$

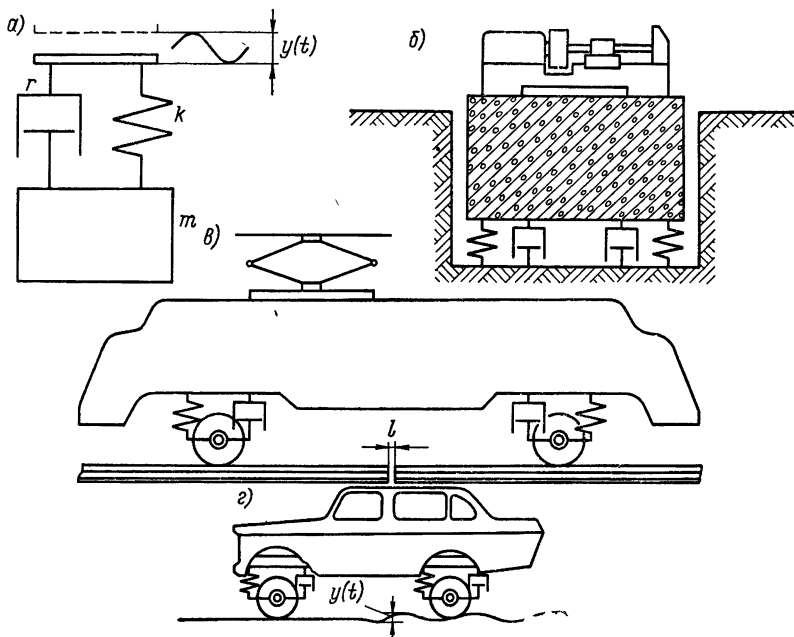


Рис. В.8. Внешнее воздействие в виде перемещения или скорости (кинематическое возбуждение)

При этом, используя (В.20)—(В.22), получим:

$$\ddot{y}_m = \frac{Q_m}{m} \quad \text{или} \quad \dot{y}_m = \frac{1}{m} \int Q_m dt = \frac{Q_m}{pm}; \quad (\text{В.31})$$

$$\dot{y}_r = \frac{Q_r}{r}; \quad (\text{В.32})$$

$$y_k = \frac{Q_k}{k} \quad \text{или} \quad \dot{y}_k = \frac{1}{k} \frac{dQ_k}{dt} = \frac{pQ_k}{k}. \quad (\text{В.33})$$

Следовательно,  $\dot{y} - Q_m/(pm) - Q_r/r - (pQ_k)/k = 0$ .

<sup>1</sup> Выражение Даламбера для скоростей можно получить зная, что выражение  $Q = m\dot{y} = j\omega m y$  соответствует выражению для скоростей  $y = Q/(j\omega m) = 1/m \int Q dt$ . В этих выражениях заложен глубокий смысл: если для силы соединение элементов должно быть параллельным, то для скорости — последовательным, что весьма важно для построения механических цепей.

Далее будет показано, что силы, действующие в элементах, равны между собой и в то же время равны внешней силе, т. е.  $Q = Q_m = Q_r = Q_k$ ; поэтому  $\dot{y} = Q [1/(pm) + 1/r + p/k]$ .

ПКС

$$S = \frac{Q}{\dot{y}} = \frac{1}{\frac{1}{pm} + \frac{1}{r} + \frac{p}{k}} = \frac{1}{\frac{kr + pkm + pmr}{pkmr}};$$

$$S = \frac{pkmr}{pm(k+r) + kr}. \quad (\text{В.34})$$

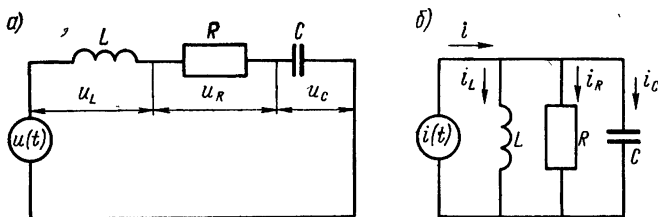


Рис. В.9. Электрические цепи

ПКП

$$Л = \frac{\dot{y}}{Q} = \frac{1}{S} = \frac{pm(k+r) + kr}{pkmr} = \frac{k+r}{kr} + \frac{1}{pm} = \frac{k+r}{kr} + \frac{1}{j\omega m};$$

$$Л = \frac{k+r}{kr} - j \frac{1}{\omega m}. \quad (\text{В.35})$$

Частные комплексные подвижности (ЧКП) элементов

$$Л_m = \frac{1}{pm} = \frac{1}{j\omega m} = -j \frac{1}{\omega m}; \quad Л_r = \frac{1}{r}; \quad Л_k = \frac{p}{k} = j \frac{\omega}{k}. \quad (\text{В.36})$$

Комплексное сопротивление  $S$  выражают в килограммах силы в секунду на метр ( $\text{кгс} \cdot \text{с}/\text{м}$ ), а комплексную подвижность  $Л$  в метрах на килограмм силы в секунду ( $\text{м}/\text{кгс} \cdot \text{с}$ ). В соответствии с выражением  $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_H - \dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_k = 0$  для вращательной системы можно вывести полные и частичные комплексные подвижности  $Л, Л_H, Л_p, Л_k$ .

**Принципы электромеханических аналогий.** *Первая электромеханическая аналогия (напряжение — сила).* При прохождении тока  $i$  через электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных пассивных элементов — индуктивность  $L$ , сопротивление  $R$  и емкость  $C$  (рис. В.9, а), — на зажимах цепи создается напряжение, равное (по второму закону Кирхгофа) сумме падений напряжений в отдельных элементах  $u_L + u_C + u_R = u(t)$  или,

заменяя  $u_R = Ri$ ;  $u_L = L di/(dt)$ ;  $i_C = C du_C/(dt)$  или  $u_C = 1/C \int i_C dt$ , получим

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} i dt = u(t). \quad (\text{В.37})$$

Для установившегося режима можно написать, что изменение тока происходит по закону  $i = I_n \sin(\omega t + \zeta)$ , что после преобразования приводит к зависимости между комплексным током и напряжением  $I = U \left| \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right| = U/Z$ , где  $Z$  — ПКС или импеданс цепи. Известно, что скорость изменения электрического заряда  $q$  в емкости  $C$  равна силе тока  $i = dq/(dt)$ ; отсюда  $di/(dt) = d^2q/(dt^2)$ ;  $q = \int i dt$ . В таком случае уравнение (В.37) будет иметь вид  $L d^2q/(dt^2) + R dq/(dt) + 1/C q = u(t)$ .

Сравнивая это уравнение с уравнением для механической системы (например, поступательной) (В.14), можем найти аналогию между коэффициентами  $L$  и  $m$ ,  $R$  и  $r$ , а также  $1/C$  и  $k$ ; однако для электрической цепи с последовательным соединением пассивных элементов, как будет видно из гл. 1, для механической аналогии необходимо параллельное соединение элементов.

*Вторая электромеханическая аналогия (ток—сила).* При прохождении через электрическую цепь, состоящую из параллельно соединенных пассивных элементов  $L$ ,  $R$ ,  $C$ , ток  $i$  равен (по первому закону Кирхгофа) сумме токов в отдельных элементах  $i_L + i_R + i_C = i(t)$ , что дает после подстановки

$$\frac{1}{L} \int u dt + \frac{1}{R} u + C \frac{du}{dt} = i(t). \quad (\text{В.38})$$

Для установившегося режима  $u = U_n \sin(\omega t + \zeta)$ , что после преобразования приводит к зависимости между комплексными напряжением и током  $U = I \left| \sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\right) + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \right| = I/Y$ , где  $Y$  — ПКП или адмитанс цепи.

Если сравнить уравнение (В.38) с уравнением для механической системы (В.15), можем найти аналогию между коэффициентами  $C$  и  $m$ ,  $1/R$  и  $r$ , а также  $1/L$  и  $k$ ; однако, как это будет видно из дальнейшего, для обеих цепей будет параллельное соединение пассивных элементов.

## ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

## 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В таком понимании, как это принято в электротехнике, в механике не существует цепей. Однако введение такого понятия в механику позволяет значительно упростить рассмотрение многих сложных динамических задач, встречающихся в машиностроении. Подобные цепи представляют собой условную взаимосвязь между носителями механической энергии. Под механической цепью будем подразумевать совокупность активных и пассивных элементов, составляющих динамическую систему и условно связанных между собой линиями взаимного влияния сил и скоростей, возникающих в результате внешнего воздействия. Звеном будем называть соединение двух и более одноименных или разноименных пассивных элементов. Обозначение всех элементов показано на рис. 1.1. Условное обозначение массы (рис. 1.1, *a*) подчеркивает, что перемещение, скорость и ускорение массы рассматриваются по отношению к какой-то координатной системе, что символ массы, который принимается для динамических схем в виде квадрата, берется для изображения механических цепей в обязательном сочетании с символом координатной системы (уголок), что элемент массы рассматривается как имеющий два плюса — один из них расположен на самой массе, а второй — на системе отсчета, в данном случае неподвижная поверхность или «земля», что упрощает построение механических цепей, например, колебания режущего инструмента в жестком суппорте токарного станка при отделочных работах, колебания мембраны в крупном корпусе и др. Рядом с обозначением проставляется индекс массы — *m*. Условное обозначение момента инерции (рис. 1.1, *b*) имеет много общего с массой в поступательном движении, но вместо квадрата показана окружность, напоминающая о вращении массы в системе координат, как начало отсчета. Рядом с обозначением проставляется индекс момента инерции — *I*. Условные обозначения сопротивления для поступательного и вращательного движения (рис. 1.1, *в*) представляют собой схему демпфера, состоящего из корпуса и подвижного поршня. Заметный зазор между поршнем и корпусом показывает, что заполняющая среда может входить

и выходить из пространства демпфера с принятым предложением о вязком, линейном трении. Рядом с обозначением проставляется индекс сопротивления  $r$  или  $\rho$ . Условное обозначение упругости для поступательного и вращательного движения (рис. 1.1,  $г$ ) представляет собой схему пружины. Рядом с обозначением проставляется индекс упругости  $k$  или  $\kappa$ . Условные обозначения активных элементов представляют собой для поступательного и вращательного движения ромбы, причем для силы и крутящего момента (рис. 1.1,  $д$ ) внутри расположен затемненный треуголь-

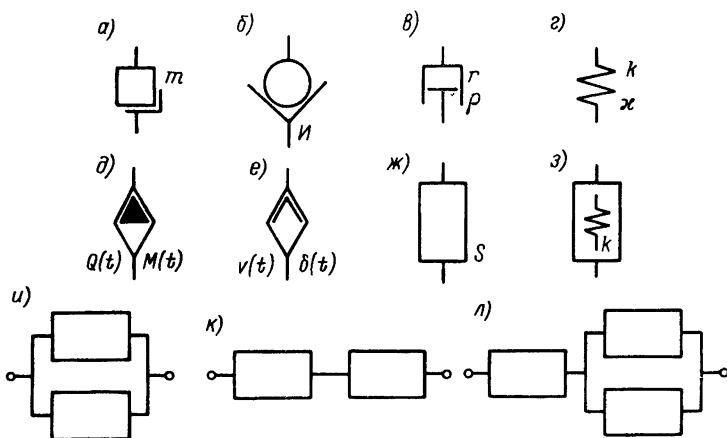


Рис. 1.1. Условные обозначения пассивных и активных элементов и звеньев

ник, а для скорости в поступательном движении и угловой скорости во вращательном движении (рис. 1.1,  $е$ ) вверху внутри ромба расположена стрелка. Рядом с обозначением источника проставляется соответственно индекс  $Q$ ,  $M$ ,  $v$  или  $\delta$ , или в более общем виде  $Q(t)$ ,  $M(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\delta(t)$ ; часто скорости обозначаются их производными, например  $\dot{y}(t)$  или  $\dot{\varphi}(t)$ .

В общем виде пассивные элементы будем изображать в виде прямоугольников с обозначением сопротивления, в более конкретных случаях в них проставляется обозначение элемента (рис. 1.1,  $ж$ ,  $з$ ).

Пассивные элементы между собой могут соединяться в звенья в различных сочетаниях — в параллельном, в последовательном, в смешанном соединениях (рис. 1.1,  $и$ ,  $к$ ,  $л$ ). Установим аналитические зависимости, получающиеся в результате последовательного и параллельного соединения: как эти соединения элементов отражаются на изменении сил, скоростей и сопротивлений во всей системе.

Рассмотрим несколько теорем по этому вопросу.

## 1.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СОЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗВЕНЬЯ

**Теорема 1.** При последовательном соединении элементов относительное перемещение крайних элементов в соединении равно сумме относительных перемещений концов каждого из элементов.

*Дано:* В системе  $xOy$  (рис. 1.2, а) вдоль оси  $Oy$  расположены, соединенные последовательно,  $n$  элементов.

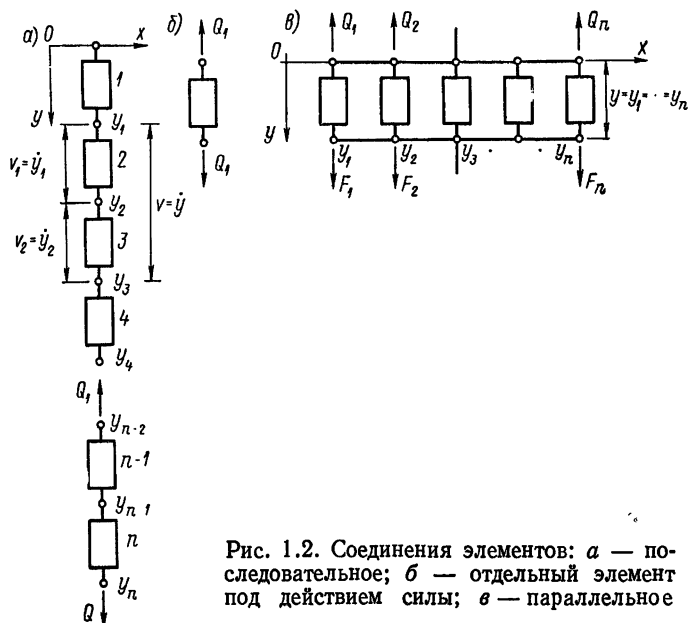


Рис. 1.2. Соединения элементов: а — последовательное; б — отдельный элемент под действием силы; в — параллельное

**Доказательство:** Пусть перемещения концов элементов, отсчитываемые от  $Ox$ , будут соответственно  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Относительные перемещения концов каждого элемента представим:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0; \quad \Delta y_2 = y_2 - y_1; \quad \Delta y_3 = y_3 - y_2 \dots \Delta y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}; \quad \Delta y_n = y_n - y_{n-1}.$$

Сгруппируем и сложим левые и правые части:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_{n-1} + \Delta y_n &= (y_1 - y_0) + \\ &+ (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}); \\ \sum_n (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_{n-1} + \Delta y_n) &= \sum_n \Delta y = \\ &= -y_0 + y_n. \end{aligned}$$

В правой части остальные члены, кроме  $-y_0$  и  $y_n$ , взаимно сократятся. Итак, сумма относительных перемещений концов



каждого из элементов  $\sum_n \Delta y$  равна относительному перемещению крайних элементов  $y_n - y_0$ :

$$\sum_n \Delta y = y_n - y_0. \quad (1.1)$$

Как следствие из выражения (1.1) можно сделать два вывода.

*Вывод 1.* При последовательном соединении элементов относительная скорость крайних элементов в соединении равна сумме относительных скоростей концов каждого из элементов:

$$\sum_n \Delta v = v_n - v_0. \quad (1.2)$$

Для двух элементов можно написать

$$v = v_1 + v_2. \quad (1.3)$$

*Вывод 2.* При последовательном соединении элементов относительное ускорение крайних элементов в соединении равно сумме относительных ускорений концов каждого из элементов

$$\sum_n \Delta a = a_n - a_0. \quad (1.4)$$

**Теорема 2.** При последовательном соединении элементов сила, действующая на каждый элемент соединения, равна силе  $Q$ , приложенной ко всему последовательному соединению.

*Дано:* В системе  $xOy$  вдоль оси  $Oy$  расположены, соединенные последовательно,  $n$  элементов.

*Доказательство.* Нарушим последовательное соединение, отделив последний элемент.

Вместо нарушенного соединения введем две силы  $Q_1$ , действовавшие в точке соединения на каждой из этих элементов (рис. 1.2, б). Эти две силы равны и прямо противоположны на основании закона Ньютона (действие равно противодействию). Однако сила  $Q_1$  должна быть равна силе  $Q$ , так как в ином случае  $Q + (-Q_1) \neq 0$ , а это противоречит положению, что в отдельной взятой системе сумма действующих сил равна нулю. Рассуждая так для последующих элементов, заметим, что  $Q$  не может быть не равна  $Q_2, Q_3, \dots, Q_i$ . Другими словами

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_i = Q. \quad (1.5)$$

**Теорема 3.** При параллельном соединении элементов относительное перемещение всего соединения (см. рис. 1.4, а) равно относительному перемещению жестко соединенных между собой концов каждого элемента. Эта формулировка есть определение понятия соединения, которое можно выразить так: соединением двух точек называется установление между ними абсолютно жесткой связи или, что то же, две соединенные между собой точки совершают одно и то же перемещение:

$$y = y_1 = y_2. \quad (1.6)$$

**Вывод 1.** При параллельном соединении элементов две соединенные между собой точки имеют одинаковые относительные скорости

$$v = v_1 = v_2. \quad (1.7)$$

**Вывод 2.** При параллельном соединении элементов две соединенные между собой точки имеют одинаковые относительные ускорения

$$a = a_1 = a_2. \quad (1.8)$$

Очевидно, что зависимости (1.1)—(1.8) для поступательного движения соответствуют таким же зависимостям для вращательного движения.

**Теорема 4.** При параллельном соединении элементов разные по величине силы, действующие на каждый элемент, входящий в соединение, в сумме равны внешней силе, действующей на соединение.

*Дано:* В системе  $xOy$  (рис. 1.2, в) расположены соединенные параллельно  $n$  элементов, при этом силы  $Q_i$ , действующие в каждом элементе, не равны между собой  $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3 \neq \dots \neq Q_n$ .

*Доказательство:* Пусть к каждому  $i$ -му элементу приложена сила  $Q_i$ , подобранная таким образом, что: 1) сумма сил  $Q_i$  равна внешней силе  $Q$ , приложенной к этим элементам; 2) относительное перемещение концов каждого элемента одинаково для всех элементов. Другими словами  $Q_1 = F_1$ ;  $Q_2 = F_2$ , ...,  $Q_n = F_n$ , где  $F_i$  — сила реакции  $i$ -го элемента от действия силы  $Q_i$ .

Если условие 2 выполнено, то элементы, находящиеся в параллельном соединении, не изменят характера движения

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n; \quad \sum_n Q_i = \sum_n F_i.$$

По условию 1  $\sum_n Q_i = Q$ . Следовательно,  $\sum_n F_i = F$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 5.** При последовательном соединении элементов ПКС равно дробному числу, у которого числитель представляет собой произведение частных комплексных сопротивлений отдельных элементов, или элементов и звеньев, составляющих данное соединение, а знаменатель — сумму ЧКС этих отдельных элементов или элементов и звеньев, составляющих данное соединение.

*Дано:* Два сопротивления  $S_1$  и  $S_2$ , соединенные (рис. 1.3, а) последовательно; каждое сопротивление представляет собой двухполюсник с соответственными полюсами 1—2 и 2—3. Например, две пружины с полюсами 1—3 (рис. 1.3, б). В теоремах 1 и 2 доказано, что при последовательном соединении двух элементов  $Q = Q_1 = Q_2$  сила результирующая равна силам, действующим в элементах, которые, в свою очередь, равны между собой (1.5), а скорость (1.3) результирующая равна сумме скоростей, дей-

ствующих в элементах,  $v = v_1 + v_2$ . Ранее (В.24) получено, что  $S = Q/v$ . Для каждого элемента можно написать

$$S_1 = \frac{Q_1}{v_1}, \quad S_2 = \frac{Q_2}{v_2}. \quad (1.9)$$

Из выражений (1.9) можно написать:  $v_1 = Q_1/S_1$ ,  $v_2 = Q_2/S_2$ .

Для всего соединения  $v = Q/S$ . Помня (1.3), можно написать  $Q/S = Q_1/S_1 + Q_2/S_2$ .

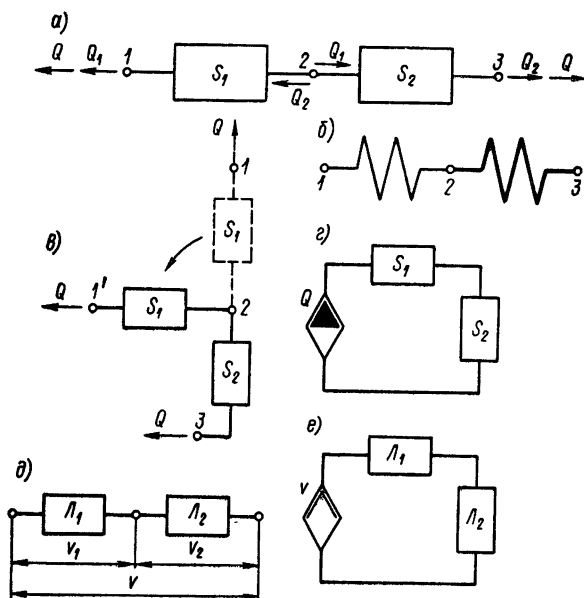


Рис. 1.3. Последовательное соединение двух элементов

Из (1.5), сокращая на  $Q$ , получим

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2};$$

$$S = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}. \quad (1.10)$$

Если в последовательном соединении имеется  $n$  элементов, то

$$S = \frac{S_1 S_2 S_3 \dots S_n}{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}. \quad (1.11)$$

На рис. 1.3, в показано последовательное соединение. Если вокруг полюса 2 повернем сопротивление  $S_1$  против часовой стрелки, получим расположение этого звена, как  $I' - S_1 - 2 - S_2 - 3$ . К полюсам  $I'$  и  $3$  приложены силы  $Q$ . Если вместо  $Q$

нарисовать источник силы, получим элементарную цепь (рис. 1.3, *з*) в последовательном соединении.

**Вывод.** При последовательном соединении элементов ПКП соединения равна сумме элементов, составляющих соединение. Действительно, если  $L = v/Q$ ;  $L_1 = v_1/Q_1$ ;  $L_2 = v_2/Q_2$  (рис. 1.3, *д*), то помня, чему равна сила и скорость, получим

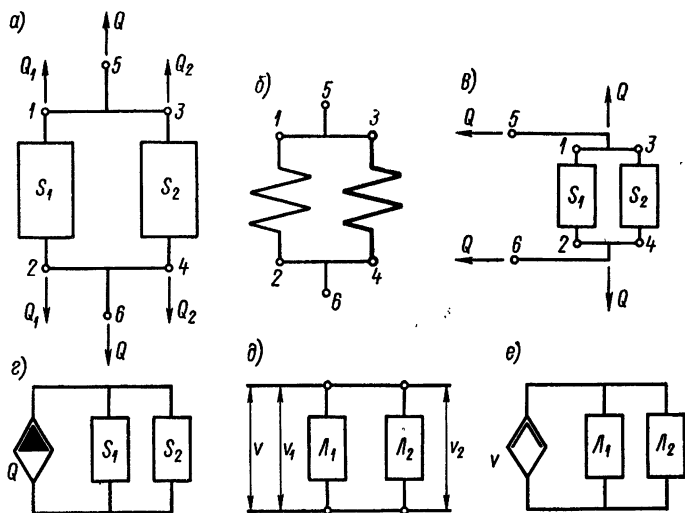


Рис. 1.4. Параллельное соединение двух элементов

$v = LQ$ ,  $v_1 = L_1Q_1$ ,  $v_2 = L_2Q_2$ ;  $LQ = L_1Q_1 + L_2Q_2$  и окончательно

$$L = L_1 + L_2. \quad (1.12)$$

Если в последовательном соединении находится  $n$  элементов, то

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n. \quad (1.13)$$

При вычерчивании механической цепи все подвижности и внешний источник (скорость) изображаются, как показано на рис. 1.3, *е*.

**Теорема 6.** При параллельном соединении элементов ПКС соединения равно сумме ЧКС элементов, составляющих соединение.

*Дано:* Два сопротивления  $S_1$  и  $S_2$ , соединенные параллельно (рис. 1.4, *а*); каждое сопротивление представляет собой двухполюсник с соответствующими полюсами 1—2 и 3—4; выходные полюсы этого звена будут 5—6; например, две пружины с полюсами 5—6 (рис. 1.4, *б*).

В теоремах 3 и 4 доказано, что при параллельном соединении элементов сила результирующая равна сумме сил каждого сопротивления, входящего в соединение, а скорость, результирующая по величине, равна скоростям, действующим в элемен-

тах, которые, в свою очередь, равны между собой (1.7). Ранее (В.24) получено, что  $S = Q/v$ . Для каждого элемента можно написать (1.9), что преобразовывается  $Q_1 = S_1 v_1$  и  $Q_2 = S_2 v_2$ ; для всего соединения  $Q = Sv$ . Помня, что  $Q = Q_1 + Q_2$ , напишем, что  $Sv = S_1 v_1 + S_2 v_2$ ; но  $v = v_1 = v_2$ , поэтому

$$S = S_1 + S_2. \quad (1.14)$$

Если в соединении  $n$  элементов, то

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n. \quad (1.15)$$

На рис. 1.4, в показано рассмотренное параллельное соединение. Если повернем концы выходных полюсов  $b$  и  $b$  и вместо знаков сил  $Q$  поставим источник силы, то получим (рис. 1.4, г) элементарную цепь в параллельном соединении.

*Вывод.* При параллельном соединении элементов ПКП соединения равна дробному числу, у которого числитель представляет собой произведение ЧКП отдельных элементов, или элементов и звеньев или звеньев, составляющих данное соединение, а знаменатель — сумму ЧКП этих отдельных элементов или элементов и звеньев или звеньев, составляющих данное соединение. Действительно, если  $L = v/Q$ ,  $L_1 = v_1/Q_1$ ,  $L_2 = v_2/Q_2$  (рис. 1.4, д), то помня, что для данного соединения  $Q = Q_1 + Q_2$  и  $v = v_1 = v_2$ , получим  $Q = v/L$ ,  $Q_1 = v_1/L_1$ ,  $Q_2 = v_2/L_2$ . Подставляя эти значения в выражение  $Q = Q_1 + Q_2$ , имеем  $v/L = v_1/L_1 + v_2/L_2$ ; учитывая равенство скоростей, имеем

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \text{ или } L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (1.16)$$

Если в параллельном соединении находятся  $n$  элементов, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} = \\ &= \frac{L_2 L_3 \dots L_n + L_1 L_3 \dots L_n + L_1 L_2 \dots L_{n-1}}{L_1 L_2 L_3 \dots L_n}; \\ L &= \frac{L_1 L_2 L_3 \dots L_n}{L_2 L_3 \dots L_n + L_1 L_2 \dots L_n + \dots + L_1 L_2 \dots L_{n-1}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

При вычерчивании механической цепи все подвижности и внешний источник (скорость) изображаются, как показано на рис. 1.4, е.

Строго говоря, рассмотренные шесть теорем дают на первых порах элементарные понятия для соединения в простейшие звенья двух элементов и возможность при этом определить ПКС или ПКП такого звена. В гл. 2 этих данных будет достаточно, чтобы, действуя систематически, определять ПКС для очень сложных динамических систем, преобразованных в механические цепи.

### 1.3. ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛЫ ИЛИ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Из физики известно, что каждый активный и пассивный элементы цепи являются двухполюсниками; это особенно явно выражено для элементов упругости и сопротивления; что касается элемента массы, то это свойство выражено неявно, так как вторым полюсом является замыкание «на землю» из-за гравитационного притяжения: на схемах построений механических цепей второй полюс будем находить штриховой линией, соединяющей массу с неподвижным основанием или «землей».

Сущность построения механической цепи по данной динамической схеме заключается в следующем: каждая динамическая схема представляет собой закономерное соединение пассивных и активных элементов ее составляющих; каждый элемент обладает двумя полюсами; для упругостей и сопротивлений эти полюсы выглядят явно, а для массы только один полюс выглядит явно, а второй полюс нужно представить соединив эту массу с неподвижной поверхностью, к которой присоединена динамическая система, что выполняется пунктирной линией; полюсы различных элементов, которые движутся совместно, соединяют между собой; полюсы различных элементов, которые остаются неподвижными, соединяют с неподвижной поверхностью.

Для доказательства аналогичности механической и электрической цепей следует проделать следующие действия<sup>1</sup>: около каждого активного элемента (источник силы или скорости) нанести стрелку, указывающую положительное направление силы или скорости; около каждого подвижного узла соединения пассивных элементов проставить определенную координату и стрелкой указать направление отсчета положительных значений этих координат.

Построенная подобным образом аналогия между более сложными механической и электрической цепями подтверждается путем сравнения коэффициентов. Приступим к изучению построения цепей.

**Система, состоящая из сопротивления и упругости.** Дано сопротивление  $r$  и упругость  $k$ ; на невесомую балку 2—4, соединяющую оба элемента, действует сила  $Q(t)$ , величина которой изменяется по гармоническому закону (рис. 1.5, а).

Для построения механической цепи необходимо выполнить вспомогательную схему; при определенном навыке в выполнении вспомогательной схемы нет необходимости, но для систематического изложения сделаем все операции последовательно.

---

<sup>1</sup> С физической точки зрения теория аналогий наилучшим образом изложена в статье: Варшавский Л., Федорович В. Электромеханические аналогии. — «Известия электропромышленности слабого тока», № 3, 1936.

1) На заданной схеме обозначим полюсы 1 и 2 для упругости и 3 и 4 для сопротивления; при этом точки 1 и 3 принадлежат поверхности, которая остается неподвижной и относительно которой перемещается динамическая система.

2) Проведем линию 1—3 (рис. 1.5, б), что соответствует неподвижной плоскости; от точек 1 и 3 вычертим символы упругости и сопротивления и получим точки 2 и 4, которые соединим между собой линией 2—4. Изобразим силу и реакцию  $Q$ .

3) Для дальнейших построений повернем линии действия силы и реакции  $Q$  вдоль контурных линий 1—3 и 2—4; это показано штриховой линией (рис. 1.5, в).

4) Введем вместо силы и реакции  $Q$  символ источника энергии силы. На рис. 1.5, г показан окончательный вид механической цепи.

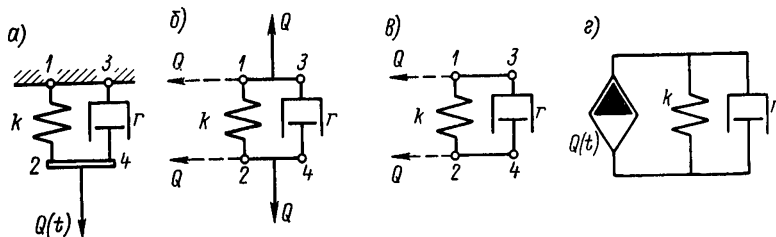


Рис. 1.5. Соединение упругости и сопротивления

**Система, состоящая из массы и упругости.** Дана масса  $m$ , упругость  $k$  и сила  $Q(t)$ , действующая на массу (рис. 1.6, а), при этом упругость закреплена к неподвижной поверхности.

1) Упругость имеет два полюса 1 и 2. Масса имеет также два полюса, одним полюсом является точка 2, которой масса соединена с упругостью, а вторым полюсом будет являться неподвижная поверхность, с которой масса соединена условной линией 3—4: естественно, что точки 2 и 3 имеют одинаковое значение.

2) От линии 1—4 строим символы массы в виде двухполюсника 4—3 и упругости 1—2. Линия 1—4 соответствует неподвижной поверхности, а линия 2—3 соединяет упругость с массой (рис. 1.6, б).

3) Обозначаем действие силы и реакции  $Q$  на эту систему. Действие силы и реакции поворачиваем (штриховые линии) вдоль контурных линий 4—1 и 3—2; эта схема изображена на рис. 1.6, в.

4) Введем вместо силы и реакции  $Q$  символ источника энергии силы. На рис. 1.6, г показан окончательный вид механической цепи.

5) В действительности, при решении сложных механических цепей, пользоваться изображением на рис. 1.6, г затруднительно, так как решение задач вначале приходится делать в общем виде. Для того чтобы не вводить на первом этапе решений конкретные

пассивные элементы, будем вводить комплексные сопротивления  $S_1, S_2 \dots$  этих элементов; поэтому вместо символа элементов вычерчиваем прямоугольники с обозначением  $S_i$ , а внутри их конкретный элемент (рис. 1.6, д).

Как вывод из этого раздела отметим, что если в динамической системе масса и упругость или масса и сопротивление расположены последовательно, то при математическом описании механической цепи общее комплексное сопротивление звена является суммой комплексных сопротивлений элементов, составляющих звено. ;

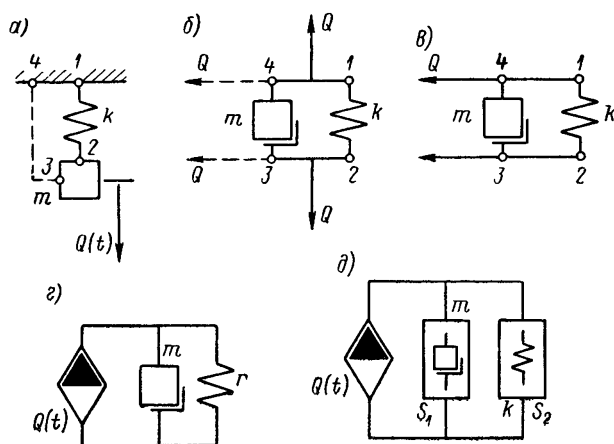


Рис. 1.6. Соединение массы и упругости

**Система, состоящая из массы, сопротивления и упругости.** Даны сопротивление  $r$  и упругость  $k$ , присоединенные своими полюсами 1 и 3 к неподвижной поверхности (рис. 1.7, а); к полюсам 2—4 этих элементов присоединена масса  $m$ , на которую действует сила  $Q(t)$ . Одним из полюсов массы будет точка 5 (так же как 2 и 4 и вообще любая точка на массе); другим полюсом массы будет точка 6 на неподвижной поверхности, которая условно штриховой линией соединена с точкой 5.

1) Проведем линию 1—3, отвечающую неподвижной поверхности (рис. 1.7, б); от точек 1 и 3 построим символы элементов  $r$  и  $k$  со вторыми полюсами 2 и 4. Присоединим к линии 2—4 массу  $m$  и точку 5 массы соединим штриховой линией с точкой 6. Начертим действие силы и реакции  $Q$ . Для упрощения — сила  $Q(t)$  представляется на динамической схеме и когда вычерчивается символ источника энергии; в процессе построения сила обозначается величиной  $Q$ .

2) Расположим массу  $m$  (точнее ее символ) между точками 5 и 6, а два элемента  $r$  и  $k$  обозначим с их полюсами. Действие силы  $Q$  проведем пунктиром вдоль контурных линий цепи (рис. 1.7, в).



3) Вместо знака силы и реакции  $Q$  вычертим (рис. 1.7, *з*) источник энергии — силы  $Q(t)$ , что приведет к окончательному виду механической цепи (рис. 1.7, *д*) или в общем виде на рис. 1.7, *е*.

Динамическую систему, изображенную на рис. 1.7, *а*, можно изобразить в виде (рис. 1.7, *ж*), когда неподвижная плоскость с точками 1 и 3 как бы повернулась на угол (от 0 до  $90^\circ$ ). Про-

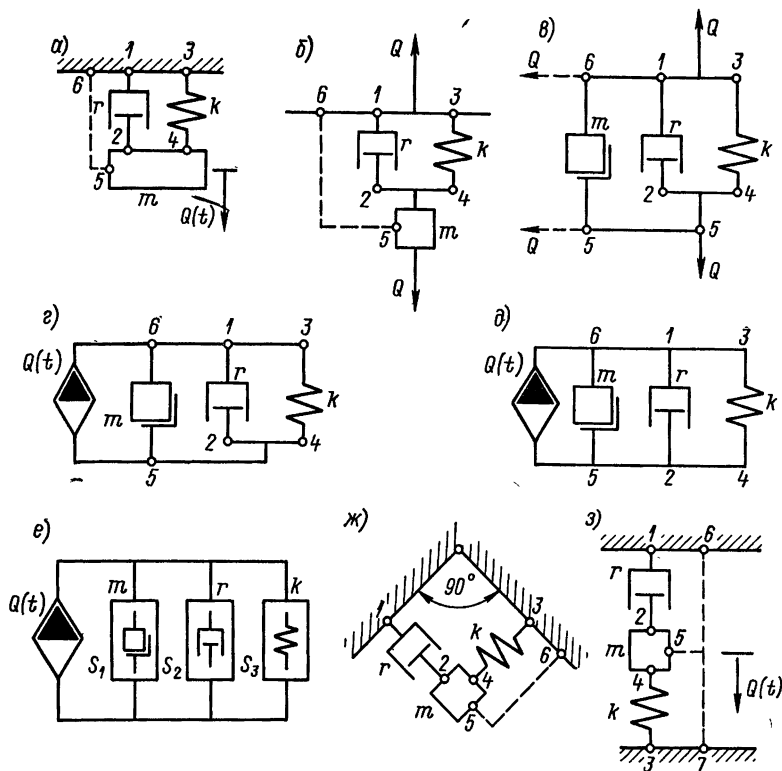


Рис. 1.7. Соединение массы, сопротивления и упругости

изводя этот поворот относительно точки  $O$  и создавая разрыв у плоскостей с точками 1 и 3, можно представить себе эту модификацию в виде рис. 1.7, *з* (поворот на  $180^\circ$ ); при этом линия гравитационного притяжения может быть представлена в виде 5—6 или 5—7, что имеет одинаковое значение. Все эти три модификации имеют одинаковые динамические последствия, при этом модификации *а* и *з* одинаковы, а для угла поворота в пределах между 0 и  $180^\circ$  необходимо делать поправки для определения нагрузки, действующие в системе, исходя из геометрических соотношений.

**Система, состоящая из массы и двух упругостей.** Даны упругость  $k_2$ , масса  $m$  и упругость  $k_1$  (рис. 1.8, *а*); к упругости  $k_1$  приложена внешняя сила  $Q(t)$ .

1) Обозначим полюсы 1—2, 3—4 для элементов  $k_2$  и  $k_1$  и полюсы 5—6 для массы.

2) От линии 1—6 вычерчиваем элемент  $k_2$  с полюсами 1—2 и элемент  $m$  с полюсами 5—6; от полюса 3 (то же что 5) изображаем элемент  $k_1$  с полюсами 3—4. Располагаем силу и реакцию  $Q$  (рис. 1.8, б).

3) Поворачиваем от точек 3; 5, как из центра, по часовой стрелке элемент  $k_1$  и переносим линии действия силы и реакции  $Q$ .

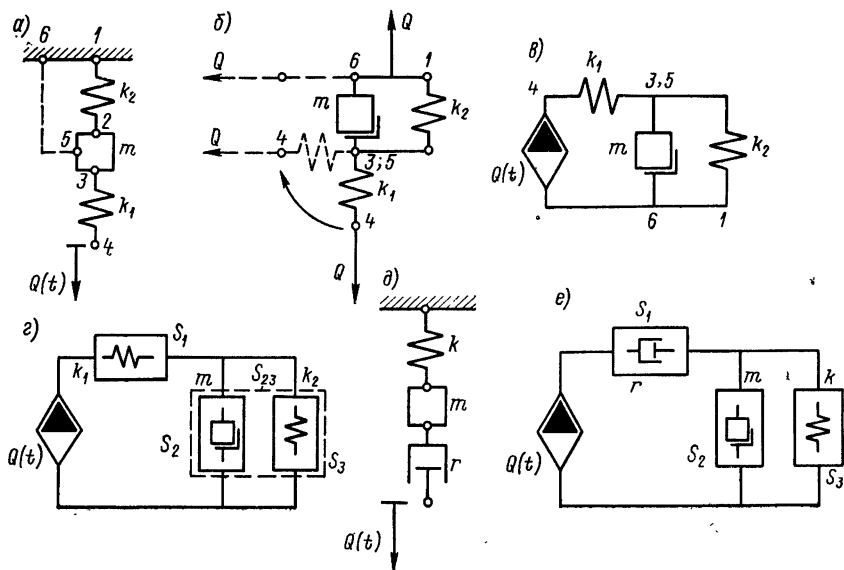


Рис. 1.8. Соединение массы и двух упругостей

4) Вычерчиваем механическую цепь (рис. 1.8, в), сохраняя пассивные элементы и обозначения полюсов; на рис. 1.8, г вычерчиваем цепь в общем виде с введением прямоугольников с комплексным сопротивлением  $S_1$ ,  $S_2$ ...

В действительности вся схема по рис. 1.8, б изображена так, чтобы элементы последовательного соединения (в данном случае —  $k_1$ ) располагались по верхней линии. В дальнейшем всегда будем поступать таким образом.

Следует обратить внимание на физический смысл построенной механической цепи: упругость  $k_2$  и масса  $m$  образуют звено в параллельном соединении, а упругость  $k_1$  и звено ( $k_2 m$ ) образуют новое звено  $S_{123}$ , находящееся в последовательном соединении.

На рис. 1.8, д, е показаны динамическая система и механическая цепь для несколько измененной динамической системы, когда вместо элемента  $k_1$  введен элемент  $r$ :

**Система вращательная, состоящая из двух инерций и двух упругостей крутильных** (рис. 1.9, а), на которую действует через инерцию  $I_1$  крутящий момент  $M(t)$ .

Динамическую схему (рис. 1.9, б) построим, начиная от неподвижной поверхности, изображая вал в виде упругости  $\kappa_2$ ; затем показываем инерцию  $I_2$ , к которой присоединяем вал в виде

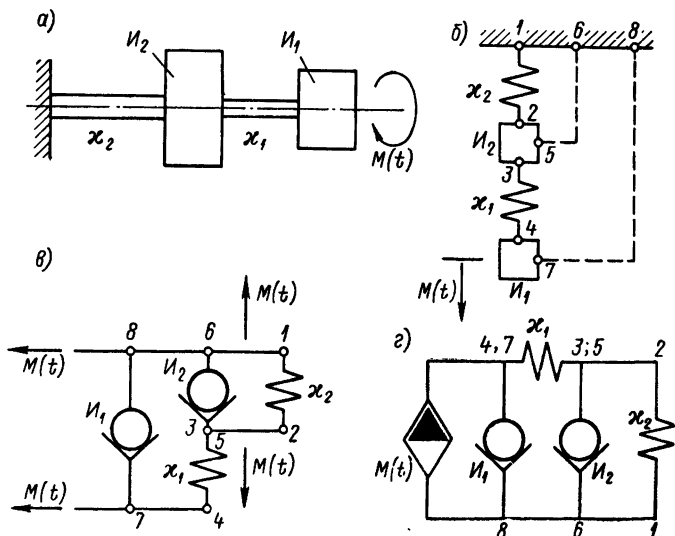


Рис. 1.9. Соединение двух инерций и двух крутильных упругостей

упругости  $\kappa_1$  и затем инерцию  $I_1$ . На эту инерцию действует крутящий момент, который изображен в виде стрелки с индексом  $M(t)$ . Построение вспомогательной схемы (рис. 1.9, в) строим

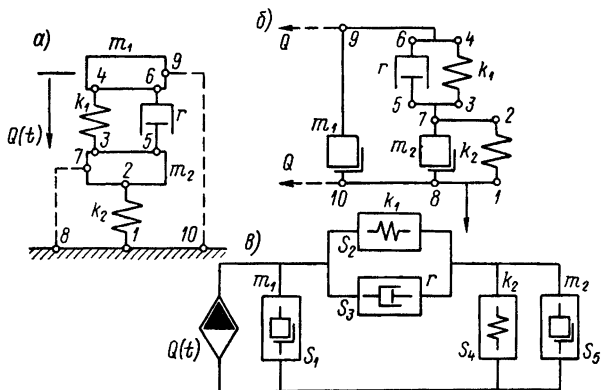


Рис. 1.10. Система в состоянии опоры

от неподвижной плоскости 1—6, откуда изображаем в параллельном соединении упругость  $\kappa_2$  и инерцию  $I_2$ , к которой последовательно от точки 3 присоединяем упругость  $\kappa_1$  и инерцию  $I_1$ ,

которая точками 4; 7 соединяется с точкой 8 на неподвижной поверхности 1—6—8. Указываем расположение источника энергии — крутящий момент — и в окончательном виде механическую цепь изображаем на рис. 1.9, з.

**Система, состоящая из двух масс, одного сопротивления и двух упругостей.** Расположение динамической системы в состоянии «опоры», а не «подвеса», изображенное в предыдущих по-

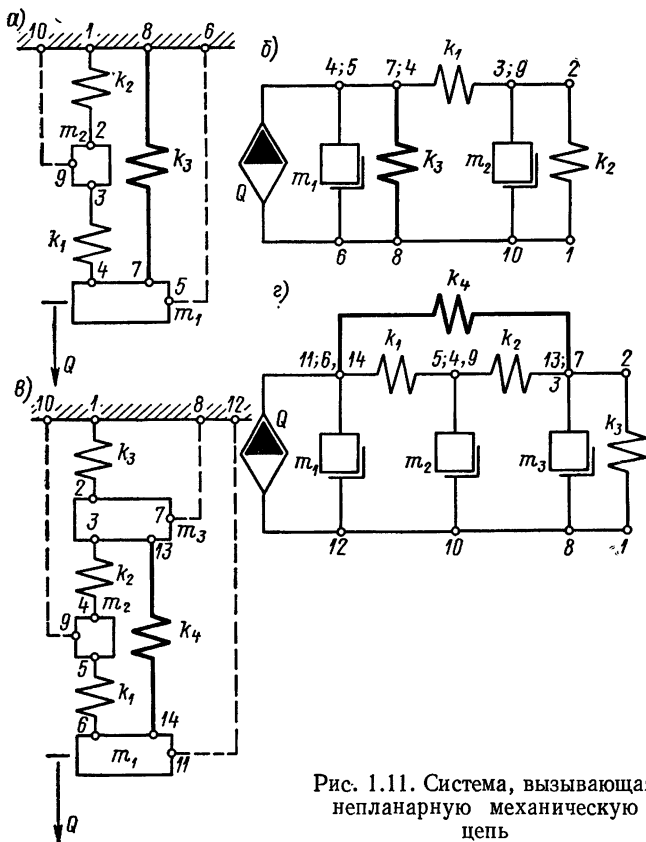


Рис. 1.11. Система, вызывающая непланарную механическую цепь

строениях, дано для того, чтобы показать, что никаких различий в построении механической цепи при этом не существует.

Даны массы  $m_1$ ,  $m_2$ , сопротивление  $r$  и упругости  $k_1$ ,  $k_2$ . Внешняя сила  $Q(t)$  действует на массу  $m_1$ .

На рис. 1.10, а изображены полюсы всех входящих в динамическую систему элементов, причем для массы  $m_1$  штриховая линия второго полюса будет 9—10; а для массы  $m_2$  — 7—8.

1) От линии 1—8 неподвижной поверхности вычерчиваем элементы  $m_2$  и  $k_2$ , затем от полюса 7 массы  $m_2$  вычерчиваем элементы  $r$  и  $k_1$  со своими полюсами 5—6 и 3—4 (рис. 1.10, б).

2) От линии 4—6 вычерчиваем расположение массы  $m_1$  с полюсами 9—10.

3) Действие силы  $Q(t)$  будет происходить через полюсы 9—10.

4) Вместо силы  $Q$  вычертим символ источника силы и получим окончательную механическую цепь (рис. 1.10, в).

Сравнивая рассмотренные шесть случаев, можем отметить следующее: при внешнем источнике — силе, этот источник и масса располагаются между собой параллельно; элементы упругости и сопротивления, расположенные между собой в системе параллельно, располагаются в цепи также параллельно; элементы упругости и сопротивления, расположенные в системе последовательно, располагаются в цепи также последовательно.

**Понятие о непланарных механических цепях.** Имеются сложные динамические системы с двойными связями, вызывающие заметные осложнения при расчетах. Эти дополнительные связи бывают двух видов: 1) связи с неподвижной поверхностью (рис. 1.11, а); 2) связи между звеньями (рис. 1.11, в). В первом случае, например, имеется основная система  $m_1-k_1-m_2-k_2$ ; кроме того, имеется упругость  $k_3$ , соединяющая массу  $m_1$  с неподвижной поверхностью. На механической цепи (рис. 1.11, б) эта упругость показывается параллельно массе  $m_1$  и рядом с ней.

Во втором случае имеется основная система  $m_1-k_1-m_2-k_2-m_3-k_3$ ; кроме того, имеется упругость  $k_4$ , соединяющая между собой массы  $m_1$  и  $m_3$ . На механической цепи (рис. 1.11, г) эта упругость показывается в последовательной цепи к массам между полюсами 13 и 14 и образует так называемую цепь с перекрещивающимися линиями, что не позволяет расположить линии связи между элементами в одной плоскости: отсюда название непланарная цепь. Расчет подобной цепи приводится в п. 2.7.

#### 1.4. ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕСКОЛЬКИХ ОДНОВРЕМЕННО ДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ ИЛИ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

В реальных условиях на динамическую систему могут воздействовать несколько сил, действующих одновременно или на разные элементы воздействуют в определенной последовательности. Для этих случаев ниже приводятся методы построения механических цепей.

**Система, состоящая из двух масс и двух упругостей.** Пусть на систему (рис. 1.12, а) действуют две силы  $Q_1$  и  $Q_2$ . Построение механической цепи выполняется от двух элементов  $m_2k_2$ , соединенных параллельно: полюсы 1—2, 5—6. На массу  $m_2$  действует сила  $Q_2$  (рис. 1.12, б), что отмечается на полюсах 1—2. Дальнейшее построение цепи для элементов  $k_1$  и  $m_1$  приводит к построению полюсов 3—4, 7—8. На массу  $m_1$  действует сила  $Q_1$ ; последнее изображено расположением силы  $Q_1$  на полюсах 7—8. В обоих

случаях раздельное действие сил  $Q_1$  и  $Q_2$  показывает, что реакция будет восприниматься упругостью  $k_2$ , закрепленной на неподвижной поверхности — полюс 1; при действии силы  $Q_2$  через массу  $m_2$ , ее реакция также на плоскости 1—6, при действии силы  $Q_1$  через массу  $m_1$ , ее реакция также на плоскости 1—8. Поэтому на механической цепи (рис. 1.12, в) символ силы  $Q_1$  располагается у полюсов 4—8, а символ силы  $Q_2$  — у полюсов 1—2. Если обе

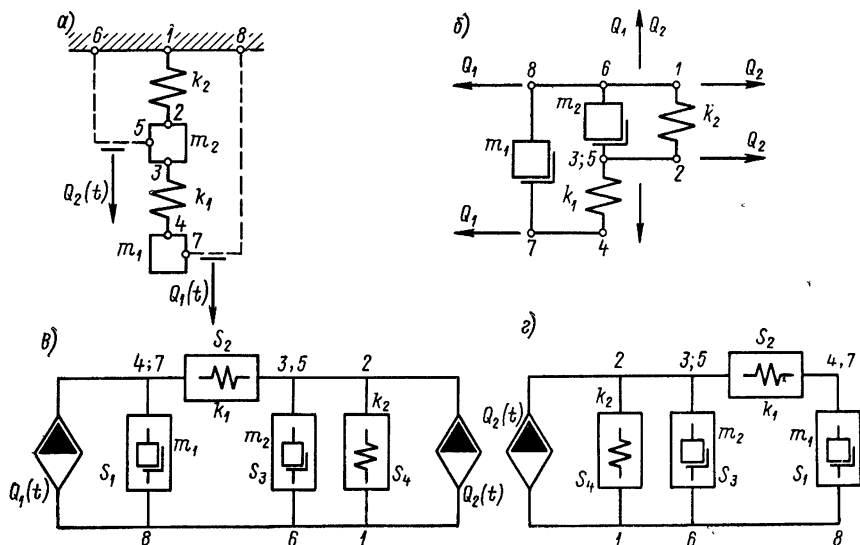


Рис. 1.12. Одновременное действие двух сил

силы действуют одновременно, то оба источника на схеме изображаются одновременно; если действует только сила  $Q_2$ , то от полюсов 4—8 источник  $Q_1$  не вычерчивается. Если действует в цепи только сила  $Q_2$ , то для удобства последующих расчетов можно цепь изображать в обычном начертании — слева от источника  $Q_2$  цепь в перевернутом виде (рис. 1.12, в).

**Система, состоящая из трех масс и трех упругостей (рис. 1.13, а).** Силы в системе действуют на каждую из масс.

Построение механической цепи (рис. 1.13, б) не вызывает затруднений, и в ней размещаются три внешних источника:  $Q_1$  и  $Q_3$  по краям цепи и сила  $Q_2$  между упругостью  $k_1$  и массой  $m_2$ . Пусть в данной системе отсутствуют силы  $Q_1$  и  $Q_3$ , а действует только одна сила  $Q_2$ . Ее расположение в цепи строго определено. Расположенные слева от силы  $Q_2$  упругость  $k_1$  и масса  $m_1$  или, что то же, сопротивления  $S_2$  и  $S_1$ , можно представить в виде звена  $S_{1,2}$ , как изображено на рис. 1.13, в; точно также расположенные справа от силы  $Q_2$  массы  $m_2$  и  $m_3$ , а также упругости  $k_2$  и  $k_3$  можно представить в виде звена  $S_{3,4,5,6}$ , как изображено также на рис. 1.13, в. Очевидно, эту схему справедливо представить

в виде двух односторонне расположенных двухполюсников  $S_{12}$ ,  $S_{3456}$  (рис. 1.13, з) и соединенных линиями с внешним источником (точки 1—6).

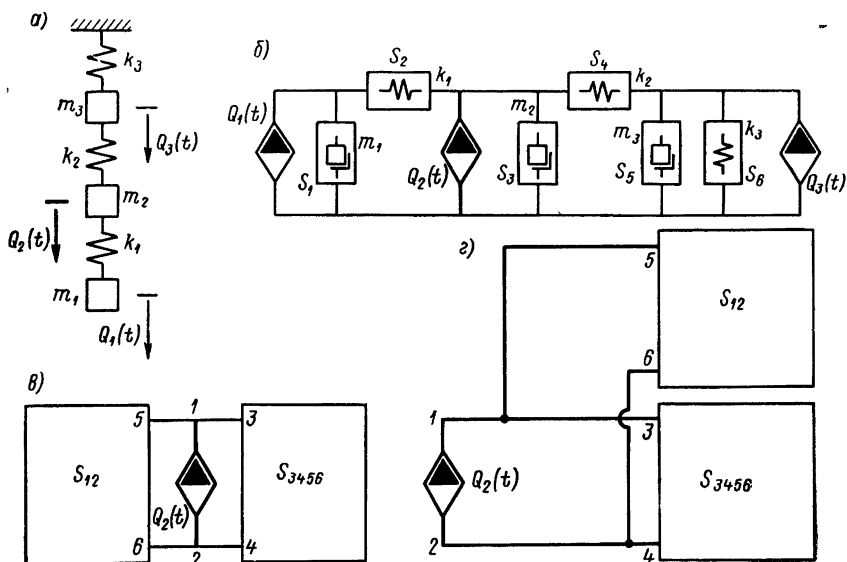


Рис. 1.13. К расчету двухполюсников и четырехполюсников

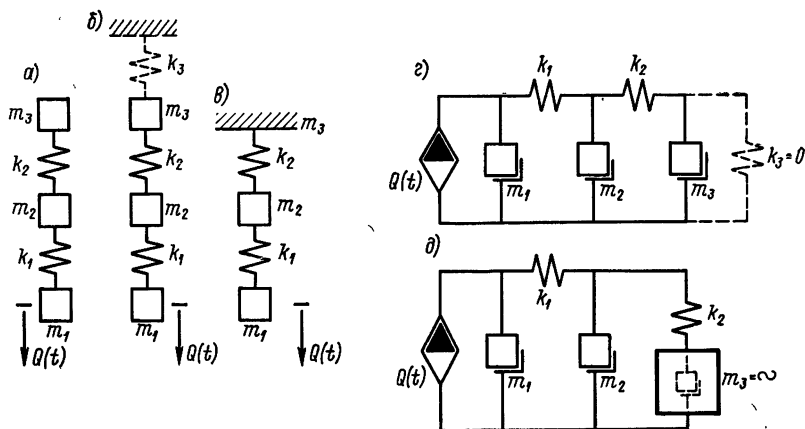


Рис. 1.14. Система, не имеющая опоры, под действием силы

**Система, не соединенная с неподвижной поверхностью, находящаяся под действием силы (рис. 1.14, а).** Пусть дана система, состоящая из трех масс и двух упругостей и находящаяся под действием силы  $Q(t)$ . Подобную систему можно представить в двух случаях: при отсутствии упругости  $k_3$  или при условии когда

масса  $m_3$  вначале равна бесконечности, а затем принимает конечное значение. В обоих случаях на рис. 1.14, б, в показаны методы построения механических цепей (рис. 1.14, г, д). В первом случае, если считать, что отсутствует упругость  $k_3$ , необходимо из схемы, где она включена параллельно массе  $m_3$ , ее исключить; во втором случае, когда вместо бесконечной массы  $m_3$  вводится конечная масса, необходимо ее включить последовательно к упругости  $k_2$ .

Если идти от системы с тремя степенями свободы, то из цепи необходимо исключить упругость  $k_3$  (параллельно массе  $m_3$ ); если идти от системы с двумя степенями свободы, то в цепи следует ввести массу  $m_3$  (последовательно упругости  $k_2$ ).

### 1.5. КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Определение частотных зависимостей во вращательных системах, состоящих из многоваловых схем, имеет существенное значение в редукторо-, станко-, автостроении; особенную роль эти расчеты имеют в механизмах многоскоростных, требующих переключения зубчатых колес. Эти расчеты крутильных колебаний валов в сочетании с зубчатыми колесами позволяют свести их к расчету эквивалентных динамических систем, состоящих из ряда вращающихся масс и валов в виде упругостей.

Редуктор<sup>1</sup> состоит из двух валов 1 и 2 (рис. 1.15, а), соединенных между собой зубчатыми колесами с числом зубцов  $z_1$  и  $z_2$  с передаточным числом  $\eta = z_2/z_1$ .

Случай 1.  $I_1 \gg I_2$ ,  $I_4 \gg I_3$ ,  $I_1 \approx I_4$ . Приведем систему на рис. 1.15, а к другой системе, эквивалентной первой системе (рис. 1.15, б). Известно, что между колесами на валах 1 и 2 существуют кинематические зависимости  $v = R_1\delta_1 = R_2\delta_2$ , где  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы зубчатых колес, а  $m$  — модуль зубчатого колеса<sup>2</sup>.

$$mz_1 = 2\pi R_1, \quad mz_2 = 2\pi R_2,$$

$$z_1/z_2 = R_1/R_2 = 1/\eta,$$

где  $\eta$  — передаточное число.

Можно написать

$$\delta_2 = R_1/R_2\delta_1 = 1/\eta\delta_1 \text{ или } d\delta_2/(dt) = 1/\eta d\delta_1/(dt). \quad (1.18)$$

Крутящий момент

$$M_2 = R_2/R_1M_1 = I_4 d\delta_2/(dt).$$

<sup>1</sup> В настоящее время часто вместо термина «редуктор» употребляют термин «машинный агрегат».

<sup>2</sup> Автор вынужден ввести такое обозначение, так как буквой  $m$  обозначается по всей книге масса тела.



Мощность

$$P = M_1 \delta_1 / 75 = M_2 \delta_2 / 75 = [I_4 d\delta_2 / (dt)] \delta_2 / 75 = \\ = I_4 [1/\eta d\delta_1 / (dt)] \delta_1 / \eta \cdot 1/75.$$

Обозначим через  $I_{41}$  приведенный к валу двигателя момент инерции нагрузки

$$I_{41} = I_4 (1/\eta^2). \quad (1.19)$$

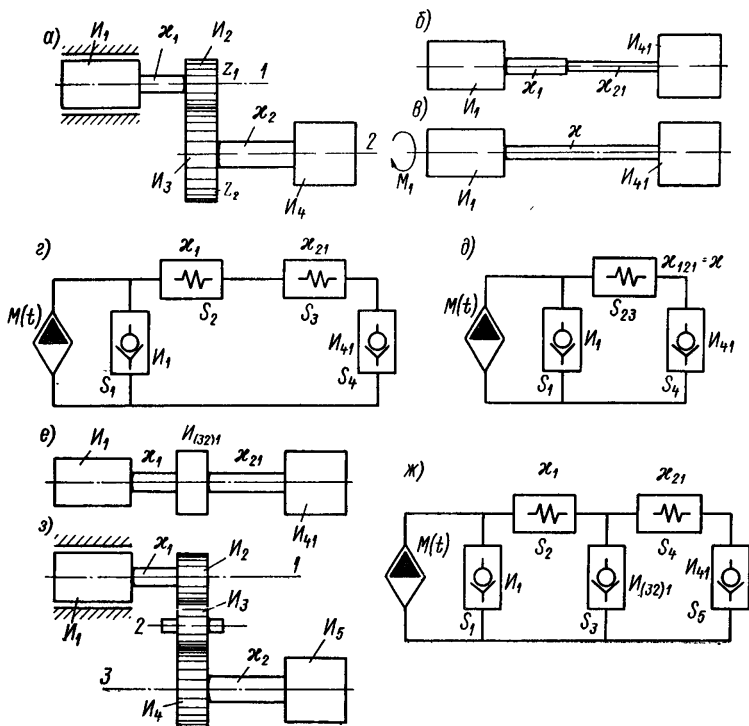


Рис. 1.15. Редуктор, состоящий из двух валов

В таком случае

$$P = I_{41} \delta_1 / 75 [d\delta_1 / (dt)]. \quad (1.20)$$

Сделаем два вывода:

1. Суммарный момент инерции, необходимый для ускорения двигателя,

$$I_{\Sigma 1} = I_1 + I_{41} = I_1 + I_4 (1/\eta^2). \quad (1.21)$$

2. Получаемый после несложных преобразований суммарный момент инерции двигателя и нагрузки относительно вала нагрузки

$$I_{\Sigma 2} = I_{12} + I_4 = I_1 \eta^2 + I_4. \quad (1.22)$$

Изменяя упругость на кручение вала 2 в том же отношении, как и момент инерции нагрузки, определим приведенную упругость вала 2 к валу 1

$$\kappa_{21} = 1/\eta^2 \kappa_2. \quad (1.23)$$

Изображенная на рис. 1.15, б система в виде одного вала переменного сечения и двух моментов инерций представляет собой эквивалентную схему зубчатой передачи, у которой массы зубчатых колес не учитываются.

Приведенная крутильная упругость  $\kappa$  определится из двух соединенных последовательно сопротивлений  $S_2, S_3$  механической цепи (рис. 1.15, в):

$$S_{23} = \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3} \frac{\frac{\kappa_1}{j\omega} \frac{\kappa_{21}}{j\omega}}{\frac{\kappa_1}{j\omega} + \frac{\kappa_{21}}{j\omega}} = \frac{(\kappa_1 \kappa_{21}) j\omega}{(j\omega)^2 (\kappa_1 + \kappa_{21})} = -j \frac{\kappa_1 \frac{\kappa_2}{\eta^2}}{\omega \left( \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{\eta^2} \right)};$$

$$S_{23} = -j \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\omega (\kappa_1 \eta^2 + \kappa_2)} = -j \frac{\kappa_{121}}{\omega} = -j \frac{\kappa}{\omega}.$$

Здесь

$$\kappa = \kappa_{121} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 \eta^2 + \kappa_2}. \quad (1.24)$$

Случай 2. Моменты инерции редуктора соизмеримы с нагрузкой. В таком случае приведем всю схему (рис. 1.15, а) к первой оси: момент инерции  $I_1$  и упругость  $\kappa_1$  будут без изменений; моменты инерции  $I_2$  и  $I_3$  приведем к общему моменту инерции  $I_{(32)1} = I_2 + I_{31} = I_2 + I_3 (1/\eta^2)$ . Упругость  $\kappa_2$  приведем также к первой оси  $\kappa_{21} = \kappa_2 (1/\eta^2)$ .

Момент инерции массы  $I_4$ , приведенный к первой оси,  $I_{41} = I_4 (1/\eta^2)$ .

На основании динамической системы (рис. 1.15, е) построим механическую цепь (рис. 1.15, ж).

**Редуктор с паразитной осью (рис. 1.15, з).** Имеется редуктор, состоящий из трех осей и имеющий момент инерции  $I_1$  ротора двигателя, моменты инерции  $I_2, I_3, I_4$  зубчатых колес и момент инерции внешней нагрузки  $I_5$ ; отрезки валов 1 и 3 имеют соответственные упругости  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Зубчатое колесо с моментом инерции  $I_3$  на коротких цапфах примем абсолютно упругим; это колесо может выполнять одну из следующих функций — увеличение расстояния между осями 1 и 3; изменение направления вращения вала нагрузки; момент инерции  $I_3$  используется как средство для увеличения времени разгона редуктора при пуске. Передаточное число передачи  $\eta = z_4/z_2$ ; промежуточное зубчатое колесо  $z_3$  не влияет на изменение передаточного числа между 1 и 3 валами. Однако  $\eta_1 = z_3/z_2$ ;  $\eta_2 = z_4/z_3$ ;  $\eta = \eta_1 \eta_2 = z_4/z_2$ .

Приведем по внешнему виду всю систему (рис. 1.15, з) к первой оси. Значения, однако, для трех валов будут другие. Мо-

менты инерций  $I_1, I_2$  и упругость  $\kappa_1$  будут без изменений; моменты инерций  $I_3, I_4$  приведем к общему моменту инерций:  $I_{(43)1} = I_{31} + I_{41} = I_3 (1/\eta_1^2) + I_4 (1/\eta^2)$ . Упругость  $\kappa_2$  приведем также к первой оси  $\kappa_{21} = \kappa_2 (1/\eta^2)$ . Момент инерции  $I_5$ , приведенный к первой оси, будет  $I_{51} = I_5 (1/\eta^2)$ ;  $I_{51} = I_1 + I_2 + I_3 (1/\eta_1^2) + I_4 (1/\eta^2) + I_5 (1/\eta^2)$ .

По построенной механической цепи, внешний вид которой соответствует рис. 1.15, ж, можно произвести расчет всех ее параметров.

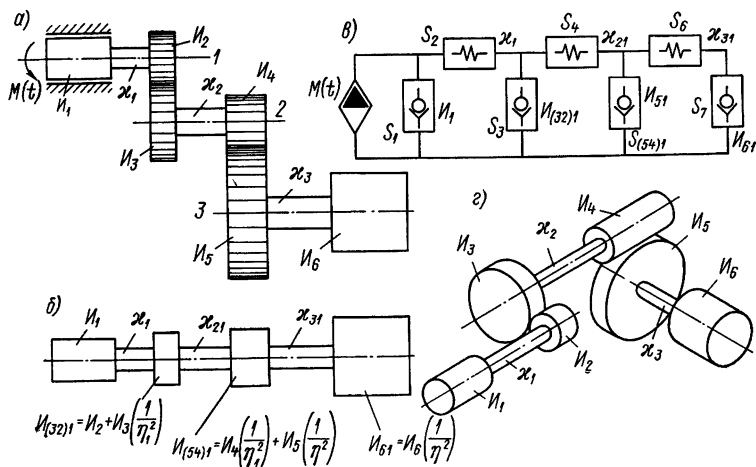


Рис. 1.16. Редуктор, состоящий из трех валов

**Редуктор с двумя парами зубчатых колес (рис. 1.16, а).** Имеется редуктор, состоящий из трех осей с шестью моментами инерции. Необходимо построить механическую цепь этой вращательной системы. Первым шагом найдем приведенную к первой оси динамическую систему (рис. 1.16, б). Приведем к первой оси массы: (без изменений остаются  $I_1$  и  $I_2$ )  $I_{(32)1} = I_2 + I_{31} = I_2 + I_3 (1/\eta_1^2)$ , где  $z_2/z_3 = 1/\eta_1$ ,  $I_{(54)1} = I_{41} + I_{51} = I_4 (1/\eta^2) + I_5 (1/\eta^2)$ , где  $z_4/z_5 = 1/\eta_2$ ;  $1/\eta = 1/\eta_1 1/\eta_2$ ;  $I_{61} = I_6 (1/\eta^2)$ . Приведем к первой оси упругости:  $\kappa_1, \kappa_{21} = \kappa_2 (1/\eta^2)$ ;  $\kappa_{31} = \kappa_3 (1/\eta^2)$ . Вторым шагом построим механическую цепь на рис. 1.16, в.

К подобной динамической системе и механической цепи можно привести кинематическую схему (рис. 1.16, з), состоящую из пары зубчатых колес и червячной передачи с инерциями  $I_1, \dots, I_6$  и упругостями  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ .

**Система, состоящая из двух выходных валов, имеющих моменты инерции (разветвленные динамические вращательные системы).** Для построения механической цепи (рис. 1.17, а) системы найдем эквивалентную разветвленную схему, соответствующую

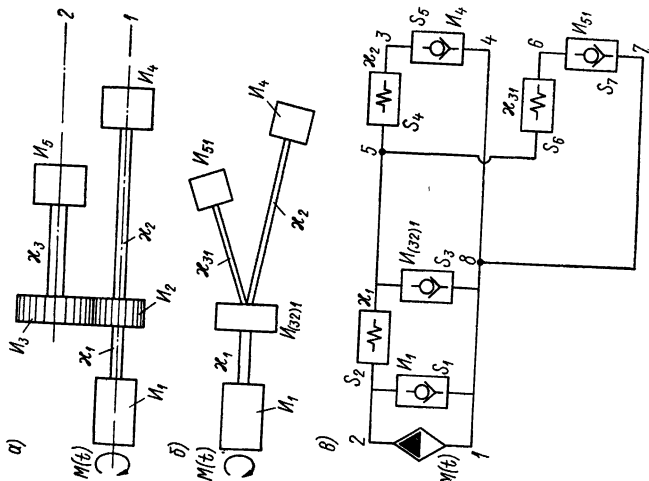


Рис. 1.17 Разветвленная динамическая система

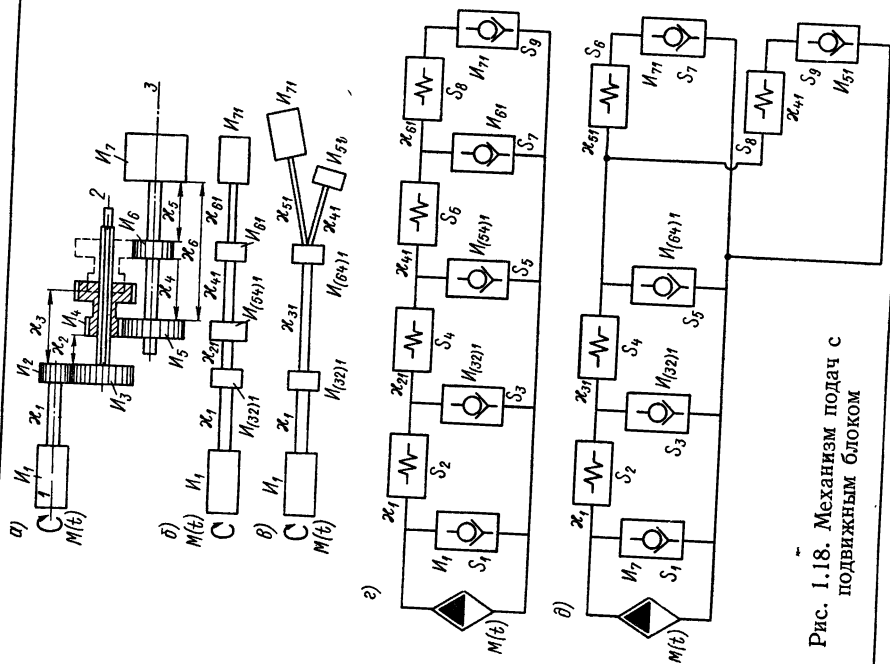


Рис. 1.18. Механизм подачи с подвижным блоком

заданной. Будем вместо моментов инерции  $I_2$  и  $I_3$  иметь приведенный к оси 1 момент инерции  $I_{(32)1} = I_2 + I_3 (1/\eta^2)$ , вместо момента инерции  $I_5$  иметь приведенный к оси 1 момент инерции  $I_{51} = I_5 (1/\eta^2)$ ; вместо упругости  $\kappa_3$  приведенную к оси 1 упругость  $\kappa_{31} = \kappa_3 (1/\eta^2)$ . Моменты инерции  $I_1, I_4$ , а также упругости  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  останутся без изменений. Эта эквивалентная схема (рис. 1.17, б) представляет собой механический четырехполюсник, изображенный на рис. 1.17, в. Действительно, при отсутствии ветви  $I_3 - \kappa_3 - I_5$  механическая цепь представляла бы собой цепь в пределах фигуры 1—4, и только вместо  $S_3$  для  $I_{(32)1}$  надо было бы иметь  $S_3$  для  $I_2$ .

Присоединение новой ветви выполняется так: вводится эквивалентная масса  $I_{(32)1}$ , а затем от точек 5—8 строится дополнительная цепь  $\kappa_{31} - I_{51}$ , соответствующая эквивалентной упругости  $\kappa_3$  и моменту инерции  $I_5$ , присоединенных через колесо  $I_3$  к основной системе (см. гл. 3).

**Редуктор состоящий из трех осей и трех пар рабочих зубчатых колес.** В этом редукторе (рис. 1.18, а) одна пара колес действует как масса, с дискретным изменением угловой скорости. В зависимости от того, какие зубчатые колеса ( $I_5$  или  $I_6$ ) находятся в зацеплении, он имеет разные угловые скорости на валу 3, а также иные ПКС системы и, следовательно, иные частотные характеристики. Рассмотрим два случая.

Случай 1. В зацеплении находятся колеса 4; 5. Моменты инерции колес  $I_4, I_5, I_6$  соизмеримы с  $I_7$ . Построим эквивалентную схему (рис. 1.18, б). По этой схеме построим механическую цепь (рис. 1.18, в). После рассмотренных ряда систем построение этой механической цепи не должно вызвать каких-то трудностей.

Случай 2. В зацеплении находятся колеса  $I_4$  и  $I_6$ . Особенностью построения эквивалентной схемы (рис. 1.18, в) будет то, что от момента инерции  $I_6$  образуются две ветви: одна из них  $\kappa_5 - I_7$ , а другая  $\kappa_4 - I_5$ . Поэтому от момента инерции  $I_{(64)1}$  необходимо построить обе эти ветви, приведенные к 1:  $\kappa_{51}$  и  $I_{71}$ , а также  $\kappa_{41}$  и  $I_{51}$ . Построение механической цепи (рис. 1.18, в) выполняется, как ранее описано.

## 1.6. ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ СКОРОСТИ ИЛИ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Ранее (В.20) и (В.31) были установлены два значения закона Ньютона, которые были выражены уравнениями для силы  $Q = m dv/(dt) = mrv$  и для скорости  $v = 1/m \int Q dt = 1/mQ/p$ .

Формальный смысл этих зависимостей заключается в том, что если при действии силы масса находится в параллельном соединении к ней, то при действии скорости величина обратная массе находится в последовательном соединении. В операционном исчислении это показано знаком  $pv$  для действия силы — диф-

ференциал скорости — параллельное соединение, и знаком  $Q/p$  для действия скорости — интеграл силы — последовательное соединение.

На рис. 1.19, а показана механическая цепь с внешним источником силой  $Q$ ; на последующих рисунках показано построение механической цепи, у которой внешним источником является скорость  $v$ . Обведем штриховым контуром сопротивления  $S_2$  и  $S_3$ , образуя этим самым звено 23. В цепи в последовательном соединении имеются два сопротивления  $S_1$  и  $S_{23}$ . Для действия скорости эти два сопротивления образуют две подвижности  $L_1 = 1/S_1$  и  $L_{23} = 1/S_{23}$ , образующие параллельное соединение (рис. 1.19, б). Так как в звене 23 обе подвижности  $L_2$  и  $L_3$  должны быть последовательны по отношению к сопротивлениям  $S_2$  и  $S_3$  на рис. 1.19, а, получим механическую цепь на рис. 1.19, в. Окончательный вид цепи изображен на рис. 1.19, г.

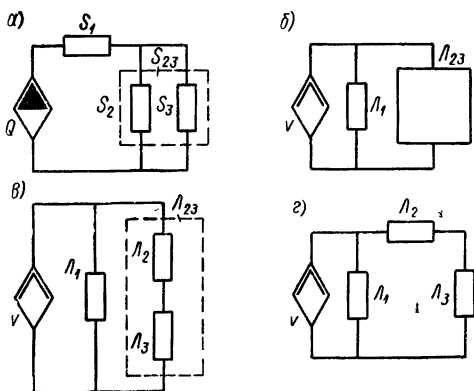


Рис. 1.19. Действие скорости на систему

На рис. 1.20 приводят ся три более сложные механические цепи при действии силы; рядом на этих рисунках показан с учетом данных пояснений окончательный вид механических цепей для действия скорости. Действительно (рис. 1.20, а) звено сопротивления 34 в последовательном соединении превращается (рис. 1.20, б) в звено подвижности 34 в параллельном соединении ( $L_{34}$ ). Сопротивление  $S_2$  по отношению к звену сопротивления 34 находится в параллельном соединении, а под действием скорости подвижность  $L_2$  находится в последовательном соединении по отношению к звену подвижности 34 (рис. 1.20, б). На рис. 1.20, в и рис. 1.20, д и в преобразованных схемах (рис. 1.20, г, е) строго соблюдены рассмотренные правила.

Система, состоящая из массы и упругости (рис. 1.21, а), представляет собой при действии силы параллельное соединение (см. рис. 1.6, г); под действием скорости механическая цепь будет представлять собой последовательное соединение элементов, что изображено на рис. 1.21, б.

**Система, состоящая из упругости, сопротивления и массы.** Упругость  $k$  и сопротивление  $r$  соединены с массой  $m$  и подвижной невесомой платформой (рис. 1.21, в), на которую действует скорость  $\dot{y}(t)$  или кинематическое возбуждение. Для построения механической цепи изображаем последовательную цепь (рис. 1.21, г), состоящую из массы, сопротивления и упругости. Сравнивая

эту цепь с той, что построена для условий, когда действует сила (см. рис. 1.7, *д*), отмечаем соответствие в первом случае параллельного соединения и при действии скорости — последовательного.

**Система, состоящая из двух масс и двух упругостей.** Массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные между собой упругостью  $k_1$  и с подвижной платформой упругостью  $k_2$  (рис. 1.21, *д*).

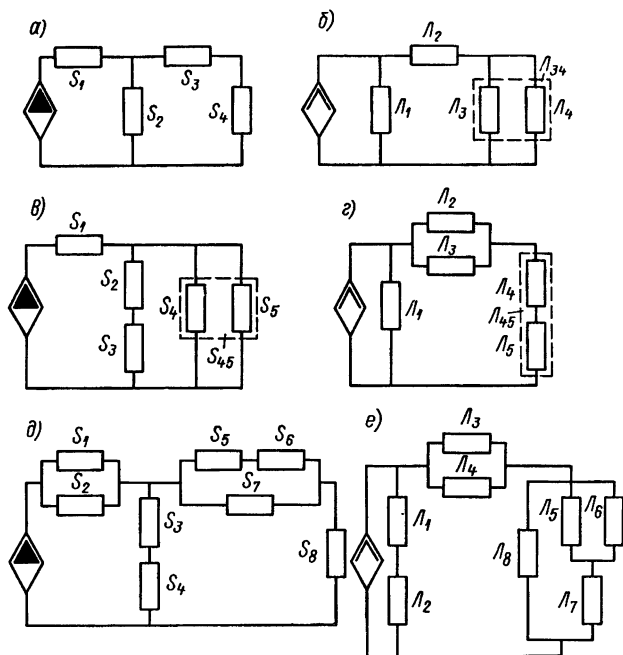


Рис. 1.20. Сложные механические цепи при действии силы и скорости

Для построения механической цепи под действием скорости (см. рис. 1.9, *е*) следует массы  $m_1$ ,  $m_2$  и упругость  $k_2$  расположить в последовательном соединении, а упругость  $k_1$ , соединяющую массы, — в параллельном соединении (рис. 1.21, *е*).

**Система, состоящая из двух масс, двух упругостей и одного сопротивления.** Массы  $m_1$ ,  $m_2$  соединены между собой упругостью  $k_1$  и сопротивлением  $r$ , а масса  $m_2$  соединена упругостью  $k_2$  с подвижной платформой (рис. 1.21, *ж*). Для построения механической цепи под действием  $v$  (см. рис. 1.10, *в*) следует массы  $m_1$ ,  $m_2$  и упругость  $k_2$  расположить в последовательном соединении, а упругость  $k_1$  и сопротивление  $r$  — в параллельном соединении между обеими массами по отношению к источнику скорости, но в последовательном соединении между самими элементами  $k_1$  и  $r$  (рис. 1.21, *з*).

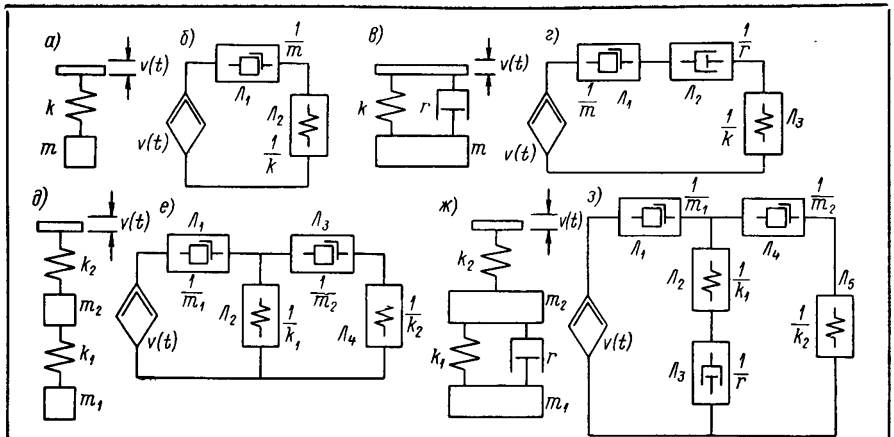


Рис. 1.21. Построение механических цепей при действии скорости

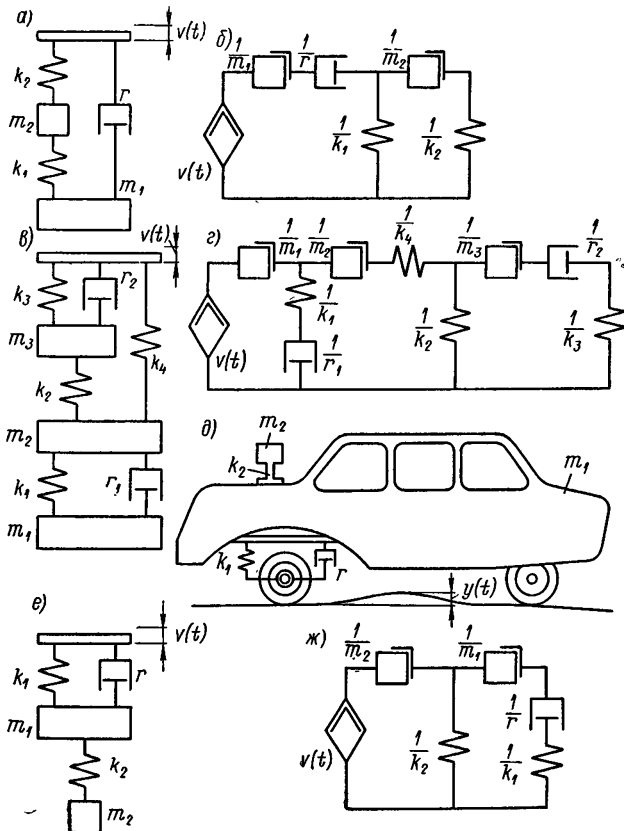


Рис. 1.22. Сложные системы при действии скорости



**Система, состоящая из двух масс, двух упругостей и одного сопротивления.** Массы  $m_1$ ,  $m_2$ , соединенные между собой упругостью  $k_1$  и с подвижной платформой упругостью  $k_2$ ; кроме того, масса  $m_1$  с платформой соединена сопротивлением  $r$  (рис. 1.22, а). При построении механической цепи массы  $m_1$ ,  $m_2$ , сопротивление  $r$  и упругость  $k_2$  будут находиться в последовательном соединении; упругость  $k_1$  (рис. 1.22, б) будет находиться в параллельном соединении по отношению к источнику скорости и включаться между массами.

**Система, состоящая из трех масс, четырех упругостей и двух сопротивлений.** Массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , соединенные между собой и платформой упругостями  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ; кроме того, массы  $m_1$  и  $m_2$  соединены сопротивлением  $r_1$ , а масса  $m_2$  с платформой — сопротивлением  $r_2$  (рис. 1.22, в). При построении механической цепи массы  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  соединяются последовательно, кроме масс последовательно соединяются упругости  $k_3$ ,  $k_4$  и сопротивление  $r_2$ . В параллельную цепь (по отношению к источнику скорости) включается цепь с упругостью  $k_1$  и сопротивлением  $r_1$  и упругость  $k_2$  (рис. 1.22, г).

Характерным примером, когда внешний источник пути (скорости) дополнительно воздействует на элементы системы, является движение автомобиля по дороге с гармоническими неровностями вида  $y(t)$ . Система автомобиля (рис. 1.22, д) упрощенно представляет собой массу  $m_1$ , упругость  $k_1$  и сопротивление (демпфирование)  $r$  рессор; на кузове укреплен на упругости  $k_2$  масса  $m_2$  зеркала, указывающего состояние дороги сзади.

На рис. 1.22, е показана динамическая система, а на рис. 1.22, ж — механическая цепь всей конструкции.

## 1.7. ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛЫ И СКОРОСТИ

**Действие скорости на часть цепи как следствие действия внешнего источника силы.** Пусть дана динамическая система (рис. 1.23, а); на рис. 1.23, б показана находящаяся под действием силы механическая цепь для этой системы. На рис. 1.23, в изображена похожая по структуре динамическая система, но находящаяся под действием скорости; механическая цепь для этой системы показана на рис. 1.23, г.

Рассмотрим новую систему (рис. 1.23, д), состоящую из двух масс и двух упругостей, причем сила  $Q(t)$  воздействует на эту систему через массу  $m_2$ ; механическая цепь для этой системы показана на рис. 1.23, ж. Как будет понятно из содержания гл. 2, а сейчас примем без доказательств, скорость в параллельном звене  $m_2 k_2$  будет скоростью всей системы  $v$ ; эта скорость будет исходной для приведения в движение звена  $k_1 m_1$ , изображенного на рис. 1.23, г. Сравнивая построение цепи на рис. 1.23, е и на рис. 1.23, г, убеждаемся, что перемещение массы  $m_2$  является

как бы перемещением платформы, совершающей гармоническое колебание, для звена  $m_1 k_1$ ; эта часть цепи находится под воздействием скорости платформы (рис. 1.23, е).

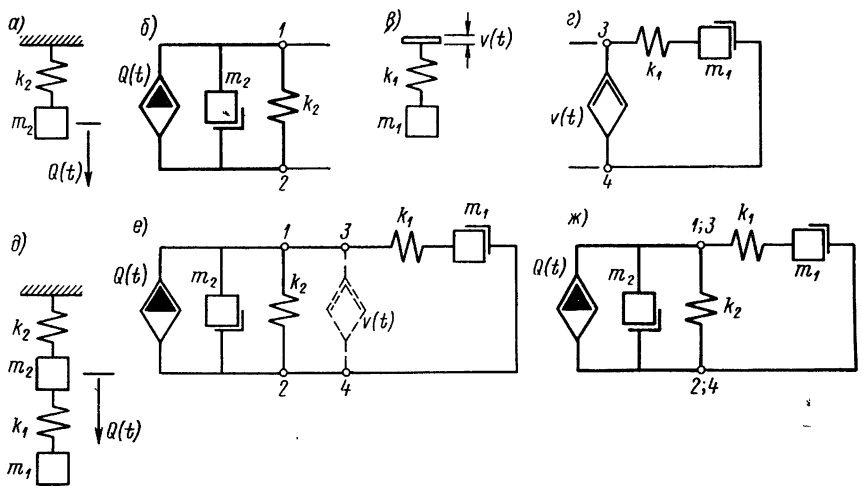


Рис. 1.23. Действие силы и скорости на систему

На рис. 1.24, а показана более сложная динамическая система. Изображенная тонкими линиями часть системы находится под действием внешней силы  $Q(t)$ ; отдельно показана на рис. 1.24, б;

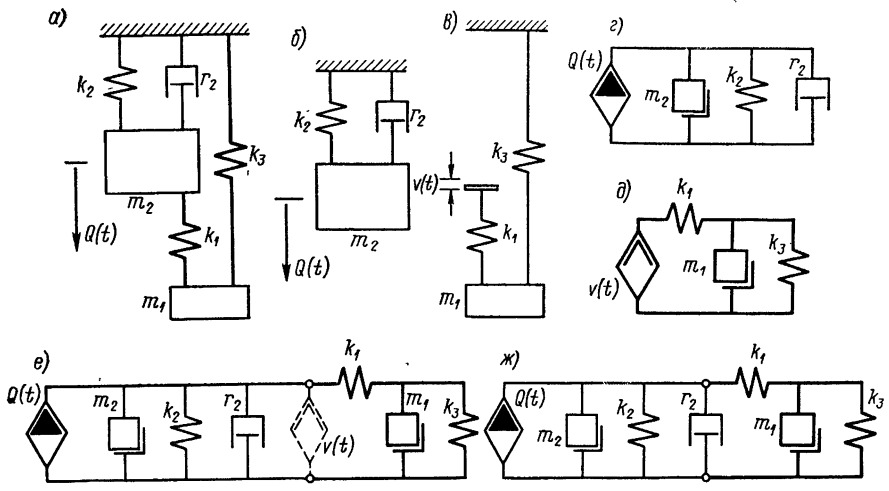


Рис. 1.24. Действие силы и скорости на систему

толстыми линиями показана часть системы, которая приводится в колебательный процесс массой  $m_2$ , выполняющей роль платформы и перемещаемой со скоростью  $v(t)$ ; отдельно показано на

рис. 1.24, в. Соединение частей механической цепи (проекция на рис. 1.24, г, д) приводят к механической цепи (рис. 1.24, е), находящейся как бы под двумя внешними источниками  $Q(t)$  и  $v(t)$ . Окончательная для расчета цепь показана на рис. 1.24, ж.

**Одновременное действие силы и скорости на механическую цепь.** На рис. 1.25, а изображена элементарная динамическая система, состоящая из подвижной невесомой платформы, упругости и массы. Платформа подвергается гармоническому перемещению  $y(t)$ , что соответствует скорости  $v(t) = \dot{y}(t)$ ; на массу действует сила  $Q(t)$ . Построим механическую цепь этой системы (рис. 1.25, б) для внешнего источника  $v(t)$  или в несколько ином виде, удобном для дальнейшего использования на рис. 1.25, в:

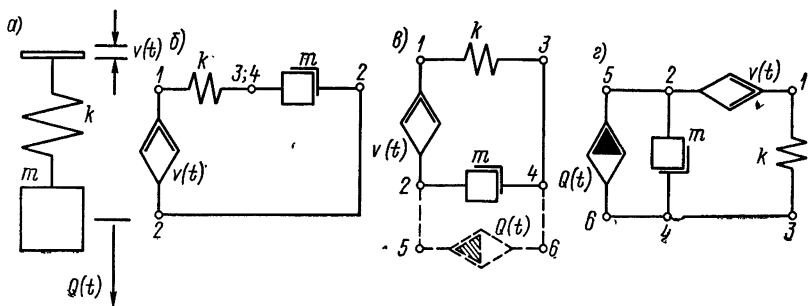


Рис. 1.25. Понятие одновременного действия силы и скорости на систему (цифрами у полюсов показан порядок соединения элементов)

цепь представляет собой последовательное соединение элементов. Если бы платформа была бы неподвижной, т. е. отсутствовало бы влияние  $y(t)$ , то колебательный процесс мог быть осуществлен от силы  $Q(t)$ . Соединим обе механические цепи и получим окончательную механическую цепь (рис. 1.25, г), когда действуют оба внешних источника; естественно, что между полюсами 5; 6 следует разместить источник силы, между 1 и 2 — скорости; точка 3; 4 (рис. 1.25, б) растягивается в линию 3—4 (рис. 1.25, в).

Более сложная динамическая система, на которую воздействует сила и скорость одновременно показана на рис. 1.26, а.

Электровоз движется по рельсам с высотой неровности  $y$ , вызывающей благодаря вертикальной подвеске  $k_1 r$  колебания электровоза; внутри электровоза на жесткой раме расположена динамическая система  $k_2 m_2$ , причем на массу передается сила  $Q(t)$ . Необходимо построить механическую цепь этой сложной системы (рис. 1.26, б). Для такой системы проще построить механическую цепь, считая электровоз неподвижным, когда отсутствует источник скорости  $v(t)$ , а существует только источник силы  $Q(t)$ ; начало этой цепи показано на рис. 1.26, в, а вся цепь — на рис. 1.26, г. Перестроим эту цепь для источника скорости, при этом  $Q = 0$ . Теперь необходимо ввести действие силы  $Q(t)$  на

массу  $m_2$ . Механическая цепь для действия обоих источников энергии показана на рис. 1.26, д.

Рассмотрим системы, находящиеся под действием скорости, но имеющие дополнительные связи. На рис. 1.27, а, в, д показаны системы, у которых имеется или дополнительная подвеска с неподвижной поверхностью (рис. 1.27, а, в), или вся система имеет подвеску к непо-

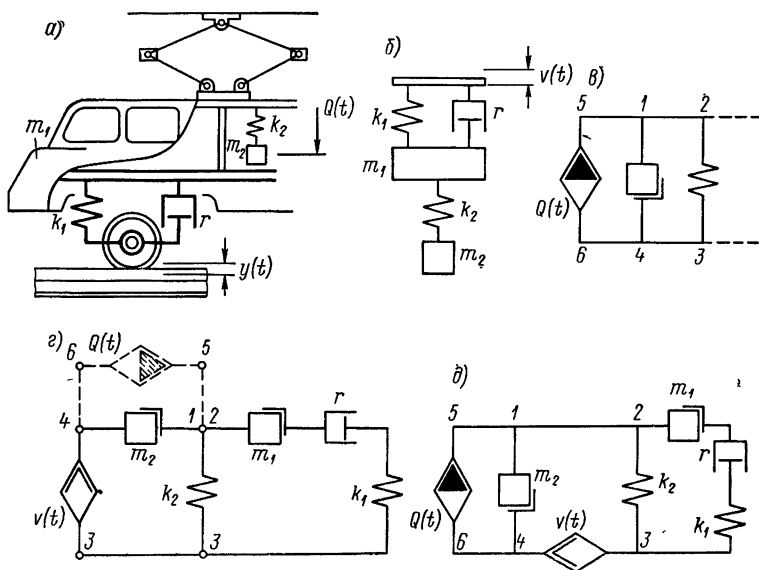


Рис. 1.26. Упрощенная динамическая система электровоза

движной плоскости, но на систему оказывает влияние кинематическое (рис. 1.27, д) воздействие в виде скорости гармонического перемещение  $y(t)$ . Обратив внимание на ранее приведенные рассуждения, можно при построении механической цепи проделать следующее: в случае системы (рис. 1.27, а), если бы отсутствовало сопротивление  $r$ , то цепь состояла бы из двух последовательно соединенных элементов  $k$  и  $m$ ; введение сопротивления  $r$  можно отождествить с введением силы  $Q(t)$ , действующей на массу, что влечет образование (при отсутствии элемента  $k$ ) схемы, включающей  $Q(t) - r - m$ ; при отсутствии силы  $Q(t)$  сопротивление  $r$  остается в параллельном соединении с массой  $m$  (рис. 1.27, б). Система, состоящая из сопротивления  $r$  и массы  $m$  (рис. 1.27, в), находится под воздействием скорости; к этой системе добавляется упругость  $k$ , второй полюс которой неподвижен. Если бы на эту систему действовала сила (на рис. 1.27, г показано пунктиром), то построение цепи было бы вполне ясным; вводя символ скорости, получим схему цепи; другими словами, элемент  $k$  в цепи вписывается параллельно источнику скорости. Соединение двух

рассмотренных схем (рис. 1.27, а, в) отражено на рис. 1.27, д; на рис. 1.27, е пунктиром показано подключение источника силы. В элементарной цепи, состоящей из сопротивления  $r_1$  и массы  $m$ ,

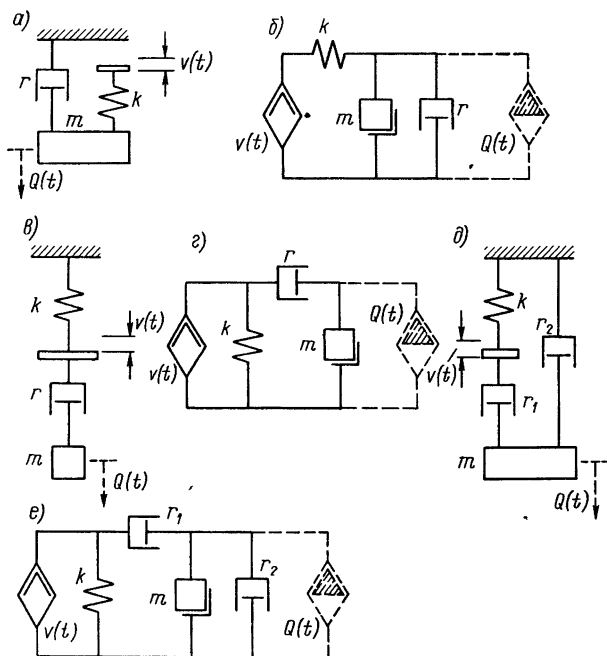


Рис. 1.27. Связанные системы при действии скорости

соединенных последовательно при действии скорости, упругость  $k$ , соединенная с неподвижной поверхностью, располагается параллельно источнику скорости, а сопротивление  $r_2$  — параллельно массе  $m$ .

### 1.8. ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ РЫЧАЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Системы рычажные, имеющие неподвижные точки поворота.** Эти системы являются частным видом вращательного движения, когда предполагается поворот рычага на незначительный угол и проекция повернутого рычага, например, на  $Ox$ , остается неизменной, а угол поворота  $\alpha$  близок к нулю ( $\alpha \approx 0^\circ$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ). Таким образом, как допущение, принимается перемещение при повороте рычага как поступательное.

Рассмотрим рычаг первого рода (рис. 1.28, а) и определим комплексное сопротивление  $S$  этой системы. Если  $Q$  — действующая сила, а  $F$  — реакция на эту силу, то

$$Q\lambda_1 = F\lambda_2. \quad (1.25)$$

Из уравнения (В.24) можно написать

$$F = S_1 v_1. \quad (1.26)$$

Подставляя (1.26) в (1.25), получим

$$Q \lambda_1 = S_1 v_1 \lambda_2. \quad (1.27)$$

Перемещения  $y$  и  $y_1$  концов рычага в зависимости от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут

$$y/y_1 = \lambda_1/\lambda_2 \text{ и } \dot{y}/\dot{y}_1 = v/v_1 = \lambda_1/\lambda_2, \quad (1.28)$$

отсюда

$$v_1 = \lambda_2/\lambda_1 v = \eta v, \quad (1.29)$$

здесь  $\eta = \lambda_2/\lambda_1$  — передаточное число рычага.

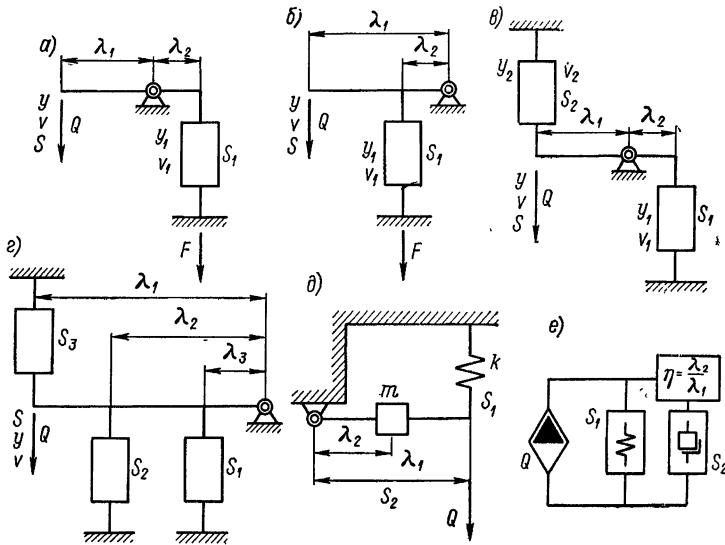


Рис. 1.28. Понятие о рычажных системах с точкой опоры

Подставляя (1.29) в (1.27), имеем  $Q \lambda_1 = S_1 \lambda_2 (\lambda_2/\lambda_1 v) = S_1 \lambda_2^2/\lambda_1 v$ , отсюда  $S = Q/v = (S_1 \lambda_2^2/\lambda_1^2 v)$ :  $v = S_1 \eta^2$ .

Итак,

$$S = S_1 \eta^2. \quad (1.30)$$

Пример 1. Пусть вместо сопротивления  $S_1$  в общем виде имеется пружина ( $S_1 = k/(j\omega)$ ) и  $k = 1000$  кгс/м;  $\lambda_1 = 10$  см,  $\lambda_2 = 30$  см. Из уравнения (1.30)

$$S = S_1 \eta^2 = k/(j\omega) \eta^2 = 1000/(j\omega) (3/1)^2 = -j9000/\omega \text{ кгс}\cdot\text{с/м}.$$

Рассмотрим рычаг второго рода (рис. 1.28, б) и определим комплексное сопротивление  $S$  этой системы. Используя предыдущие обозначения и (1.25), (1.26) и зная, что  $\dot{y} \lambda_2 = \dot{y}_1 \lambda_1$ ;  $Q \lambda_1 = S_1 v_1 \lambda_2 = S_1 \lambda_2 (\lambda_2/\lambda_1 v)$ , получим  $S = Q/v = (S_1 \lambda_2^2/\lambda_1^2 v)$ :  $v = S_1 \eta^2$ .

Другими словами, формула (1.30) действительна для рычажной системы первого и второго родов.

Рассмотрим два более общих случая, когда для рычага первого рода по направлению действия внешней силы расположено дополнительное сопротивление  $S$  (рис. 1.28, в). Опуская выводы, можно написать что ПКС системы

$$S = S_2 + S_1\eta^2. \quad (1.31)$$

Для рычага второго рода рассмотрим более сложную систему, когда имеются два сопротивления  $S_1$  и  $S_2$  и третье сопротивление  $S_3$ , расположенное по направлению действия внешней силы  $Q$  (рис. 1.28, г). Примем  $\eta_1 = \lambda_3/\lambda_1$  и  $\eta_2 = \lambda_2/\lambda_1$ , тогда окончательно  $S = S_3 + S_2\eta_2^2 + S_1\eta_1^2$ .

Пример 2. Дана рычажная система второго рода (рис. 1.28, д), состоящая из массы  $m$  и упругости  $k$  и имеющая соотношение плеч рычага  $\lambda_2 : \lambda_1 = \eta$ . Пусть  $m = 1$  кгс·с<sup>2</sup>/м = 1 кг;  $k = 1000$  кгс/м;  $\lambda_2 : \lambda_1 = 1 : 3$ ;  $\eta = 1/3$ .

Согласно уравнениям (1.31) и (В.24) получим, что ПКС системы

$$S = S_1 + S_2\eta^2 = \frac{k}{j\omega} + (j\omega m)\eta^2 = j\left(\omega m\eta^2 - \frac{k}{\omega}\right);$$

$$S = j\left(\frac{\omega^2 m\eta^2 - k}{\omega}\right) = j\left(\frac{\omega^2 \cdot \frac{1}{9} - 1000}{\omega}\right) = j\left(\frac{\omega^2 - 9000}{9\omega}\right).$$

На рис. 1.28, е представлена механическая цепь рычажной системы с передаточным числом  $\eta$ .

Рассмотрим способы построения механических цепей для рычажных систем, имеющих неподвижные точки поворота системы. Вначале следует оговориться, что изображенные на рис. 1.29, а—е динамические системы имеют одинаковую механическую цепь при условии, что величина  $\eta$  равна 1 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ). Приложение массы к точке 1 или 2 (рис. 1.29, б, в) не изменяет существа построенной механической цепи (см. рис. 1.6, г).

Более сложная динамическая система, показанная на рис. 1.29, ж, представляет собой массы  $m_1$ ,  $m_2$  и упругости  $k_1$ ,  $k_2$ . По существу эта система с двумя степенями свободы и ее механическая цепь построена ранее (см. рис. 1.9, г). В рычажной системе величина  $\eta$  может быть отличной от единицы; в таком случае следует учитывать значение передаточного числа, что учитывается особым знаком с простановкой в нем величины  $\eta$  (при  $\eta \neq 1$ ). Следующая далее ветвь  $m_2 - k_1 - m_1$ , как это видно из рис. 1.29, з, находится за знаком с величиной  $\eta$  и при дальнейших расчетах подпадает под влияние этого знака.

Интересной особенностью является следующее: допустим в точке 1 рычага расположена масса  $m_3$ , в таком случае в механической

цепи эту массу следует расположить рядом с массой  $m_2$ , но масса  $m_3$  не попадает под влияние значения  $\eta$ . При условии, что  $\eta = 1$  учитывать передаточное число не нужно и в параллельной цепи оказываются две массы  $m_2$  и  $m_3$ , которые согласно теореме 6 имеют

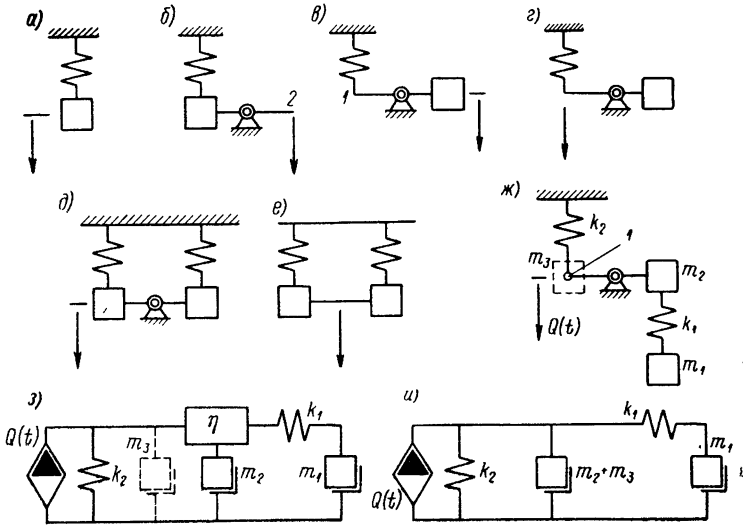


Рис. 1.29. Простейшие рычажные системы с точкой опоры

ЧКС  $S = S_2 + S_3 = j\omega (m_2 + m_3)$  и массы складываются. Это обстоятельство показано в изображенной механической цепи на рис. 1.29, *z*.

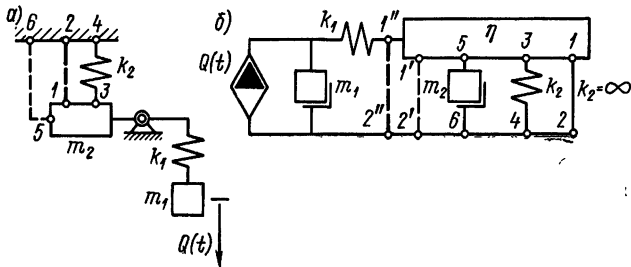


Рис. 1.30. Сложные рычажные системы с точкой опоры

Рассмотрим несколько примеров на построение механических цепей. Дана динамическая рычажная система первого порядка (рис. 1.30, *a*) с двумя степенями свободы. Сила  $Q(t)$  действует на массу  $m_1$ . Масса  $m_2$  с неподвижной поверхностью соединена через полюсы 3—4 упругостью  $k_2$ . Через полюсы 1—2 эта масса  $m_2$  жестким стержнем соединяется с неподвижной поверхностью. На механической цепи (рис. 1.30, *б*) поэтому показаны два возмож-



ных варианта построения: при наличии упругости  $k_2$  в цепи, эта упругость построена между точками 3—4; естественно, стержень 1—2 отсутствует; при условии, когда  $k_2 = \infty$ , иными словами, масса и неподвижная поверхность соединены жестко; поэтому упругости  $k_2$  в цепи не будет; не будет также и массы с полюсами 5—6. Жесткий стержень 1—2 может быть изображен перед массой в виде линии 1'—2'; однако при слиянии массы  $m_2$  с неподвижной

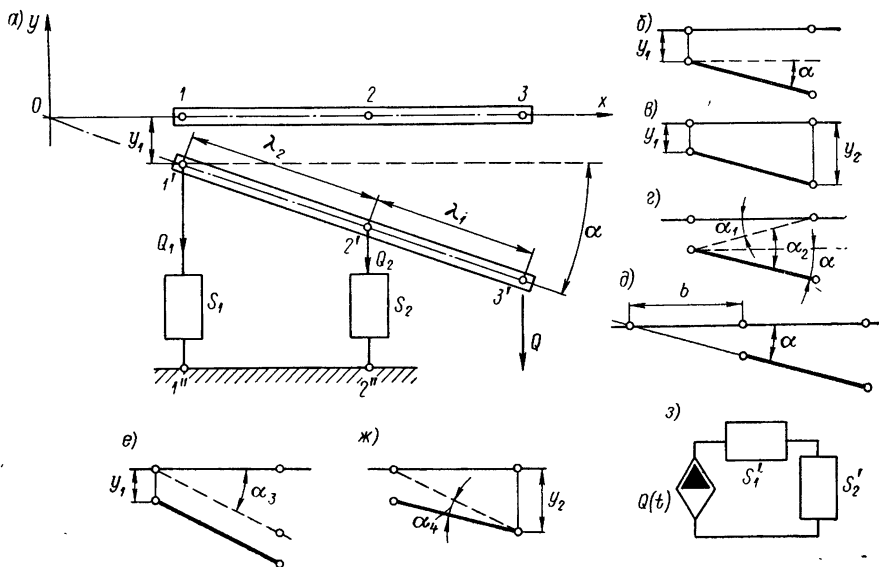


Рис. 1.31. Понятие о системах, не имеющих неподвижной точки поворота

поверхностью рычаг свои функции также не выполняет и передаточного отношения не существует: цепь от источника силы  $Q(t)$  замыкается по линии 1''—2''.

**Система рычажная, не имеющая неподвижной точки поворота (рис. 1.31, а, б).** Эта система отличается от предыдущей наличием двух степеней свободы. Для расчетов такой системы нужно иметь две независимые координаты; представленные шесть случаев имеют следующие возможности: 1)  $y_1, \alpha$ ; 2)  $y_1, y_2$ ; 3)  $\alpha_1, \alpha_2$ ; 4) общий центр поворота на расстоянии  $b, \alpha$ ; 5)  $y_1, \alpha_3$ ; 6)  $y_2, \alpha_4$ . Пусть дан рычаг 1—3, расположенный условно вдоль оси  $Ox$ ; этот рычаг под действием силы  $Q(t)$ , связанный с двумя сопротивлениями  $S_1$  и  $S_2$ , занимает положение 1'—3'. Определим зависимости, связанные с независимыми координатами и нагрузками. Рассмотрим первый случай для условия  $(y_1, \alpha)$ , т. е. перемещение рычага на величину  $y_1$ , а затем поворот его на угол  $\alpha$  вокруг точки 1'.

Напишем уравнение сил: для сопротивления  $S_1$   $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 \dot{y}_1 = S_1 p y_1$ ; для сопротивления  $S_2$   $Q_2 = S_2 v_1 = S_2 \dot{y}_1 = S_2 p y_1$ . В переносном перемещении на величину  $y_1$  сила будет

$Q_{12} = Q_1 + Q_2 = py_1(\bar{S}_1 + S_2)$ . К этой нагрузке необходимо прибавить силу поворота на угол  $\alpha$   $Q_3 = S_2\lambda_2\alpha = S_2\lambda_2\rho\alpha$ .

Общее уравнение сил

$$Q = Q_{12} + Q_3 = py_1(S_1 + S_2) + S_2\lambda_2\rho\alpha. \quad (1.32)$$

Напишем уравнение моментов относительно точки  $I'$ : момент при повороте

$$Q_3\lambda_2 = S_2\lambda_2\rho\alpha\lambda_2 = S_2\lambda_2^2\rho\alpha;$$

момент при перемещении сопротивления  $S_2$  на величину  $y_1$

$$Q_2\lambda_2 = S_2py_1\lambda_2.$$

Общее уравнение моментов

$$Q(\lambda_1 + \lambda_2) = S_2\lambda_2^2\rho\alpha + S_2py_1\lambda_2. \quad (1.33)$$

Итак, уравнение сил (1.32) и уравнение моментов (1.33) позволяют использовать координаты  $y_1$  и  $\alpha$  через силу  $Q$ , размеры рычага  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также комплексные сопротивления  $S_1$  и  $S_2$ .

Точно также можно проанализировать и другие независимые координаты по пяти схемам (рис. 1.31, *в, г, д, ж, е*).

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 1.31, *в*.

Для точки  $2'$   $y_2 = y_1 + \lambda_2\alpha$  и  $py_2 = py_1 + \lambda_2\rho\alpha$ .

Из (1.33) имеем

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1 + \lambda_2) &= S_2^2\lambda_2^2\rho\alpha + S_2py_1\lambda_2 = \\ &= S_2\lambda_2(py_1 + \lambda_2\rho\alpha); \\ Q(\lambda_1 + \lambda_2) &= S_2\lambda_2py_2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Из (1.32)

$$\begin{aligned} Q &= py_1(S_1 + S_2) + S_2\lambda_2\rho\alpha = S_1py_1 + \\ &+ S_2py_1 + S_2\lambda_2\rho\alpha; \end{aligned}$$

$$Q = S_1py_1 + S_2(py_1 + \lambda_2\rho\alpha) = S_1py_1 + S_2py_2. \quad (1.35)$$

Из уравнений (1.34) и (1.35) найдем координаты  $y_1$  и  $y_2$ .

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 1.31, *г*,  $y_1 = \lambda_2\alpha_1$ ;  $y_2 = \lambda_2\alpha_2$ ;  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ .

$$py_1 = \lambda_2\rho\alpha_1; \quad py_2 = \lambda_2\rho\alpha_2. \quad (1.36)$$

Если заменить  $y_1$  и  $y_2$  в уравнениях (1.34) и (1.35) на значения (1.36), получим

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1 + \lambda_2) &= S_2\lambda_2py_2 = S_2\lambda_2(\lambda_2\rho\alpha_2) = \\ &= S_2\lambda_2^2\rho\alpha_2; \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$Q = S_1py_1 + S_2py_2 = S_1\lambda_2\rho\alpha_1 + S_2\lambda_2\rho\alpha_2. \quad (1.38)$$

Определим  $\alpha_2$  из (1.37)

$$\alpha_2 = \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)}{S_2 \lambda_2^2 p} = \frac{Q}{\frac{p S_2 \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}} = \frac{Q}{\frac{p S_2}{\frac{\lambda_2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2}}};$$

$$\alpha_2 = \frac{Q}{\frac{p S_2}{1/\lambda_2 + \lambda_1/\lambda_2^2}} = 1/\lambda_2 (1 + \lambda_1/\lambda_2) Q/(p S_2) =$$

$$= Q(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2^2 p S_2). \quad (1.39)$$

Определим  $\alpha_1$  из (1.38)  $Q = S_1 \lambda_2 p \alpha_1 + S_2 \lambda_2 p \alpha_2$ ;  
 $Q = S_1 \lambda_2 p \alpha_1 + S_2 \lambda_2 p [1/\lambda_2 (1 + \lambda_1/\lambda_2) Q/(p S_2)].$

Можно написать и так

$$Q = S_1 \lambda_2 p \alpha_1 + S_2 \lambda_2 p [Q(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2^2 p S_2)] =$$

$$= S_1 \lambda_2 p \alpha_1 + Q(\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_2.$$

$$Q \lambda_2 = S_1 \lambda_2^2 p \alpha_1 + Q \lambda_1 + Q \lambda_2; \quad -Q \lambda_1 = S_1 \lambda_2^2 p \alpha_1;$$

$$\alpha_1 = -\lambda_1 Q/(\lambda_2^2 p S_1). \quad (1.40)$$

Найдем комплексное сопротивление  $S$  в месте приложения силы  $Q$ . Если под силой  $Q$  перемещение равно  $y$ , то

$$\alpha = (y - y_1)/(\lambda_1 + \lambda_2) = (y_2 - y_1)/\lambda_2. \quad (1.41)$$

Уравнение моментов относительно точки  $2'$  и  $1'$

$$\left. \begin{aligned} Q \lambda_1 &= -S_1 p y_1 \lambda_2; \quad y_1 = -\lambda_1 Q/(\lambda_2 p S_1); \\ Q(\lambda_1 + \lambda_2) &= S_2 p y_2 \lambda_2; \quad y_2 = Q(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2 p S_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Подставим значения (1.42) в (1.41)

$$\alpha = [y - (-\lambda_1 Q/(\lambda_2 p S_1))]/(\lambda_1 + \lambda_2) =$$

$$= [Q(\lambda_1 + \lambda_2)/(\lambda_2 p S_2) - (-\lambda_1 Q/(\lambda_2 p S_1))]/\lambda_2;$$

$$\lambda_2 y + \frac{\lambda_1 Q}{p S_1} = \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_2 p S_2} + \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_2 p S_1} (\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$\lambda_2 y = \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_2 p S_2} + \frac{\lambda_1 Q}{p S_1} \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} - 1 \right) = \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_2 p S_2} + \frac{\lambda_1^2 Q}{\lambda_2 p S_1};$$

имея в виду, что  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} - 1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ;

$$y = \left[ \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} \right)^2 1/(p S_2) + (\lambda_1/\lambda_2)^2 1/(p S_1) \right] Q;$$

$$S = Q/v = Q/\dot{y} = Q/(p y) =$$

$$= \left\{ \frac{1}{[(\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_2]^2 1/(p S_2) + (\lambda_1/\lambda_2)^2 1/(p S_1)} \right\} 1/p;$$

$$S = \frac{1}{[(\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_2]^2 1/S_2 + (\lambda_1/\lambda_2)^2 1/S_1} =$$

$$= \frac{1}{1/S_2' + 1/S_1'} = \frac{1}{(S_1' + S_2')/(S_1'S_2')};$$

$$S = S_1'S_2'/(S_1' + S_2'). \quad (1.43)$$

По структуре этой формулы можно заключить, что комплексное выходное сопротивление свободного рычага можно сравнить с последовательным соединением в данном случае двух элементов

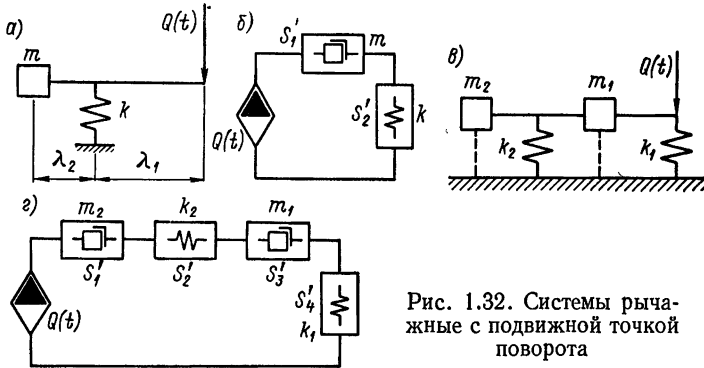


Рис. 1.32. Системы рычажные с подвижной точкой поворота

с сопротивлениями  $S_1'$  и  $S_2'$  (рис. 1.31, з). Из-за масштабного коэффициента, образуемого плечами рычага  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  эти сопротивления имеют следующие поправки

$$S_2' = [\lambda_2^2/(\lambda_1 + \lambda_2)^2] S_2; \quad S_1' = (\lambda_2^2/\lambda_1^2) S_1. \quad (1.44)$$

**Система рычажная, с подвижной точкой поворота, состоящая из массы и упругости (рис. 1.32, а).** Из уравнения (1.43) имеем

$$S = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2/\lambda_2^2 1/S_2 + (\lambda_1/\lambda_2)^2 1/S_1} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2/\lambda_2^2 j\omega/k + (\lambda_1/\lambda_2)^2 1/(j\omega m)};$$

$$S = \frac{j\omega m \lambda_2^2}{(j\omega)^2 m/k (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_1^2} = (\lambda_2/\lambda_1)^2 \frac{j\omega m}{1 - (\omega/\omega_0)^2 [(\lambda_1 + \lambda_2)/\lambda_1]^2},$$

здесь  $S_1 = j\omega m$ ;  $S_2 = k/(j\omega)$ ;  $k/m = \omega_0^2$ .

Случай 1. При очень низких частотах пружина не деформируется и система ведет себя так, как при рычаге первого рода на неподвижной опоре (см. рис. 1.28, а), при  $S = S_1\eta^2$ , где  $\eta = \lambda_2/\lambda_1$ ; в этом случае  $k = \infty$ ;  $S = j\omega m\eta^2$ ; если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то

$$S = j\omega m. \quad (1.45)$$

Случай 2. При очень высоких частотах масса почти неподвижна и система ведет себя как при рычаге второго рода за счет

деформации пружины (см. рис. 1.28, б), при этом  $S = S_2 \eta^2$ , где  $\eta = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ ,

$$S = k / (j\omega) [\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)]^2; \text{ если } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{ то}$$

$$S = k / (j\omega) (1/2)^2 = k / (j4\omega). \quad (1.46)$$

На рис. 1.32, в показана более сложная рычажная система, не имеющая неподвижной точки поворота, и ее механическая цепь (рис. 1.32, з). Подобные системы имеют отношение к механическим фильтрам, и они будут рассмотрены в гл. 5.

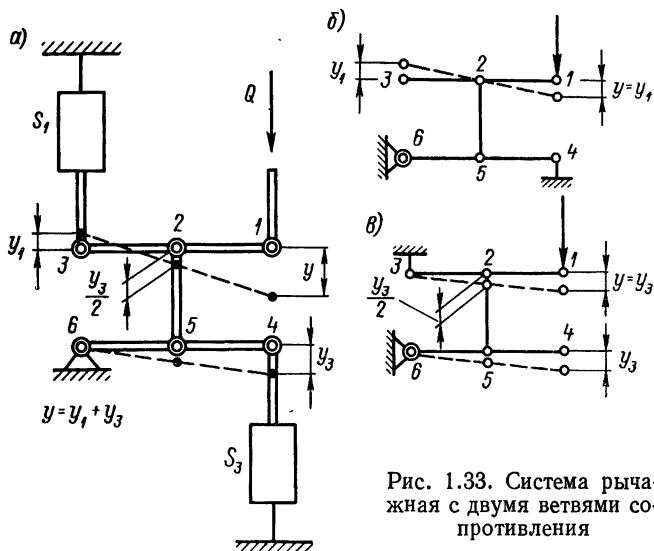


Рис. 1.33. Система рычажная с двумя ветвями сопротивления

**Система рычажная поступательная, в которой одновременно действуют две и более ветвей сопротивлений.** Представим себе невесомую, но жесткую рычажную систему (1—6), имеющую точку поворота 6, соединительный рычаг 2—5, точки 3—4, присоединенные к сопротивлениям  $S_1$  и  $S_3$ , точку 1, к которой приложена сила  $Q$  (рис. 1.33, а). Действие силы  $Q$  передается в точки 3 и 4 и вызывает реакции в сопротивлениях  $S_1$  и  $S_3$ . Малое линейное перемещение  $y$  в точке 1 под действием силы  $Q$  равно векторной сумме перемещений  $y_1$  и  $y_3$  в точках 3 и 4:  $y = y_1 + y_3$ . Скорости в этих точках будут  $\dot{y} = \dot{y}_1 + \dot{y}_3$ . Если в системе скорости складываются, то это соответствует последовательному соединению механической цепи, что вызывает сопротивление  $S = S_1 S_3 / (S_1 + S_3)$ .

Случай 1. Если  $S_3 = \infty$  (рис. 1.3, б), то в точке 4 не может быть движения и система ведет себя так, как будто точки 1 и 3 соединены между собой:  $y = y_1$ .

Случай 2. Если  $S_1 = \infty$  (рис. 1.33, в), то в точке 3 не может быть движения и система ведет себя так, будто точки 1 и 4 соединены между собой:  $y = y_3$ .

При дифференциальном движении точка 1 перемещается на величину  $y = y_1 + y_3$ , точка 4 — на величину  $y_3$ ; точки 5 и 2 — на величину  $y_3/2$ ; точка 3 — на величину  $y_1$  (плечи равные).

Подобный механизм можно использовать для изображения последовательных и параллельных ветвей цепи. Если обе точки 3; 6 представляют собой опоры, то можно рассматривать последовательную ветвь системы, проходящую по линии действия силы  $Q$  и сопротивления  $S_3$ , при этом  $S = S_3$ . Если шарнир 3 сделать

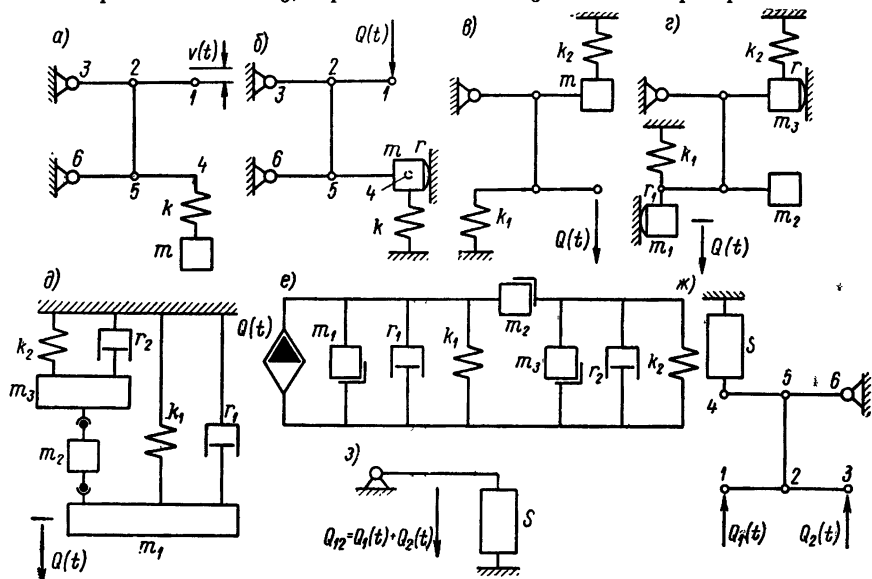


Рис. 1.34. Конструктивные решения рычажных систем

подвижным и к точкам 3 и 4 присоединить два разных сопротивления, то в шарнире 1 необходимо приложить силу, суммирующую оба сопротивления двух ветвей. При рассмотрении схемы (рис. 1.34, а) очевидно, что эта схема одинакова со схемой на рис. 1.21, а, и механическая цепь соответствует рис. 1.21, б. Динамическая схема на рис. 1.34, б соответствует схеме на рис. 1.7, а, и механическая цепь должна быть изображена одинаковой с рис. 1.7, д. Динамическая схема по рис. 1.34, в соответствует схеме на рис. 1.8, а, и ее механическая цепь будет соответствовать рис. 1.8, в. Более сложная рычажная система изображена на рис. 1.34, г и может быть перестроена в динамическую систему на рис. 1.34, д. Механическая цепь этой системы изображена на рис. 1.34, е.

На рис. 1.34, ж показана рычажная система, когда в точке 4 приложено сопротивление  $S$ , а внешние силы  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$  приложены в точках 1 и 3. Эта система может быть преобразована в изображенную на рис. 1.34, з, построение которой показано на рис. 1.28, д.

## МЕХАНИЧЕСКИЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

## 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНЫХ И ЧАСТНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

ПКС является функцией от частот, действующих в системе, и показывает степень напряженности в преодолении динамической системой той нагрузки, которая действует на нее. При наличии в системе  $r$  сопротивлений ПКС будет иметь комплексное значение типа  $S = a_1 + ja_2$ ; при отсутствии их — вещественное значение типа  $S = a_1$ .

ЧКС выражаются отношением нагрузки (силы)  $Q_i(t)$  к комплексной скорости  $v_i(t)$ , действующих в звеньях или элементах системы.

Определение ЧКС и ПКС является первой ступенью в подготовке данных для нахождения сил и скоростей.

**Система (см. рис. 1.6, а), состоящая из массы и упругости.** На рис. 1.6, г, д изображена механическая цепь, в которой оба элемента соединены параллельно. На основании (В.24) можем написать, что для данной цепи, состоящей из двух элементов, ЧКС будут:  $S_1 = j\omega m$  для массы и  $S_2 = -j(k/\omega)$  — для упругости. ПКС этой цепи будет  $S = S_1 + S_2$  (см. рис. 1.4). Подставляя вместо  $S_1$  и  $S_2$  их ЧКС, определим

$$S = j(\omega m - k/\omega) = j[(\omega^2 m - k)/\omega]. \quad (2.1)$$

**Система, состоящая из массы и двух упругостей (см. рис. 1.8 а).** Сила  $Q(t)$  действует на свободный полюс упругости  $k_1$ . Механическая цепь представлена на рис. 1.8, г и показывает, что сопротивления  $S_2$  и  $S_3$ , представляющие собой звено  $S_{23}$  (оно обведено штриховой линией), соединены между собой параллельно, а элемент  $S_1$  соединен со звеном  $S_{23}$  последовательно. ЧКС элементов будут следующие:  $S_1 = -jk_1/\omega$ ;  $S_2 = j\omega m$ ;  $S_3 = -jk_2/\omega$ , ЧКС звена  $S_{23} = S_2 + S_3$ ; ПКС системы будет  $S = S_1 S_{23}/(S_1 + S_{23})$ .

Подставляя вместо  $S_1$  и  $S_{23}$  значение элементов, найдем

$$S_{23} = S_2 + S_3 = j\omega m - j\frac{k_2}{\omega} = j\left(\omega m - \frac{k_2}{\omega}\right) = j\left(\frac{\omega^2 m - k_2}{\omega}\right).$$

$$S = \frac{S_1 S_{23}}{S_1 + S_{23}} = \frac{S_1 (S_2 + S_3)}{S_1 + (S_2 + S_3)} = \frac{-j \frac{k_1}{\omega} \left( j\omega m - j \frac{k_2}{\omega} \right)}{-j \frac{k_1}{\omega} + j\omega m - j \frac{k_2}{\omega}}$$

Действия с  $j$  будут справедливы, если вспомним, что  $jj = j^2 = = (\sqrt{-1})^2 = -1$ ;  $j(-j) = -j^2 = -(\sqrt{-1})^2 = +1$ , поэтому в первом случае следует перед новым выражением поставить знак минус, во втором случае — знак плюс

$$S = \frac{\left( -j^2 k_1 m + j^2 \frac{k_1 k_2}{\omega^2} \right) \omega}{-jk_1 + j\omega^2 m - jk_2} = \frac{k_1 m \omega^2 - k_1 k_2}{-j\omega (k_1 - \omega^2 m + k_2)};$$

$$S = j \frac{k_1 (m\omega^2 - k_2)}{\omega [(k_1 + k_2) - \omega^2 m]}; \quad S = j \left( \frac{k_1 [m\omega^2 - k_2]}{\omega [k_1 + k_2 - \omega^2 m]} \right). \quad (2.2)$$

**Система, состоящая из массы, упругости и сопротивления** (рис. 2.1, а). Из механической цепи (рис. 2.1, б) видно, что

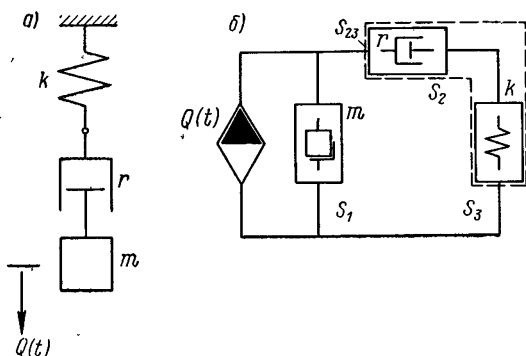


Рис. 2.1. Система  $m-r-k$ , когда сила действует на массу

звено  $S_{23}$  состоит из двух элементов в последовательном соединении, а для образования ПКС системы элемент  $S_1$  и звено  $S_{23}$  составляют параллельное соединение. Итак, ЧКС элементов будут  $S_1 = j\omega m$ ;  $S_2 = r$ ;  $S_3 = -jk/\omega$ , ЧКС звена  $S_{23}$  будет (1.10)

$$S_{23} = \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3} = \frac{r \left( -j \frac{k}{\omega} \right)}{r + \left( -j \frac{k}{\omega} \right)} = \frac{-jkr}{r\omega - jk}. \quad (2.3)$$

ПКС системы

$$S = S_1 + S_{23} = j\omega m + \frac{-jkr}{r\omega - jk} = \frac{j\omega^2 mr + \omega km - jkr}{r\omega - jk}. \quad (2.4)$$

Для того чтобы определить вещественную и мнимую части друг от друга, необходимо освободиться от величины  $j$  в знаменателе



путем умножения и деления выражения (2.4) на величину  $r\omega + jk$

$$S = \frac{(j\omega^2 mr + \omega km - jkr)(r\omega + jk)}{(r\omega - jk)(r\omega + jk)};$$

после преобразования

$$S = \frac{k^2 r}{\omega^2 r^2 + k^2} + j \frac{\omega}{\omega^2 r^2 + k^2} [m(\omega^2 r^2 + k^2) - kr^2].$$

Динамическая система (рис. 2.2, а), состоящая из трех масс, двух сопротивлений и четырех упругостей. На примере механической цепи (рис. 2.2, б) показан последовательный порядок нахождения ЧКС звеньев и всей системы. ЧКС элементов будет

$$S_1 = j\omega m_1; S_2 = -j \frac{k_1}{\omega}; S_3 = r_1; S_4 = -j \frac{k_4}{\omega};$$

$$S_5 = j\omega m_2; S_6 = -j \frac{k_2}{\omega}; S_7 = j\omega m_3; S_8 = r_2; S_9 = -j \frac{k_3}{\omega}.$$

ЧКС звеньев будем определять, двигаясь от самых отдаленных от внешнего источника (силы) элементов, в данном случае  $S_7$ ,  $S_8$ ,  $S_9$ , находящихся в параллельном соединении; определяемые звенья последовательно обведены жирными линиями.

Для сопротивлений  $S_7$ ,  $S_8$ ,  $S_9$ , представляющих параллельное соединение (рис. 2.2, в) трех элементов ЧКС,

$$S_{789} = S_7 + S_8 + S_9. \quad (2.5)$$

Сопротивление  $S_6$  со звеном  $S_{789}$  находится в последовательном соединении, поэтому (рис. 2.2, г)

$$S_{6\dots 9} = \frac{S_6 S_{789}}{S_6 + S_{789}} = \frac{S_6 (S_7 + S_8 + S_9)}{S_6 + S_7 + S_8 + S_9}. \quad (2.6)$$

Звено  $S_{45}$ , состоящее из двух параллельно соединенных элементов (рис. 2.2, д), будет иметь

$$S_{45} = S_4 + S_5. \quad (2.7)$$

Звенья  $S_{45}$  и  $S_{6\dots 9}$  также соединены параллельно и для них

$$S_{4\dots 9} = S_{45} + S_{6\dots 9} = (S_4 + S_5) + \frac{S_6 (S_7 + S_8 + S_9)}{S_6 + S_7 + S_8 + S_9}. \quad (2.8)$$

Звено  $S_{23}$  состоит из двух элементов, соединенных параллельно (рис. 2.2, е)

$$S_{23} = S_2 + S_3. \quad (2.9)$$

Звенья  $S_{23}$  и  $S_{4\dots 9}$  находятся в последовательном соединении и для них (рис. 2.2, ж)

$$S_{2\dots 9} = \frac{S_{23} S_{4\dots 9}}{S_{23} + S_{4\dots 9}}. \quad (2.10)$$

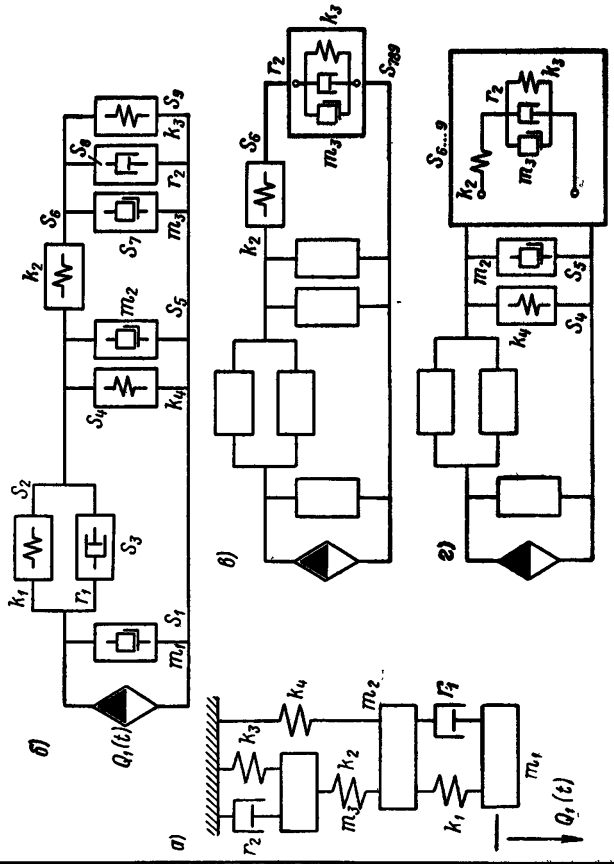
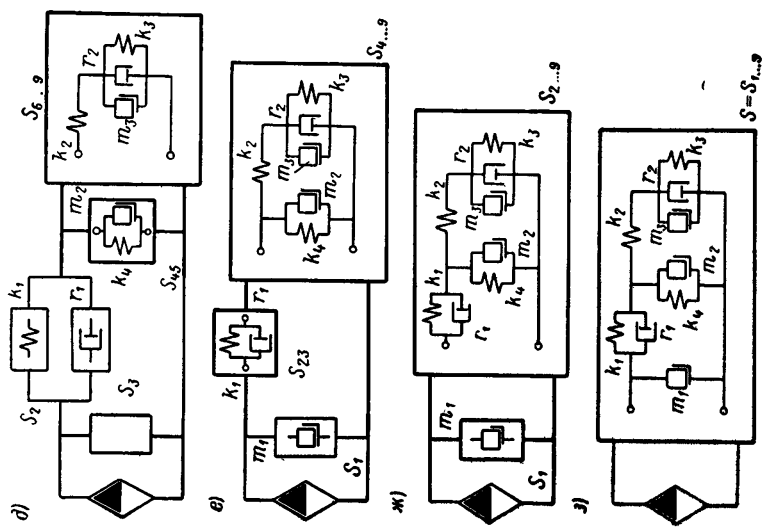


Рис. 2.2. Определение ЧКС и ПКС сложной системы

В заключение определим ПКС всей цепи, учитывая, что элемент  $S_1$  и звено  $S_{2...9}$  находятся в параллельном соединении (рис. 2.2, в)

$$S = S_1 + S_{2...9} = S_1 + \frac{S_{23}S_{4...9}}{S_{23} + S_{4...9}}. \quad (2.11)$$

Опуская преобразования, окончательный вид ПКС системы будет

$$S = \frac{S_1 [(S_2 + S_3 + S_4 + S_5) (S_6 + S_7 + S_8 + S_9) + S_6 (S_7 + S_8 + S_9)]}{(S_2 + S_3 + S_4 + S_5) (S_6 + S_7 + S_8 + S_9) + S_6 (S_7 + S_8 + S_9)} + \frac{(S_2 + S_3) [(S_4 + S_5) (S_6 + S_7 + S_8 + S_9) + S_6 (S_7 + S_8 + S_9)]}{(S_2 + S_3 + S_4 + S_5) (S_6 + S_7 + S_8 + S_9) + S_6 (S_7 + S_8 + S_9)}. \quad (2.12)$$

Подставим вместо ЧКС их значения, найдем ПКС

$$S_{789} = j\omega m_3 + r_2 - j \frac{k_3}{\omega}; \quad (2.13)$$

$$S_{6...9} = \frac{-\frac{jk_2}{\omega} (j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega})}{-\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega}}; \quad (2.14)$$

$$S_{45} = -\frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2; \quad (2.15)$$

$$S_{4...9} = \left( -\frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) + \frac{-\frac{jk_2}{\omega} (j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega})}{\left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right)}; \quad (2.16)$$

$$S_{23} = -\frac{jk_1}{\omega} + r_1; \quad (2.17)$$

$$S_{2...9} = \frac{\left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 \right) \left[ \left( -\frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) + \frac{-\frac{jk_2}{\omega} (j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega})}{\left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right)} \right]}{\left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 \right) + \left[ \left( -\frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) + \frac{-\frac{jk_2}{\omega} (j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega})}{\left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right)} \right]}. \quad (2.18)$$

ПКС всей системы будет  $S = S_1 + S_{2\dots 9}$ ; из (2.12) имеем:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{j\omega m_1 \left[ \left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 - \frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) \left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{jk_2}{\omega} \left( j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) \right]}{\left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 - \frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) \left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) -} \\
 & \left. - \frac{jk_2}{\omega} \left( j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) \right) + \\
 & \frac{\left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 \right) \left[ \left( -\frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) \left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{jk_2}{\omega} \left( j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) \right]}{\left( -\frac{jk_1}{\omega} + r_1 - \frac{jk_4}{\omega} + j\omega m_2 \right) \left( -\frac{jk_2}{\omega} + j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) -} \\
 & \left. - \frac{jk_2}{\omega} \left( j\omega m_3 + r_2 - \frac{jk_3}{\omega} \right) \right) \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Преобразовывая значения элементов, подставляя при решении численные значения, получим  $S = f(\omega)$ .

## 2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И СКОРОСТЕЙ В СИСТЕМЕ, ЗВЕНЬЯХ И ЭЛЕМЕНТАХ В ОБЩЕМ ВИДЕ

После того как определено ПКС системы, можно приступить к определению сил и скоростей; если для определения ПКС ход расчета начинался со звеньев, расположенных в наиболее удаленных звеньях цепи от источника, то определение сил и скоростей производится в обратном направлении. Обычно внешняя нагрузка — сила задана в виде выражения  $Q(t)$ ; зная ПКС в виде  $S$ , определяем скорость системы  $v = Q/S$ ; обычно это выражение комплексное и можно построить график изменения скорости во времени. Затем начинаем определять силы и скорости в ближайших звеньях и элементах. На рис. 2.2, б первым будет элемент с сопротивлением  $S_1$  и звено с сопротивлением  $S_{23456789}$ ; этот элемент и звено соединены между собой параллельно, следовательно, у них скорости системы, элемента и звена будут равны между собой  $v = v_1 = v_{2\dots 9}$ . Значения  $S_1 = j\omega m_1$  и  $S_{2\dots 9}$  определены ранее (2.10). Поэтому можем написать значение для силы  $Q_1 = S_1 v_1$  и  $Q_{2\dots 9} = S_{2\dots 9} v_{2\dots 9}$ . Следующим шагом будет рассмотрение звена 23. Это звено соединено с другой частью звена 234...9 последовательно, поэтому действующая сила  $Q_{23\dots 9} = Q_{23} = Q_{45\dots 9}$ . Для звена 23 ЧКС будет (2.9)  $S_{23} = S_2 + S_3$ , поэтому скорость этого звена  $v_{23} = Q_{23}/S_{23}$ . Само звено 23 состоит из двух элементов, соединенных параллельно, например, для элемента  $k_1$   $S_2 = k_1/(\omega j)$ ; скорость в элементах и самом звене

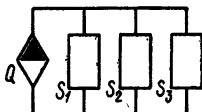
одинаковая, т. е.  $v_{23} = v_2 = v_3$ . Следовательно, сила  $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 v_3 = k_1/(j\omega) v_{23}$  и т. д.

Предоставляем читателю разобрать пример на рис. 2.2 самостоятельно, а для этого разберем несколько более простых задач по определению сил и скоростей.

**Система, состоящая из трех элементов, соединенных параллельно (табл. 2.1).** Разберем последовательно ход решения. Если в системе один элемент, то ПКС системы будет  $S_1$ . Внешней нагрузкой будет сила  $Q$ , поэтому скорость системы будет  $v = Q/S_1$ . Элемент  $S_1$  соединен параллельно с источником, следовательно, скорость в элементе  $v_1 = v$ ; сила  $Q_1 = S_1 v_1 = Q = S_1 v$ . Если в системе два элемента соединены параллельно, то ПКС системы будет  $S = S_1 + S_2$ ; скорость в системе будет  $v = Q/S = Q/(S_1 + S_2)$ ; для того чтобы определить  $Q_i$  и  $v_i$  в элементах, будем помнить, что в параллельном соединении элементов скорости равны между собой  $v = v_1 = v_2$ , а сила  $Q = Q_1 + Q_2$ . Для элемента  $S_1$  получаем  $v_1 = v$  и  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; также для элемента  $S_2$  получаем  $v_2 = v$  и  $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 v$ .

Т а б л и ц а 2.1

Определение ПКС, сил и скоростей в каждом элементе в системе из трех элементов



| Стро-<br>ка | ПКС                   | S |     | S <sub>1</sub> |                | S <sub>2</sub> |   | S <sub>3</sub> |                |
|-------------|-----------------------|---|-----|----------------|----------------|----------------|---|----------------|----------------|
|             |                       | Q | v   | Q <sub>1</sub> | v <sub>1</sub> | Q <sub>2</sub> | v | Q <sub>3</sub> | v <sub>3</sub> |
| 1           | $S = S_1$             | Q | Q/S | Q              | v              | —              | — | —              | —              |
| 2           | $S = S_1 + S_2$       | Q | Q/S | $S_1 v$        | v              | $S_2 v$        | v | —              | —              |
| 3           | $S = S_1 + S_2 + S_3$ | Q | Q/S | $S_1 v$        | v              | $S_2 v$        | v | $S_3 v$        | v              |

Если в системе три элемента соединены параллельно, то ПКС системы будет  $S = S_1 + S_2 + S_3$ ; скорость в системе будет  $v = Q/S = Q/(S_1 + S_2 + S_3)$ . В элементе  $S_1$  получаем  $v_1 = v$  и  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в элементе  $S_2$  получаем  $v_2 = v$  и  $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 v$ ; в элементе  $S_3$  получаем  $v_3 = v$  и  $Q_3 = S_3 v_3 = S_3 v$ . Произведем проверку  $S = S_1 + S_2 + S_3 = Q_1/v_1 + Q_2/v_2 + Q_3/v_3 = (Q_1 + Q_2 + Q_3)/v = \frac{Q}{v}$ .

В табл. 2.1 показан эскиз такого соединения и значения сопротивлений, сил и скоростей в зависимости от S.

Система, состоящая из четырех элементов. В этой системе первый элемент соединен последовательно, а остальные параллельно (табл. 2.2).

Рассмотрение зависимостей начнем с системы, состоящей из двух элементов  $S_1$  и  $S_2$ , соединенных последовательно (табл. 2.2, строка 1); ПКС такой системы будет  $S = S_1 S_2 / (S_1 + S_2)$ . При внешней силе  $Q$  скорость в системе будет  $v = Q/S = Q(S_1 + S_2)/(S_1 S_2)$ .

Для элементов  $S_1$  и  $S_2$ , составляющих последовательное соединение,  $Q = Q_1 = Q_2$ ; поэтому в элементе  $S_1$   $Q_1 = Q$  и  $v_1 = Q_1/S_1 = Q/S_1$ ; в элементе  $S_2$   $Q_2 = Q$  и  $v_2 = Q_2/S_2 = Q/S_2$ .

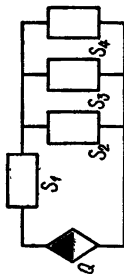
Рассмотрим систему, состоящую из трех элементов, при этом элементы  $S_2$  и  $S_3$  соединены между собой параллельно, а элемент  $S_1$  последовательно по отношению к звену 23.

Нахождение ПКС начнем с определения ЧКС звена 23.  $S_{23} = S_2 + S_3$ . Рассматривая последовательное соединение элемента 1 и звена 23 (строка 2), найдем ПКС системы.

$$S = \frac{S_1 S_{23}}{S_1 + S_{23}} = \frac{S_1 (S_2 + S_3)}{S_1 + S_2 + S_3}$$

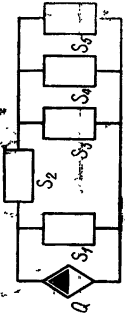
Определим скорость всей системы  $v = Q/S$ , где  $Q$  — внешняя сила. Для элемента 1, соединенного последовательно со звеном 23,  $Q_1 = Q$ ;  $v_1 = Q_1/S_1 = Q/S_1$ . Для звена 23 сила  $Q_{23} = Q_1 = Q$ ,  $v_{23} = Q_{23}/S_{23} = Q/(S_2 + S_3)$ . После этого определим дан-

Таблица 2.2  
Определение ПКС, сил и скоростей в каждом элементе и звене в системе из четырех элементов



| Строка | ПКС                               |       | S |         | S <sub>1</sub> |                | S <sub>23</sub><br>S <sub>23</sub> S <sub>234</sub> |                | S <sub>2</sub>    |                | S <sub>3</sub>    |                | S <sub>4</sub>    |                |
|--------|-----------------------------------|-------|---|---------|----------------|----------------|---|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|
|        | S                                 | v     | Q | v       | Q              | v <sub>1</sub> | Q <sub>1</sub>                                      | v <sub>1</sub> | Q <sub>2</sub>    | v <sub>2</sub> | Q <sub>3</sub>    | v <sub>3</sub> | Q <sub>4</sub>    | v <sub>4</sub> |
| 1      | $S = S_1 S_2 / S_1 + S_2$         | $Q/S$ | Q | $Q/S_1$ | Q              | —              | —   | —              | Q                 | $Q/S_2$        | —                 | —              | —                 | —              |
| 2      | $S = S_1 S_{23} / S_1 + S_{23}$   | $Q/S$ | Q | $Q/S_1$ | Q              | $Q/S_{23}$     | —   | —              | $Q S_2 / S_{23}$  | $Q/S_{23}$     | —                 | —              | —                 | —              |
| 3      | $S = S_1 S_{234} / S_1 + S_{234}$ | $Q/S$ | Q | $Q/S_1$ | Q              | $Q/S_{234}$    | —   | —              | $Q S_2 / S_{234}$ | $Q/S_{234}$    | $Q S_3 / S_{234}$ | $Q/S_{234}$    | $Q S_4 / S_{234}$ | $Q/S_{234}$    |

Определение ПКС, сил и скоростей в каждом элементе и в каждом звене в системе из пяти элементов



| Строка | ПКС                  | S |     | S <sub>1</sub> |                | S <sub>2</sub> |                | S <sub>3</sub> |                   | S <sub>4</sub> |                   | S <sub>5</sub> |                   |
|--------|----------------------|---|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|----------------|-------------------|
|        |                      | Q | v   | Q <sub>1</sub> | v <sub>1</sub> | Q <sub>2</sub> | v <sub>2</sub> | Q <sub>3</sub> | v <sub>3</sub>    | Q <sub>4</sub> | v <sub>4</sub>    | Q <sub>5</sub> | v <sub>5</sub>    |
| 1      | $S = S_1 + S_{23}$   | Q | Q/S | $S_1 v$        | v              | $S_{23} v$     | $Q_2/S_2$      | $Q_3/S_3$      | —                 | —              | —                 | —              | —                 |
| 2      | $S = S_1 + S_{234}$  | Q | Q/S | $S_1 v$        | v              | $S_{234} v$    | $Q_2/S_2$      | $Q_3/S_3$      | $Q_{34}/S_{34}$   | $S_4 v_4$      | —                 | —              | —                 |
| 3      | $S = S_1 + S_{2345}$ | Q | Q/S | $S_1 v$        | v              | $S_{2345} v$   | $Q_2/S_2$      | $Q_3/S_3$      | $Q_{345}/S_{345}$ | $S_4 v_4$      | $Q_{345}/S_{345}$ | $S_5 v_5$      | $Q_{345}/S_{345}$ |

ные для элементов, соединенных параллельно. В элементе 2  $v_2 = v_{23}$ ,  $Q_2 = S_2 v_2$ ; в элементе 3  $v_3 = v_{23}$ ,  $Q_3 = S_3 v_3$ .

В системе из четырех элементов элементы  $S_2, S_3, S_4$  соединены между собой параллельно, а элемент  $S_1$  последовательно по отношению к звену 234. Для нахождения ПКС определим ЧКС звена 234.  $S_{234} = S_2 + S_3 + S_4$ . Затем, рассматривая последовательное соединение элемента 1 и звена 234 (табл. 2.2, строка 3), найдем ПКС системы

$$S = \frac{S_1 S_{234}}{S_1 + S_{234}} = \frac{S_1 (S_2 + S_3 + S_4)}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$$

Определим скорость всей системы

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)}{S_1 (S_2 + S_3 + S_4)}$$

Для элемента 1, соединенного последовательно со звеном 234,  $v_1 = Q_1/S_1$ ;  $Q_1 = Q$ . Для звена 234  $v_{234} = Q_{234}/S_{234}$ ;  $Q_{234} = Q$ . После чего определим данные для элементов, соединенных параллельно: в элементе 2  $v_2 = v_{234}$ ,  $Q_2 = S_2 v_2$ , в элементе 3  $v_3 = v_{234}$ ,  $Q_3 = S_3 v_3$ ; в элементе 4  $v_4 = v_{234}$ ,  $Q_4 = S_4 v_4$ .

Система, состоящая из пяти элементов (табл. 2.3). Рассмотрение зависимостей начнем с системы, состоящей из трех эле-

ментов  $S_1, S_2, S_3$ , при этом элементы  $S_2$  и  $S_3$  соединены последовательно, а элемент  $S_1$  параллельно к звену 23. Для нахождения ПКС системы определим ЧКС звена 23 (табл. 2.3, строка 1).  $S_{23} = S_2 S_3 / (S_2 + S_3)$ .

Рассматривая ЧКС элемента 1 и звена 23, соединенных параллельно, найдем ПКС системы

$$S = S_1 + S_{23} = S_1 + \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3} = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2 + S_3}.$$

При внешней силе  $Q$  скорость в системе будет

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q(S_2 + S_3)}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}.$$

В элементе 1  $v_1 = v$ ,  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в звене 23  $v_{23} = v$ ,  $Q_{23} = S_{23} v_{23} = S_{23} v$ .

После этого определим данные для элементов звена 23, соединенных последовательно: в элементе 2  $Q_2 = Q_{23} = S_{23} v$ ,  $v_2 = Q_2 / S_2$ ; в элементе 3  $Q_3 = Q_{23} = S_{23} v$ ,  $v_3 = Q_3 / S_3$ .

Система состоит из четырех элементов  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , при этом звено 34 состоит из параллельно соединенных элементов  $S_3$  и  $S_4$ ; звено 234 состоит из последовательно соединенных элемента  $S_2$  и звена 34, и вся система состоит из элемента 1, соединенного параллельно со звеном 234 (табл. 2.3, строка 2).

Определим ЧКС звеньев 34 и 234

$$S_{34} = S_3 + S_4;$$

$$S_{234} = \frac{S_2 S_{34}}{S_2 + S_{34}} = \frac{[S_2 (S_3 + S_4)]}{S_2 + S_3 + S_4}$$

и ПКС системы:

$$S = S_1 + S_{234} = S_1 + \frac{S_2 S_3 + S_2 S_4}{S_2 + S_3 + S_4} = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_1 S_4 + S_2 S_3 + S_2 S_4}{S_2 + S_3 + S_4};$$

$$S = \frac{S_1 (S_2 + S_3 + S_4) + S_2 (S_3 + S_4)}{S_2 + S_3 + S_4}.$$

Определим скорость всей системы

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q(S_2 + S_3 + S_4)}{S_1 (S_2 + S_3 + S_4) + S_2 (S_3 + S_4)}.$$

В элементе 1  $v_1 = v$ ,  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в звене 234  $v_{234} = v$ ,  $Q_{234} = S_{234} v_{234} = S_{234} v$ ; в элементе 2  $Q_2 = Q_{234}$ ,  $v_2 = Q_2 / S_2$ ; в звене 34  $Q_{34} = Q_{234}$ ,  $v_{34} = Q_{34} / S_{34}$ ; в элементе 3  $v_3 = v_{34}$ ,  $Q_3 = S_3 v_3$ ; в элементе 4  $v_4 = v_{34}$ ,  $Q_4 = S_4 v_4$ .

Система состоит из пяти элементов  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , при этом звено 345 состоит из параллельно соединенных элементов  $S_3, S_4$  и  $S_5$ ; звено 2345 состоит из последовательного соединения



элемента  $S_2$  и звена 345, и вся система состоит из элемента 1, соединенного параллельно со звеном 2345 (табл. 2.3, строка 3). Определим ЧКС звеньев 345 и 2345

$$S_{345} = S_3 + S_4 + S_5;$$

$$S_{2...5} = \frac{S_2 S_{345}}{S_2 + S_{345}} = \frac{S_2 (S_3 + S_4 + S_5)}{S_2 + S_3 + S_4 + S_5}$$

и ПКС системы

$$S = S_1 + S_{2...5} = S_1 +$$

$$+ \frac{S_2 (S_3 + S_4 + S_5)}{S_2 + S_3 + S_4 + S_5} = \frac{S_1 (S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + S_2 (S_3 + S_4 + S_5)}{S_2 + S_3 + S_4 + S_5}.$$

Скорость всей системы будет

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q (S_2 + S_3 + S_4 + S_5)}{S_1 (S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + S_2 (S_3 + S_4 + S_5)}.$$

В элементе 1  $v_1 = v$ ,  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в звене 2345  $v_{2...5} = v$ ,  $Q_{2...5} = S_{2...5} v_{2...5} = S_{2...5} v$ ; в элементе 2  $Q_2 = Q_{2...5}$ ,  $v_2 = Q_2 / S_2$ ; в звене 345  $Q_{345} = Q_{2...5}$ ,  $v_{345} = Q_{345} / S_{345}$ ; в элементе 3  $v_3 = v_{345}$ ,  $Q_3 = S_3 v_3$ ; в элементе 4  $v_4 = v_{345}$ ,  $Q_4 = S_4 v_4$ ; в элементе 5  $v_5 = v_{345}$ ,  $Q_5 = S_5 v_5$ .

**Система, состоящая из пяти элементов (табл. 2.4).** Рассмотрим зависимости начнем с системы, состоящей из четырех элементов  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , при этом элементы 1 и 2 соединены параллельно, элементы 3 и 4 соединены последовательно, а звенья 12 и 34 между собой соединены параллельно (табл. 2.4, строка 1).

Для определения ПКС системы найдем ЧКС звеньев 12 и 34

$$S_{12} = S_1 + S_2; \quad S_{34} = \frac{S_3 S_4}{S_3 + S_4};$$

ПКС системы

$$S = S_{12} + S_{34} = (S_1 + S_2) + \frac{S_3 S_4}{S_3 + S_4} = \frac{(S_1 + S_2) (S_3 + S_4) + S_3 S_4}{S_3 + S_4}.$$

Скорость в системе

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q (S_3 + S_4)}{(S_1 + S_2) (S_3 + S_4) + S_3 S_4}.$$

В звене 12  $v_{12} = v$ ,  $Q_{12} = S_{12} v_{12} = S_{12} v$ ; в элементе 1  $v_1 = v_{12} = v$ ,  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в элементе 2  $v_2 = v_{12} = v$ ,  $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 v$ ; в звене 34  $v_{34} = v$ ,  $Q_{34} = S_{34} v_{34} = S_{34} v$ ; в элементе 3  $Q_3 = Q_{34} = S_{34} v$ ,  $v_3 = Q_3 / S_3$ ; в элементе 4  $Q_4 = Q_{34} = S_{34} v$ ,  $v_4 = Q_4 / S_4$ .

Рассмотрим систему, состоящую из пяти элементов  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , при этом элементы 1, 2, 4, 5 соединены параллельно, элемент 3 со звеном 45 соединены последовательно,

а звенья 12 и 345 между собой соединены параллельно (табл. 2.4, строка 2). Определение ПКС системы начнем с определения ЧКС звеньев 12, 45 и 345:

$$S_{12} = S_1 + S_2; \quad S_{45} = S_4 + S_5,$$

$$S_{345} = \frac{S_3 S_{45}}{S_3 + S_{45}} = \frac{S_3 (S_4 + S_5)}{S_3 + S_4 + S_5}.$$

ПКС системы

$$S = S_{12} + S_{345} = (S_1 + S_2) + \frac{S_3 (S_4 + S_5)}{S_3 + S_4 + S_5};$$

$$S = \frac{(S_1 + S_2) (S_3 + S_4 + S_5) + S_3 (S_4 + S_5)}{S_3 + S_4 + S_5}.$$

Скорость в системе

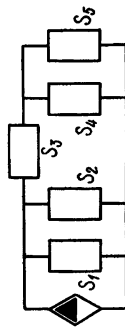
$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q (S_3 + S_4 + S_5)}{(S_1 + S_2) (S_3 + S_4 + S_5) + S_3 (S_4 + S_5)}.$$

В звене 12  $v_{12} = v$ ,  $Q_{12} = S_{12} v_{12} = S_{12} v$ ; в элементе 1  $v_1 = v_{12} = v$ ,  $Q_1 = S_1 v_1 = S_1 v$ ; в элементе 2  $v_2 = v_{12} = v$ ,  $Q_2 = S_2 v_2 = S_2 v$ ; в звене 345  $v_{345} = v$ ,  $Q_{345} = S_{345} v_{345} = S_{345} v$ ; в элементе 3  $Q_3 = Q_{345} = S_{345} v$ ,  $v_3 = Q_3 / S_3$ ; в звене 45  $Q_{45} = Q_{345} = S_{345} v$ ;  $v_{45} = Q_{45} / S_{45} = Q_{345} / S_{45}$ ; в элементе 4  $v_4 = v_{45}$ ,  $Q_4 = S_4 v_4$ ; в элементе 5  $v_5 = v_{45}$ ,  $Q_5 = S_5 v_5$ .

### 2.3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

Динамическая система, состоящая из массы и упругости (рис. 1.6, а). Для решения задачи на рис. 1.6, г, д построена механическая цепь. Даны внешняя сила наибольшей амплитуды  $Q_n = 20$  кгс, круговая частота  $\omega = 100 \dots 250$  1/с, упругость  $k = 1000$  кгс/м, масса  $m = 2$  кгс с<sup>2</sup>/м. Требуется опре-

Т а б л и ц а 2.4  
Определение ПКС, сил и скоростей в каждом элементе и в звене в системе из пяти элементов



| Строка | ПКС                    |       | S |     | S <sub>12</sub> |                 | S <sub>1</sub> |                | S <sub>2</sub> |                | S <sub>345</sub> |                | S <sub>3</sub> |                | S <sub>45</sub> |                 | S <sub>4</sub> |                | S <sub>5</sub> |                |
|--------|------------------------|-------|---|-----|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|        | Q                      | Q/S   | Q | v   | Q <sub>12</sub> | v <sub>12</sub> | Q <sub>1</sub> | v <sub>1</sub> | Q <sub>2</sub> | v <sub>2</sub> | Q <sub>i</sub>   | v <sub>i</sub> | Q <sub>3</sub> | v <sub>3</sub> | Q <sub>45</sub> | v <sub>45</sub> | Q <sub>4</sub> | v <sub>4</sub> | Q <sub>5</sub> | v <sub>5</sub> |
| 1      | $S = S_{12} + S_{34}$  | $Q/S$ | Q | Q/S | $S_{12} v$      | v               | $S_1 v$        | v              | $S_2 v$        | v              | $S_{34} v$       | v              | $S_{34} v$     | $Q_3/S_3$      | —               | —               | $S_{34} v$     | $Q_4/S_4$      | —              | —              |
| 2      | $S = S_{12} + S_{345}$ | $Q/S$ | Q | Q/S | $S_{12} v$      | v               | $S_1 v$        | v              | $S_2 v$        | v              | $S_{345} v$      | v              | $S_{345} v$    | $Q_3/S_3$      | $Q_{45}/S_{45}$ | $Q_{45}/S_{45}$ | $S_4 v_4$      | $Q_4/S_4$      | $S_5 v_5$      | $Q_5/S_5$      |

делить силы, скорости, полные и частные комплексные сопротивления в элементах и всей системе.

Для этой системы можно написать  $v_1 = v_2 = v$ ;  $Q'_j = Q_1 + Q_2$ ;  $S_1 + S_2 = S$ ;  $S = Q/v$ .

При этом  $S = S_1 + S_2 = j\omega m + k/(j\omega) = j(\omega m - k/\omega)$ .

Общая скорость системы

$$v = \frac{Q}{S} = -j \left( \frac{Q}{\omega m - k/\omega} \right).$$

Для элемента 1 имеем  $S_1 = j\omega m$ ;  $v_1 = v = -j \left( \frac{Q}{\omega m - k/\omega} \right)$ ;

$$Q_1 = S_1 v_1 = -j \left( \frac{Q j \omega m}{\omega m - k/\omega} \right) = \frac{Q \omega m}{\omega m - k/\omega}.$$

Для элемента 2 имеем  $S_2 = k/j\omega$ ;  $v_2 = v = -j \left( \frac{Q}{\omega m - k/\omega} \right)$ ;

$$Q_2 = S_2 v_2 = -j \left( \frac{Q \frac{k}{j\omega}}{\omega m - k/\omega} \right) = -\frac{Qk}{\omega(\omega m - k/\omega)}.$$

Произведя подстановку заданных величин  $Q$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $\omega$  в выведенные зависимости для  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$ , получаем зависимости, изображенные на рис. 2.3 в полупологарифмических координатах.

При этом  $S = j 190$  кгс·с/м при  $\omega = 100$  1/с и  $S = j 500$  кгс·с/м при  $\omega = 250$  1/с. Эта зависимость нелинейная, так как  $S = S_1 + S_2 = j\omega m - j(k/\omega)$ , где  $k/\omega$  с изменением  $\omega$  приобретает гиперболический характер. Кривая для  $S_1$  линейная, близко расположена от кривой  $S$ , это означает, что масса имеет наибольшее значение для этого примера. Для  $S_2$  кривая расположена под линией абсцисс, так как  $S_2 = -j(k/\omega)$ . Сила  $Q_1$ , зависящая от массы, изменяется незначительно. Например, при  $\omega = 100$  1/с  $Q_1 = 20,1$  кгс, а при  $\omega = 250$  1/с  $Q_1 = 20,02$  кгс. В то же время сила  $Q_2$ , действующая в противоположную сторону, изменяется от  $-1,05$  кгс при  $\omega = 100$  1/с до  $-0,16$  кгс при  $\omega = 250$  1/с. Скорость  $v$ , которая будет действовать также в каждом элементе  $m$  и  $k$ , будет одинакова (т. е.  $v = v_1 = v_2$ ) и будет изменяться от  $-j0,105$  м/с при  $\omega = 100$  1/с до  $-j0,04$  м/с при  $\omega = 250$  1/с.

В действительности на этих графиках изображены наибольшие значения величин  $Q = Q_n \sin \omega t$  и  $v = V_n \cos \omega t$ . Для каждого значения  $\omega$ ,  $Q$ ,  $v$  можно построить действительные графики колебательных процессов. На рис. 2.4 изображены изменения внешней нагрузки  $Q = 20$  кгс для  $\omega = 100$  и  $250$  1/с и скорости системы  $v$  для  $\omega = 100$  1/с, при этом  $V_n = -j0,105$  м/с и для  $\omega = 250$  1/с, когда  $V_n = -j0,04$  м/с.

Рассмотрим частоты, пределы которых приближаются к резонансу сил, который, как известно, наступает при  $S = 0$ , а для уравнения  $S = S_1 + S_2$  резонанс наступает, когда  $\omega m = k/\omega$ ;  $\omega^2 = k/m$ ;  $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1000/2} = \sqrt{500} = 22,36$  1/с.

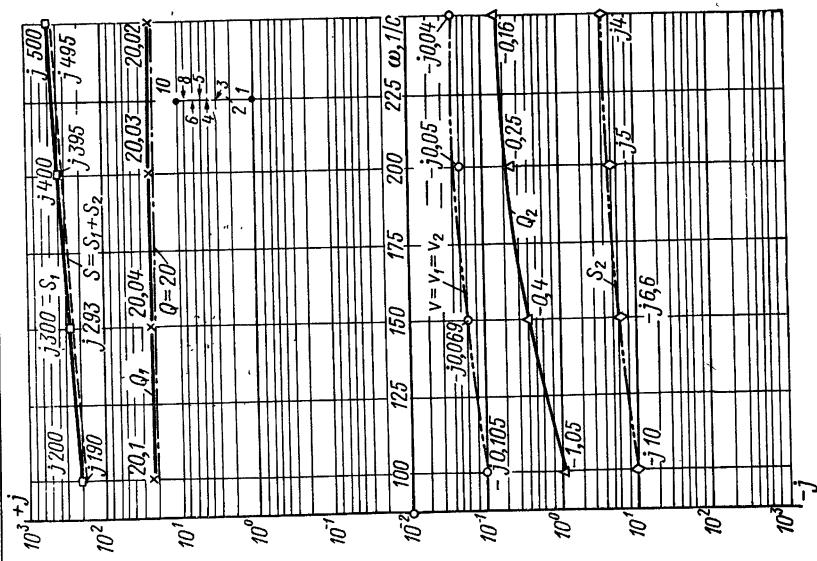


Рис. 2.3. Изменение значений  $S_1$ ,  $v_1$ ,  $Q_1$  в зависимости от  $\omega$

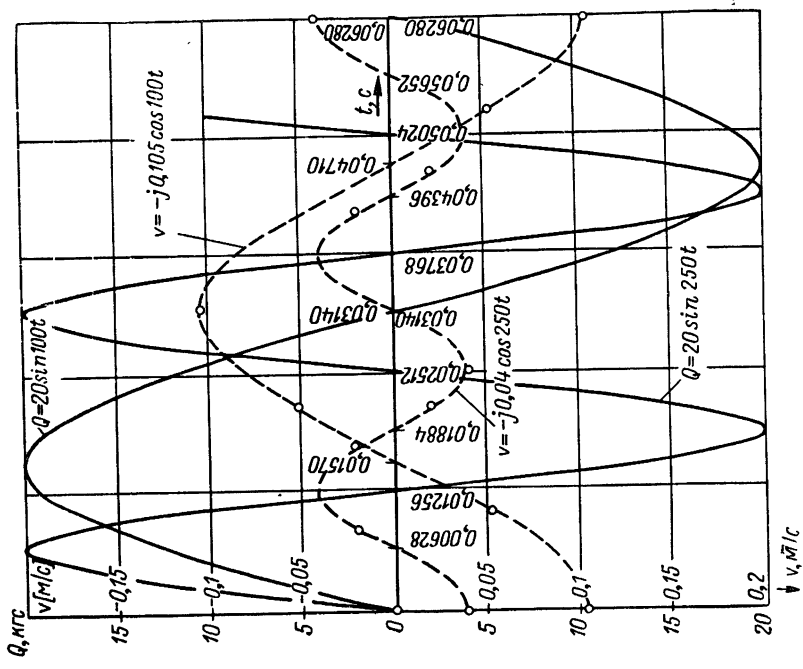


Рис. 2.4. Изменение значений  $Q$  и  $v$  в пределах цикла

Пусть диапазон частот будет от 1 до 1000 1/с. В таком случае, подставляя значения частот в формулы для  $v$ ,  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ , получим численные значения и построим кривые в логарифмических координатах. Для простоты на ординатах откладываем значения для выражения  $a = a_1 + ja_2$  для  $\pm ja_2$ ; а также для  $\pm a_1$  в одинаковом масштабе. В пределах частот от 1 до 10 1/с и от 40

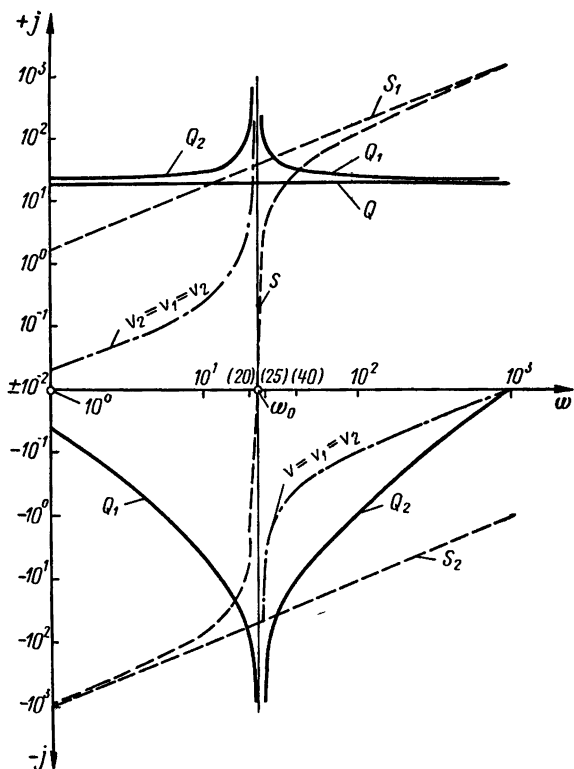


Рис. 2.5. Изменение значений  $S_i$ ,  $v_i$ ,  $Q_i$  в зоне резонанса

до 1000 1/с и более зоны работ динамической системы не опасны. В пределах частот от 10 до 40 1/с характер изменения всех кривых меняется и эта зона является опасной. В окрестностях  $\omega = 22,36$  1/с, точнее в пределах от 20 до 25 1/с, зона действия является катастрофической, если механизм не построен для того, чтобы вызвать искусственно выход из строя (рис. 2.5).

**Динамическая система, состоящая из массы и двух упругостей.** Система и ее механическая цепь показаны на рис. 1.8, а, в, г. Даны внешняя сила  $Q_n = 20$  кгс, приложенная к упругости  $k_1 = 500$  кгс/м; круговая частота  $\omega = 100 \dots 250$  1/с; упругость  $k_2 = 1000$  кгс/м; масса  $m = 2$  кгс с<sup>2</sup>/м; требуется определить

силы, скорости, полные и частные комплексные сопротивления в элементах, звеньях и цепи системы.

Решение системы начнем с определения ЧКС для звена 23 в параллельном соединении:  $S_{23} = S_2 + S_3 = j\omega m + k_2/j\omega$ ;  
 $S_{23} = j \left( \frac{\omega^2 m - k_2}{\omega} \right)$ .

ПКС звена 123 в последовательном соединении будет

$$S = S_{123} = \frac{S_1 S_{23}}{S_1 + S_{23}} = \frac{S_1 (S_2 + S_3)}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{\frac{k_1}{j\omega} \left( j\omega m + \frac{k_2}{j\omega} \right)}{\frac{k_1}{j\omega} + j\omega m + \frac{k_2}{j\omega}} =$$

$$= -j \left[ \frac{k_1 (\omega^2 m - k_2)}{\omega (\omega^2 m - k_1 - k_2)} \right].$$

Определим скорость в системе

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q (S_1 + S_{23})}{S_1 S_{23}} = j \frac{Q \omega (\omega^2 m - k_1 - k_2)}{k_1 (\omega^2 m - k_2)}.$$

Зная значения  $S_1, S_2, S_3, s, v$ , можем определить силы и скорости в элементах 1, 2, 3 и звена 23. В элементе 1 и звене 23, находящихся между собой в последовательном соединении,  $Q = Q_1 = Q_{23}$ ,  $S_1 = k_1/j\omega$ ;  $v_1 = \frac{Q_1}{S_1} = jQ\omega/k_1$

Для звена 23, зная значения для  $Q_{23}$  и  $S_{23}$ , имеем:

$$v_{23} = \frac{Q_{23}}{S_{23}} = \frac{Q\omega}{j(\omega^2 m - k_2)} = -j \left( \frac{Q\omega}{\omega^2 m - k_2} \right).$$

Для элемента 2 звена 23 в параллельном соединении имеем  $S_2 = j\omega m$ ;  $v_2 = v_{23}$ , следовательно,  $Q_2 = S_2 v_2 = -j \left( \frac{Q\omega}{\omega^2 m - k_2} \right) \times j\omega m = \frac{Q\omega^2 m}{\omega^2 m - k_2}$ .

Для элемента 3 звена 23, находящегося в параллельном соединении, имеем:  $S_3 = k_2/(j\omega)$ ;  $v_3 = v_{23}$ , следовательно,  $Q_3 = S_3 v_3 = -j [Q\omega/(\omega^2 m - k_2)] k_2/(j\omega) = -Qk_2/(\omega^2 m - k_2)$ .

Произведя подстановку заданных величин  $Q, m, k_1, k_2, \omega$  в выведенные зависимости для  $S_1, S_2, S_3, S_{23}, v_1, v_2, v_3, v_{23}, Q_1, Q_2, Q_3$ , получаем кривые, изображенные на рис. 2.6 в полупологарифмических координатах.

При этом  $S_1 = -5$  кгс/с/м при  $\omega = 100$  1/с и  $S_1 = -j2$  кгс/с/м при  $\omega = 250$  1/с;  $S_2 = j200$  кгс/с/м при  $\omega = 100$  1/с и  $S_2 = j500$  кгс/с/м при  $\omega = 250$  1/с;  $S_3 = -j10$  кгс/с/м при  $\omega = 100$  1/с и  $S_3 = -j4$  кгс/с/м при  $\omega = 250$  1/с;  $S_{23} = j190$  кгс/с/м при  $\omega = 100$  1/с и  $S_{23} = j496$  кгс/с/м при  $\omega = 250$  1/с. Следует здесь отметить, что в звене 23 величина  $S_{23}$  зависит от массы  $m$ , а во всей системе величина  $S$  в данной задаче зависит от комплексного сопротивления  $S_1$ , т. е. от упругости  $k_1$ .

Силы  $Q, Q_{23}$  и  $Q_1$  равны 20 кгс.

Величина  $Q_2$  изменяется от 21,05 кгс при  $\omega = 100$  1/с до 20,16 кгс при  $\omega = 250$  1/с; величина  $Q_3$  изменяется от  $-1,05$  кгс при  $\omega = 100$  1/с до  $-0,163$  кгс при  $\omega = 250$  1/с. Эта сила имеет обратный знак ко всем остальным силам и ее величина незначительна. Теперь отметим величины действующих скоростей. Изменение скорости  $v$  всей системы:  $v = j3,9$  м/с при  $\omega = 100$  1/с и  $v = j9,95$  м/с при  $\omega = 250$  1/с. Скорость  $v_1$  деформации упругости  $k_1$ , на которую действует внешняя сила, незначительно отличается от скорости  $v$ :  $v_1 = j4$  м/с при  $\omega = 100$  1/с и  $v_1 = j10$  м/с при  $\omega = 250$  1/с.

Скорость  $v_{23} = v_2 = v_3$  будет находиться в зависимости от частоты следующим образом:  $v_{23} = -j0,105$  м/с при  $\omega = 100$  1/с и  $v_{23} = -j0,04$  м/с при  $\omega = 250$  1/с, при этом скорости массы  $m$  и упругости  $k_2$  будут одинаковыми.

**Динамическая система, состоящая из массы, сопротивления и упругости.** Система и ее механическая цепь показаны на рис. 1.8, *д, е*. Это видоизмененная динамическая система по рис. 1.8, *а*, где вместо элемента упругости  $k_1 = 500$  кгс/м введен элемент сопротивления  $r = 100$  кгс с/м.

Также масса  $m = 2$  кгс с<sup>2</sup>/м; упругость  $k = k_2 = 1000$  кгс/м, внешняя сила  $Q = 20$  кгс; круговая частота  $\omega = 100 \dots 250$  1/с. Частное комплексное сопротивление  $S_{23} = j(\omega^2 m - k)/\omega$ .

ПКС

$$S = \frac{S_1 S_{23}}{S_1 + S_{23}} = \frac{S_1 (S_2 + S_3)}{S_1 + S_2 + S_3} =$$

$$= \frac{rj \left( \omega m - \frac{k}{\omega} \right)}{r + j \left( \omega m - \frac{k}{\omega} \right)} = \frac{jr(\omega^2 m - k)}{\omega r + j(\omega^2 m - k)}. \quad (2.20)$$

Один раз подробно произведем действия преобразования ПКС для того, чтобы выделить действительные и мнимые величины. Выражение (2.20) умножаем и делим на выражение  $[\omega r - j(\omega^2 m - k)]$ :

$$S = \frac{[jr(\omega^2 m - k)] [\omega r - j(\omega^2 m - k)]}{(\omega r)^2 - j^2(\omega^2 m - k)^2} = \frac{(jr\omega^2 m - jrk)(\omega r - j\omega^2 m + jk)}{(\omega r)^2 + (\omega^2 m - k)^2};$$

$$S = \frac{j\omega^3 m r^2 + \omega^4 m^2 r - \omega^2 m r k - j\omega k r^2 - \omega^2 m r k + r k^2}{(\omega r)^2 + (\omega^2 m - k)^2} =$$

$$= \frac{\omega^4 m^2 r - 2\omega^2 m r k + k^2 r + j\omega r^2(\omega^2 m - k)}{(\omega r)^2 + (\omega^2 m - k)^2};$$

$$S = \frac{r(\omega^2 m - k)^2 + j\omega r^2(\omega^2 m - k)}{(\omega r)^2 + (\omega^2 m - k)^2};$$

$$S = \frac{r(\omega^2 m - k)}{(\omega^2 m - k)^2 + (\omega r)^2} [(\omega^2 m - k) + j\omega r].$$

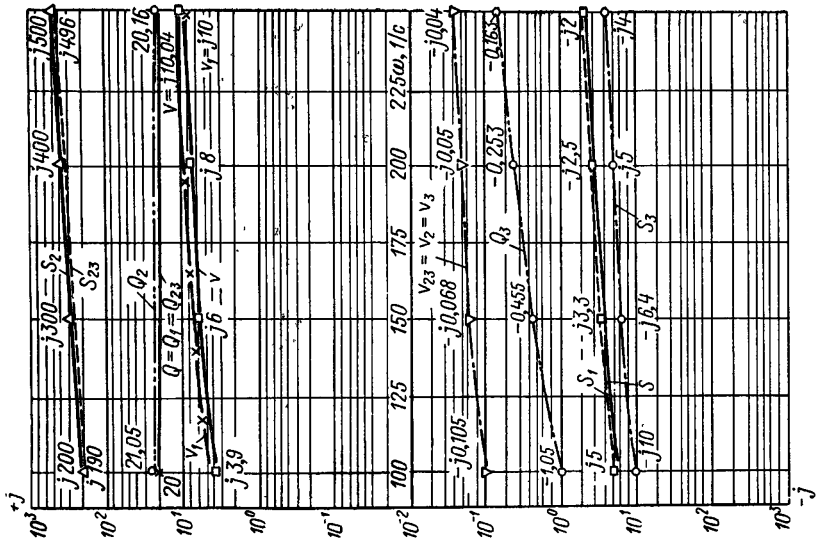


Рис. 2.6. Изменение значений  $S_1, v_1, Q_1$  в зависимости от  $\omega$

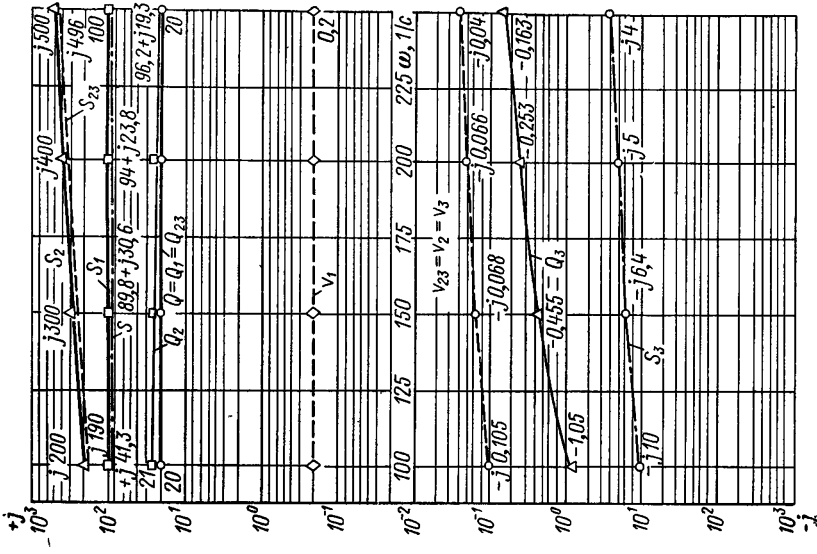


Рис. 2.7. Изменение значений  $S_1, v_1, Q_1$  в зависимости от  $\omega$



Однако зачастую в практических задачах проще пользоваться выражением (2.20).

Определим скорость системы в общем виде  $v = Q/S$ . Найдем силы и скорости в звене и элементах. В элементе 1 для последовательного соединения со звеном 23 величина  $Q_1 = Q = Q_{23}$ ,  $S_1 = r$ , поэтому  $v_1 = Q_1/S_1 = Q/r$ .

Для звена 23, зная значения  $Q_{23}$  и  $S_{23}$ , имеем  $v_{23} = Q_{23}/S_{23} = Q\omega/[j(\omega^2 m - k)] = -jQ\omega/(\omega^2 m - k)$ .

Для элемента 2 звена 23 в параллельном соединении имеем  $S_2 = j\omega m$ ;  $v_2 = v_{23}$ ; следовательно,  $Q_2 = S_2 v_2 = -jQ\omega j\omega m/(\omega^2 m - k) = Q\omega^2 m/(\omega^2 m - k)$ .

Для элемента 3 звена 23 имеем  $S_3 = k/(j\omega)$ ;  $v_3 = v_{23}$ ; следовательно,  $Q_3 = S_3 v_3 = -jQ\omega k/[(\omega^2 m - k)j\omega] = -Qk/(\omega^2 m - k)$ .

Подставив величины  $Q$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $\omega$  в выведенные зависимости для  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_{23}$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_{23}$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ , получаем кривые, изображенные на рис. 2.7. Сравните изменения между графиками на рис. 2.6 и рис. 2.7.  $v_1 = Q_1/r = 20/100 = 0,2$  м/с.

Значения для  $v_{23}$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  остаются одинаковыми с предыдущей задачей.

**Динамическая система, состоящая из массы, сопротивления и упругости.** Система и ее механическая цепь показаны на рис. 1.7, а, б, в. Даны внешняя сила  $Q_n = 20$  кгс; круговая частота  $\omega = 100$  . 250 1/с, упругость  $k = 1000$  кгс/м, масса  $m = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м, сопротивление  $r = 100$  кгс·с/м. Определим силы, скорости и комплексные сопротивления в элементах системы:  $S_1 = j\omega m$ ;  $S_2 = r$ ;  $S_3 = k/(j\omega)$ ;  $v = v_1 = v_2 = v_3$ .

Приводим окончательные формулы без выводов:  
 $S = S_1 + S_2 + S_3 = r + j[(\omega^2 m - k)/\omega]$ ;  $v = Q\omega/[(\omega^2 m - k)^2 + (r\omega)^2] [r\omega - j(\omega^2 m - k)]$ ;  $Q_1 = Q\omega^2 m/[(\omega^2 m - k)^2 + (r\omega)^2] [(\omega^2 m - k) + jr\omega]$ ,  $Q_2 = Qr\omega/[(\omega^2 m - k)^2 + (r\omega)^2] \times [r\omega - j(\omega^2 m - k)]$ ,  $Q_3 = -(Qk)/[(\omega^2 m - k)^2 + (r\omega)^2] \times [(\omega^2 m - k) + jr\omega]$ .

Подставляя заданные значения, получаем численные уравнения.

Для  $S$  имеем:  $S = 100 + j190$  при  $\omega = 100$  1/с;  $S = 100 + j294$  при  $\omega = 150$  1/с;  $S = 100 + j395$  для  $\omega = 200$  1/с;  $S = 100 + j496$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $v = v_1 = v_2 = v_3$  имеем:  $v = 0,043 - j0,083$  при  $\omega = 100$  1/с;  $v = 0,021 - j0,061$  при  $\omega = 150$  1/с;  $v = 0,012 - j0,048$  при  $\omega = 200$  1/с;  $v = 0,0078 - j0,039$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $S_1$  имеем:  $S_1 = j200$  при  $\omega = 100$  1/с;  $S_1 = j300$  при  $\omega = 150$  1/с;  $S_1 = j400$  при  $\omega = 200$  1/с;  $S_1 = j500$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $S_3$  имеем:  $S_3 = -j10$  при  $\omega = 100$  1/с;  $S_3 = -j6$  при  $\omega = 150$  1/с;  $S_3 = -j5$  при  $\omega = 200$  1/с;  $S_3 = -j4$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $S_2$  имеем:  $r = 100$  при всех значениях  $\omega$ .

Для  $Q_1$  имеем:  $Q_1 = 16,3 + j8,6$  при  $\omega = 100$  1/с;  $Q_1 = 18,5 + j6,3$  при  $\omega = 150$  1/с;  $Q_1 = 19 + j4,8$  при  $\omega = 200$  1/с;  $Q_1 = 19,8 + j4$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $Q_3$  имеем:  $Q_3 = -0,83 - j0,4$  при  $\omega = 100$  1/с;  $Q_3 = -0,4 - j0,14$  при  $\omega = 150$  1/с;  $Q_3 = -0,24 - j0,06$  при  $\omega = 200$  1/с;  $Q_3 = -0,16 - j0,03$  при  $\omega = 250$  1/с.

Для  $Q_2$  имеем:  $Q_2 = 4,3 - j8,3$  при  $\omega = 100$  1/с;  $Q_2 = 2,1 - j6,1$  при  $\omega = 150$  1/с;  $Q_2 = 1,2 - j4,8$  при  $\omega = 200$  1/с;  $Q_2 = 0,78 - j3,9$  при  $\omega = 250$  1/с.

Эти численные уравнения представлены на рис. 2.8.

Из рисунка видно, что сила  $Q_1$  нарастает, а силы  $Q_2$  и  $Q_3$  уменьшаются (при этом для наглядности координаты силы  $Q_2$  увели-

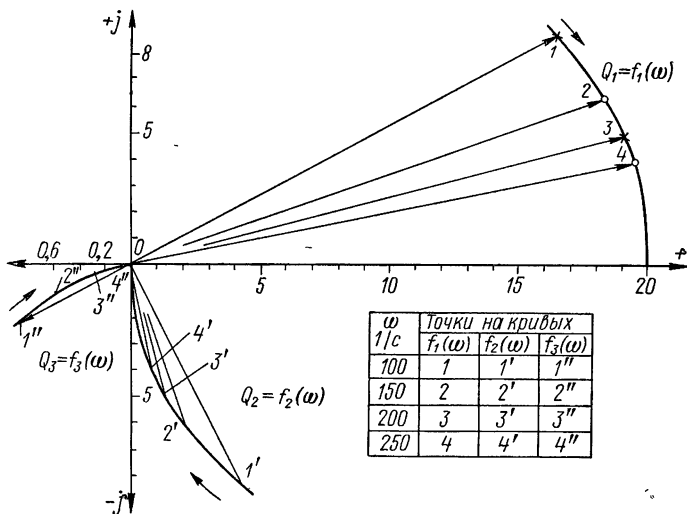


Рис. 2.8. Построение изменений величин сил в элементах системы в зависимости от сопротивления

чены в пять раз) Линии действия сил для массы, сопротивления и упругости подтверждают ранее выведенную зависимость, что силы  $Q_1$  и  $Q_3$  расположены на одной прямой линии, хотя и имеют противоположные знаки, а сила  $Q_2$  располагается перпендикулярно к линии  $Q_1Q_3$ .

С увеличением  $\omega$  все соответствующие векторы сил  $Q_1, Q_2, Q_3$  поворачиваются по часовой стрелке, сохраняя между собой взаимосвязанную угловую зависимость.

**Динамическая система, состоящая из массы, сопротивления и упругости.** Система и ее механическая цепь показаны на рис. 2.9. Для этой системы (рис. 2.9, а) рассмотрим два варианта: действие силы  $Q'(t)$  через массу и действие силы  $Q''(t)$  через полюс, соединяющий элементы  $r$  и  $k$ . Для обоих вариантов параметрами системы будут масса  $m = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м, сопротивление  $r = 100$  кгс·с/м, упругость  $k = 1000$  кгс/м; внешняя сила  $Q' = Q'' = 20$  кгс, круговая частота  $\omega = 100$  250 1/с. Построенная механическая

цепь (рис. 2.9, б) для силы  $Q'$  рассматривается от точек 6 — (3; 4) — 2—1—5, а для силы  $Q''$  от точек 7—2 — (3; 4) — 5—1.

Требуется определить силы, скорости и комплексные сопротивления в элементах и звеньях системы. Приводим окончательные формулы без выводов:

$$S' = \frac{\omega^2 m^2 r}{(\omega m)^2 + r^2} - j \left[ \frac{[(\omega m)^2 + r^2] k - \omega^2 m r^2}{(\omega m)^2 + r^2} \right] \frac{1}{\omega};$$

$$S'_{12} = \frac{\omega^2 m^2 r}{(\omega m)^2 + r^2} + j \left( \frac{\omega m r^2}{(\omega m)^2 + r^2} \right);$$

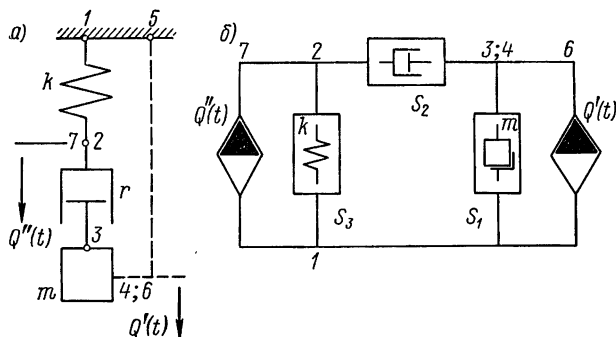


Рис. 2.9. Система  $m-r-k$ , когда сила действует в полосу между  $r$  и  $k$

$$v' = v_3' = v_{12}' = \frac{Q' \omega}{r^2 (\omega^2 m - k)^2 + (\omega k m)^2} \times$$

$$\times \{ \omega^3 m^2 r - j [r^2 (\omega^2 m - k) - \omega^2 k m^2] \},$$

$$S_1' = j \omega m; \quad S_2' = r; \quad S_3' = \frac{k}{j \omega};$$

$$Q'_{12} = Q_1' = Q_2'.$$

На рис. 2.10 показаны частотные зависимости для всех параметров  $S'$ ,  $S_1'$ ,  $S_2'$ ,  $S_3'$ ,  $S'_{12}$ ,  $Q'$ ,  $Q_1'$ ,  $Q_2'$ ,  $Q_3'$ ,  $Q'_{12}$ ,  $v'$ ,  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $v_3'$ ,  $v'_{12}$ ,  $S''$ ,  $S_1''$ ,  $S_2''$ ,  $S_3''$ ,  $S''_{12}$ ,  $Q''$ ,  $Q_1''$ ,  $Q_2''$ ,  $Q_3''$ ,  $Q''_{12}$ ,  $v_1''$ ,  $v_2''$ ,  $v_3''$ ,  $v''_{12}$ ,  $v''$ . По второму варианту при тех же параметрах системы также определяем силы, скорости и комплексные сопротивления в элементах и звене системы.

Приводим окончательные формулы без выводов:

$$S'' = \frac{k^2 r}{(\omega r)^2 + k^2} + j \left[ \frac{\omega [m (\omega^2 r^2 + k^2) - k r^2]}{(\omega r)^2 + k^2} \right];$$

$$v'' = v_1'' = v_{23}'' = \frac{Q''}{(k r - \omega^2 m r)^2 + (\omega m k)^2} \{ k^2 r - j \omega [m (\omega^2 r^2 + k^2) - k r^2] \};$$

$$S_1'' = j\omega m; \quad S_2'' = r; \quad S_3'' = \frac{k}{j\omega}; \quad S_{23} = \frac{kr}{(\omega r)^2 + k^2} (k - j\omega r);$$

$$Q_{23}'' = Q_2'' = Q_3'' = \frac{Q''rk}{(kr - \omega^2 mr)^2 + (\omega mk)^2} [(kr - \omega^2 mr) - j\omega mk];$$

$$v_2'' = \frac{Q''k}{(kr - \omega^2 mr)^2 + (\omega mk)^2} [(kr - \omega^2 mr) - j\omega mk];$$

$$v_3'' = \frac{Qr\omega}{(kr - \omega^2 mr)^2 + (\omega mk)^2} [\omega mk + j(kr - \omega^2 mr)].$$

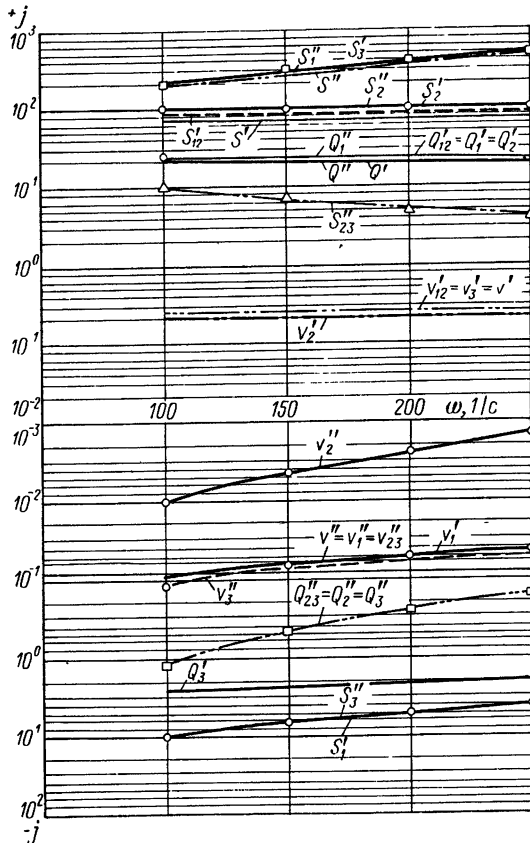


Рис. 2.10. Изменение значений  $S_i$ ,  $v_i$ ,  $Q_i$  в зависимости от  $\omega$

На рис. 2.10 показаны количественные и качественные изменения, зависящие от места приложения внешней нагрузки. Особенно это заметно для значений сил  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_{23}$ , а также скоростей  $v$ ,  $v_1$ ,  $v_{23}$ ,  $v_{12}$ .

## 2.4. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ И СКОРОСТЕЙ В МЕХАНИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Очень важно при исследовании работы механизма или части его представлять истинное взаимодействие между элементами, составляющими механизм, понимать взаимосвязь между ними, учитывать скрытые связи действительной динамической системы. В этом разделе на ряде примеров показаны эпюры распределения сил и скоростей.

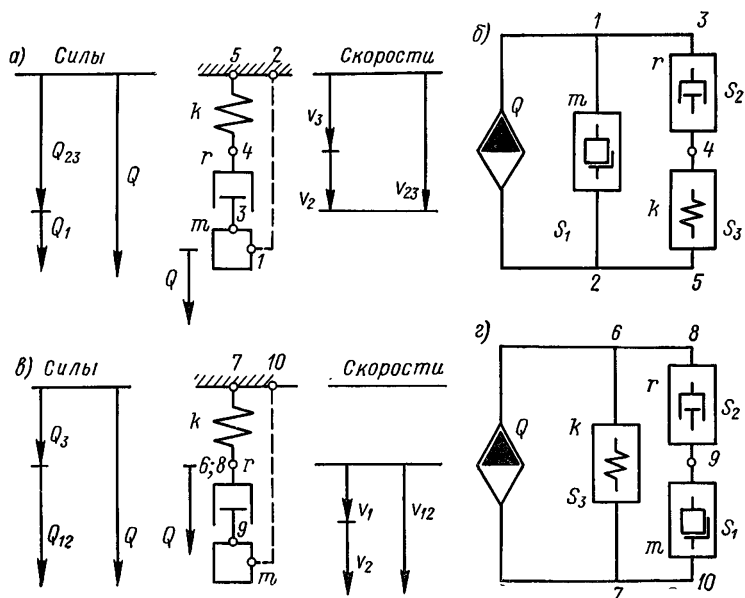


Рис. 2.11 Распределение сил и скоростей в системе  $m-r-k$

**Система, состоящая из массы, сопротивления и упругости (рис. 2.11).** Для наглядности рядом с динамическими системами (рис. 2.11, а, б) изображены соответствующие механические цепи (рис. 2.11, в, г), на которых четко выделены элементы, соединенные в звенья, что будет оправдано. Обе системы здесь одинаковые, но на рис. 2.11, а сила приложена к массе, а на рис. 2.11, в — в точке 6. Как видно из рис. 2.11, б, в цепях 1—2 и 3—4—5 скорости будут одинаковые ( $v = v_1 = v_{23} = v_2 + v_3$ ), а в элементах  $S_2$  и  $S_3$  — одинаковые силы ( $Q_{23} = Q_2 = Q_3 = Q$ ). В случае приложения силы в точке 6—8 (рис. 2.11, в) эпюра  $Q_i$  и  $v_i$  будет иная — скорости в цепях 6—7 и 8—9—10 будут одинаковые  $v = v_3 = v_{12} = v_1 + v_2$ , а в элементах  $S_2$  и  $S_1$  будут одинаковые силы:  $Q = Q_3 + Q_{12} = Q_1 = Q_2$ .

Построенные рядом с динамической системой эпюры сил и скоростей наглядно представляют разобранное.

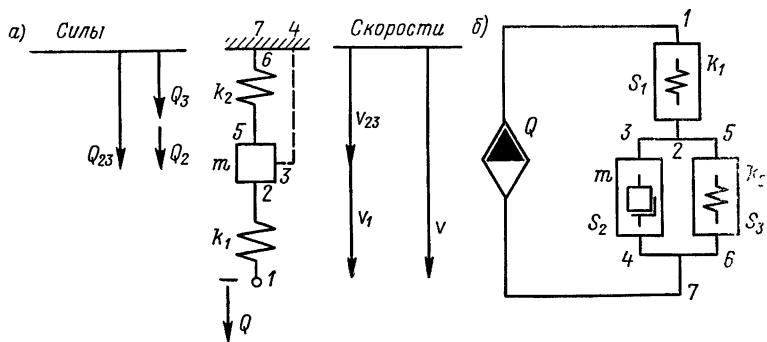


Рис. 2.12. Распределение сил и скоростей в системе  $k_1-m-k_2$

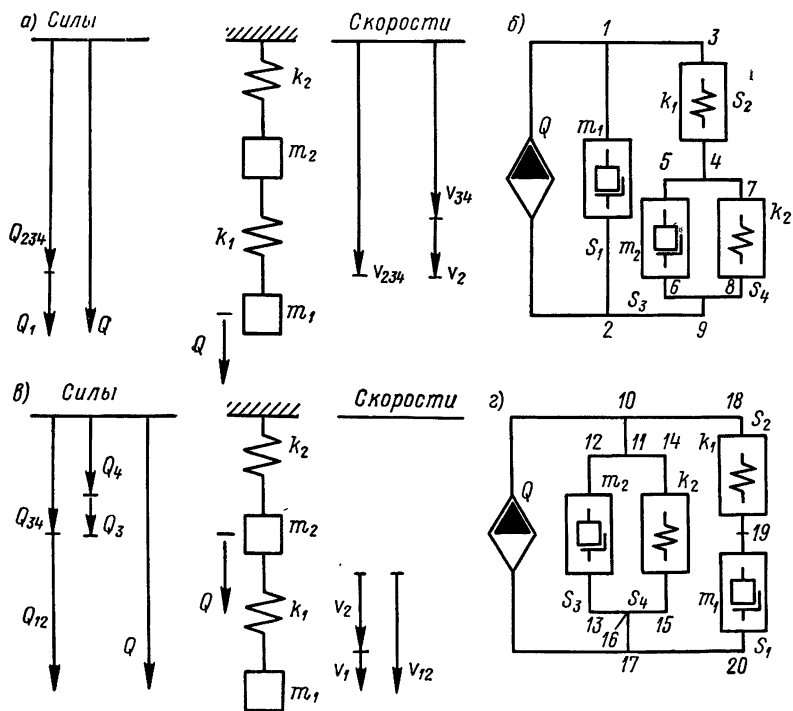


Рис. 2.13. Распределение сил и скоростей в системе  $m_1-k_1-m_2-k_2$

**Система, состоящая из массы и двух упругостей (рис. 2.12).** Рассматривая построенную механическую цепь (рис. 2.12, б), следует отметить, что на упругость  $k_1$ , на которую действует сила  $Q$ , и на два элемента  $S_2$  и  $S_3$ , соединенные параллельно, действует сила  $Q = Q_1 = Q_{23} = Q_2 + Q_3$ . На каждый из элементов  $S_2$  и  $S_3$  также действуют одинаковые скорости  $v = v_1 + v_{23} = v_2 = v_3$ . Другими словами — в цепях 1—2 и 2—7 силы одинаковые; в цепях 3—4 и 5—6 одинаковые скорости.

**Система, состоящая из двух масс и двух упругостей (рис. 2.13).** Когда сила  $Q$  действует на массу  $m_1$ , то в двух параллельных цепях 1—2 и 3—9 одинаковые скорости равны скорости системы  $v_1 = v_{234}$ ; в цепях 3—4 и 4—9 одинаковые силы ( $Q_2 = Q_{34} = Q_{234}$ ), а в цепях 5—6 и 7—8 — одинаковые, но иной величины ( $v_{34} = v_3 = v_4$ ) скорости. Следует обратить внимание, что в случае, когда сила  $Q$  приложена к массе  $m_2$ , эпюра распределения получается несколько иная: в цепях 10—17 и 18—20 также действуют одинаковые скорости, равные скорости системы, при этом в цепях 12—13 и 14—15 скорости также равны скорости системы, т. е.  $v = v_3 = v_4 = v_{34} = v_{12} = v_1 + v_2$ . Силы находятся в такой зависимости:  $Q = Q_{12} + Q_{34}$ ;  $Q_{12} = Q_1 = Q_2$ ,  $Q_{34} = Q_3 + Q_4$ .

## 2.5. ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ДВУХ СИЛ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Имеются случаи в практике, когда на динамическую систему действуют несколько гармонических сил с разной амплитудой и разной круговой частотой. Общим методом решения такой задачи с использованием механических цепей будет анализ поведения системы от действия каждой силы — определение ПКС и ЧКС системы, звеньев и элементов, а также сил и скоростей в них; все это сводится в таблицу. С такой же последовательностью необходимо проделать заполнение граф таблицы для каждой последующей силы; с учетом знаков, стоящих перед коэффициентами, найдем результивные значения.

Динамическая система, состоящая из массы, сопротивления и упругости (рис. 2.14, а). На систему действуют одновременно две силы  $Q'(t)$  и  $Q''(t)$ , первая действует через массу  $m$ , а вторая — через полюс, соединяющий сопротивление и упругость.

Рассмотрим два случая: частоты гармонических колебаний одинаковые и разные.

Случай 1.  $\omega = \omega_1 = \omega_2$ . Определение действия силы  $Q'$  на элементы  $m$ ,  $r$ ,  $k$ . Из предыдущего материала установлено, что ЧКС звена 23 будет  $S_{23} = S_2 S_3 / (S_2 + S_3)$ .

ПКС системы

$$S' = S_1 + S_{23} = \frac{S_1(S_2 + S_3) + S_2 S_3}{S_2 + S_3}.$$

Скорость в системе будет  $v' = Q' / S'$ , при этом одним штрихом будем обозначать значения ПКС, ЧКС,  $Q'_i$  и  $v'_i$  при действии силы  $Q'$ , а двумя штрихами — при действии силы  $Q''$ .

В элементе 1  $v'_1 = v' = \frac{Q'_1}{S'} = \frac{Q'_1(S_2 + S_3)}{S_1(S_2 + S_3) + S_2S_3}$ ,  $Q_1 = S_1v'_1$ ; в звене 23  $v''_{23} = v' = v'_1$ ,  $Q''_{23} = S_{23}v''_{23} = S_{23}v'$ ; в элементе 2  $Q'_2 = Q''_{23}$ ;  $v'_2 = Q'_2/S_2$ ; в элементе 3  $Q'_3 = Q''_{23}$ ,  $v'_3 = Q'_3/S_3$ .

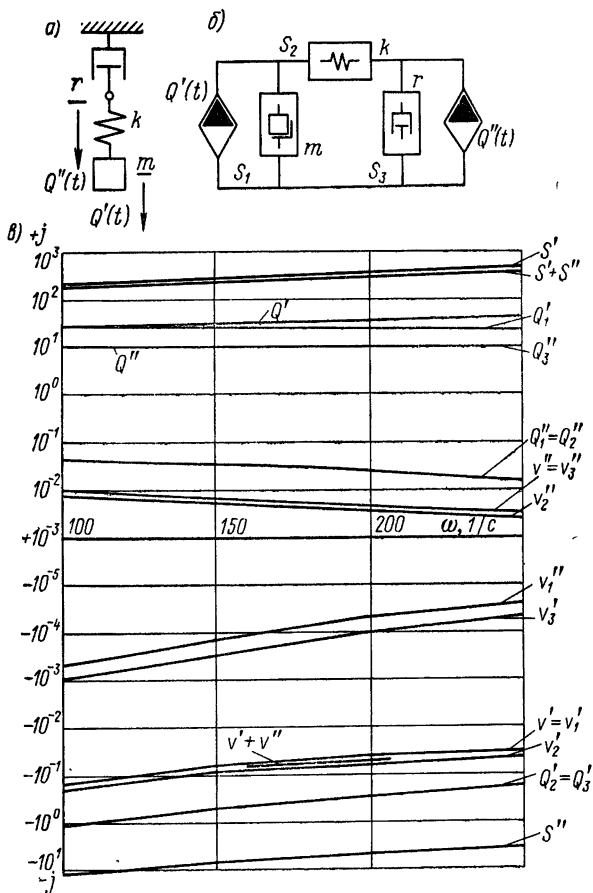


Рис. 2.14. Одновременное действие двух сил в системе

Подставим в выведенные уравнения значения комплексных сопротивлений элементов при действии силы  $Q'(\xi)$ :

$$S_{23} = \frac{S_2S_3}{S_2 + S_3} = \frac{\frac{k}{j\omega} r}{\frac{k}{j\omega} + r} = \frac{krj\omega}{j\omega(k + j\omega r)} = \frac{kr}{k + j\omega r};$$

$$S' = S_1 + S_{23} = j\omega m + \frac{kr}{k + j\omega r} = \frac{j\omega km - \omega^2 mr + kr}{k + j\omega r};$$



$$v' = v'_1 = v'_{23} = \frac{Q' (k + j\omega r)}{kr - \omega^2 mr + j\omega km};$$

$$Q'_1 = S_1 v'_1 = \frac{j\omega m Q' (k + j\omega r)}{kr - \omega^2 mr + j\omega km}; \quad Q'_2 = Q'_3 = Q'_{23};$$

$$Q'_{23} = S_{23} v' = \frac{kr Q' (k + j\omega r)}{(k + j\omega r) (kr - \omega^2 mr + j\omega km)} = \frac{Q' kr}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km)};$$

$$v'_2 = \frac{Q'_2}{S_2} = \frac{Q' kr j\omega}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km) k} = \frac{j\omega r Q'}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km)};$$

$$v'_3 = \frac{Q'_3}{S_3} = \frac{Q' kr}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km) r} = \frac{Q' k}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km)}.$$

Определение действия силы  $Q''$  на элементы  $m$ ,  $r$ ,  $k$ .

ЧКС звена 12  $S_{12} = S_1 S_2 / (S_1 + S_2)$ .

ПКС системы  $S'' = S_3 + S_{12} = \frac{S_3 (S_1 + S_2) + S_1 S_2}{S_1 + S_2}$ .

Скорость в системе

$$v'' = \frac{Q''}{S''} = \frac{Q'' (S_1 + S_2)}{S_3 (S_1 + S_2) + S_1 S_2}.$$

В элементе 3  $v''_3 = v''$ ,  $Q''_3 = S_3 v''_3$ ; в звене 12  $v''_{12} = v''_3 = v''$ ,  $Q''_{12} = S_{12} v''_{12}$ , в элементе 1  $Q''_1 = Q''_{12} = Q''_2$ ,  $v''_1 = Q''_1 / S_1$ , в элементе 2  $v''_2 = Q''_2 / S_2$ .

Подставим в эти выведенные уравнения значения комплексных сопротивлений элементов при действии силы  $Q''(t)$ :

$$S_{12} = \frac{j\omega m \frac{k}{j\omega}}{j\omega m + \frac{k}{j\omega}} = \frac{j\omega km}{k - \omega^2 m},$$

$$S'' = r + \frac{j\omega km}{k - \omega^2 m} = \frac{kr - \omega^2 mr + j\omega km}{k - \omega^2 m};$$

$$v'' = \frac{Q''}{S''} = \frac{Q'' (k - \omega^2 m)}{kr - \omega^2 mr + j\omega km}.$$

В элементе 3  $v''_3 = v''$ ,

$$Q''_3 = \frac{Q'' (k - \omega^2 m) r}{kr - \omega^2 mr + j\omega km};$$

в звене 12  $v''_{12} = v''_3 = v''$ ,  $Q''_{12} = S_{12} v''_{12}$ ;

$$Q''_{12} = \frac{j\omega km Q'' (k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m) (kr - \omega^2 mr + j\omega km)} = \frac{j\omega km Q''}{kr - \omega^2 mr + j\omega km};$$

в элементе 1

$$v''_1 = \frac{Q''_1}{S_1} = \frac{j\omega km Q''}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km) j\omega m} = \frac{Q'' k}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km)};$$

$$v''_2 = \frac{Q''_2}{S_2} = \frac{j\omega km Q'' j\omega}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km) k} = \frac{-Q'' \omega^2 m}{(kr - \omega^2 mr + j\omega km)},$$

$$Q''_1 = Q''_{12} = Q''_2.$$

Найдем значения сил и скоростей в элементах, учитывая влияние сил  $Q'(t)$  и  $Q''(t)$ :

$$Q_1 = Q'_1 + Q''_1 = \frac{j\omega m Q'(k + j\omega r)}{kr - \omega^2 mr + j\omega km} + \frac{j\omega km Q''}{kr - \omega^2 mr + j\omega km} = \frac{j\omega m [Q'(k + j\omega r) + Q''k]}{kr - \omega^2 mr + j\omega km}.$$

Примем  $(kr - \omega^2 mr + j\omega km) = b$ , тогда

$$Q_2 = Q'_2 + Q''_2 = \frac{Q'kr}{b} + \frac{Q''j\omega km}{b}; \quad Q_2 = \frac{k}{b} (Q'r + j\omega m Q'');$$

$$Q_3 = Q'_3 + Q''_3 = \frac{Q'kr}{b} + \frac{Q''(k - \omega^2 m)r}{b};$$

$$Q_3 = \frac{r}{b} [Q'k + Q''(k - \omega^2 m)]; \quad v_1 = v'_1 + v''_1 = \frac{Q'(k + j\omega r)}{b} + \frac{Q''k}{b};$$

$$v_1 = \frac{1}{b} [Q'(k + j\omega r) + Q''k];$$

$$v_2 = v'_2 + v''_2 = \frac{j\omega r Q'}{b} + \left(-\frac{\omega^2 m Q''}{b}\right);$$

$$v_2 = \frac{\omega}{b} (jrQ' - \omega m Q''); \quad v_3 = v'_3 + v''_3 = \frac{Q'k}{b} + \frac{Q''(k - \omega^2 m)}{b};$$

$$v_3 = \frac{1}{b} [Q'k + Q''(k - \omega^2 m)].$$

Случай 2.  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Окончательные выражения при действии силы  $Q'$  будут:

$$S'_{23} = \frac{kr}{k + j\omega_1 r}; \quad S' = \frac{j\omega_1 km - \omega_1^2 mr + kr}{k + j\omega_1 r};$$

$$v' = v'_1 = v'_{23} = \frac{Q'(k + j\omega_1 r)}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 km};$$

$$Q'_1 = \frac{j\omega_1 m Q'(k + j\omega_1 r)}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 km}; \quad Q'_{23} = \frac{Q'kr}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 km};$$

$$Q'_{23} = Q'_2 = Q'_3;$$

$$v'_2 = \frac{j\omega_1 r Q'}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 km}; \quad v'_3 = \frac{Q'k}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 km}.$$

Окончательные выражения при действии силы  $Q''$  будут:

$$S''_{12} = \frac{j\omega_2 km}{k - \omega_2^2 m}; \quad S'' = \frac{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km}{k - \omega_2^2 m};$$

$$v'' = v''_{12} = v''_3 = \frac{Q''(k - \omega_2^2 m)}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km}; \quad Q''_3 = \frac{Q''(k - \omega_2^2 m)r}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km};$$

$$Q''_{12} = \frac{j\omega_2 km Q''}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km}; \quad v''_1 = \frac{Q''k}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km};$$

$$v''_2 = \frac{-Q\omega_2^2 m}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km}; \quad v''_3 = \frac{Q''(k - \omega_2^2 m)}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 km}.$$

Значения сил и скоростей при совместном действии сил  $Q'$  и  $Q''$  на систему:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q'_1 + Q''_1 = \frac{j\omega_1 m Q' (k + j\omega_1 r)}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \frac{j\omega_2 k m Q''}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk}; \\
 Q_2 &= Q'_2 + Q''_2 = \frac{Q' kr}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \frac{Q'' j\omega_2 k m}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk}; \\
 Q_3 &= Q'_3 + Q''_3 = \frac{Q' kr}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \frac{Q'' (k - \omega_2^2 m) r}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk}; \\
 v_1 &= v'_1 + v''_1 = \frac{Q' (k + j\omega_1 r)}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \frac{Q'' k}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk}; \\
 v_2 &= v'_2 + v''_2 = \frac{j\omega_1 r Q'}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \left( - \frac{\omega_2^2 m Q''}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk} \right); \\
 v_3 &= v'_3 + v''_3 = \frac{Q' k}{kr - \omega_1^2 mr + j\omega_1 mk} + \frac{Q'' (k - \omega_2^2 m)}{kr - \omega_2^2 mr + j\omega_2 mk}.
 \end{aligned}$$

Пример 1. Пусть  $m = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $r = 100$  кгс·с/м;  $k = 1000$  кгс/м;  $Q' = 20$  кгс;  $Q'' = 10$  кгс;  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 100$  1/с. Пропуская предварительные расчеты, на рис. 2.14, в изобразим зависимость сил и скоростей при действии отдельных и совместных сил  $Q'(t)$ ,  $Q''(t)$ .

## 2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ И СКОРОСТЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА СИСТЕМУ

Система, состоящая из массы и упругости (см. рис. 1.21, а). Из (1.6) известно, что для этой системы при действии гармонической скорости  $v(t)$  (так называемое кинематическое воздействие) механическая цепь представлена на рис. 1.21, б. Согласно теореме 5 можно написать, что ПКП системы  $L = L_1 + L_2$ . Так как  $L_1 = 1/S_1 = 1/(j\omega m) = -j \cdot 1/(\omega m)$ ;  $L_2 = 1/S_2 = \frac{1}{k/(j\omega)} = j\omega/k$ ;  $L = L_1 + L_2 = -j \cdot 1/(\omega m) + j\omega/k = j [(\omega^2 m - k)/(\omega km)]$ .

Определим силы и скорости в системе и элементах. Если  $S = Q/v$ , то  $1/S = v/Q$ ;  $L = v/Q$ .

Зная скорость, определим силу в системе  $Q = v/L$ .

Сила  $Q$  будет действовать во всех элементах последовательного соединения, поэтому  $Q = Q_1 = Q_2$ . Скорость в элементе  $L_1$   $v_1 = L_1 Q = -jQ/(\omega m)$ ; скорость в элементе  $L_2$   $v_2 = L_2 Q = jQ\omega/k$ .

Система, состоящая из массы, упругости и сопротивления (рис. 1.21, в). Для этой системы механическая цепь состоит из последовательно соединенных элементов (см. рис. 1.21; г)  $m$ ,  $r$ ,  $k$ , а внешним источником является скорость  $v(t)$ : ПКП системы  $L = L_1 + L_2 + L_3$ ;  $L_1 = -j \cdot 1/(\omega m)$ ;  $L_2 = 1/r$ ;  $L_3 = j\omega/k$ ;  $L = j [(\omega^2 m - k)/(\omega km)] + 1/r = j [(\omega^2 m - k)/(\omega km)] + 1/r = (j\omega^2 m - jk)/(\omega km) + 1/r = (j\omega^2 mr - jkr + \omega km)/(\omega kmr)$ ;  $L = 1/r + j [(\omega^2 m - k)/(\omega km)]$ .

Определим силу в системе  $Q = v/L = Q_1 = Q_2 = Q_3$ ,  $Q = v\omega kmr/[jr(\omega^2 m - k) + \omega km]$ .

Пусть  $jr(\omega^2 m - k) + \omega km = \psi$ . Скорости в отдельных элементах будут:  $v_1 = L_1 Q = 1/(j\omega m) v\omega kmr/\psi = vkr/(j\psi) = -jvkr/\psi$ ;  $v_2 = L_2 Q = 1/r Q = v\omega kmr/r\psi = v\omega km/\psi$ ;  $v_3 = L_3 Q = j\omega kmr/\psi = jv\omega^2 mr/\psi$ .

**Система, состоящая из массы, сопротивления и двух упругостей (рис. 2.15, а).** Механическая цепь (рис. 2.15, б) представляет собой повторение предыдущей схемы, однако наличие в по-

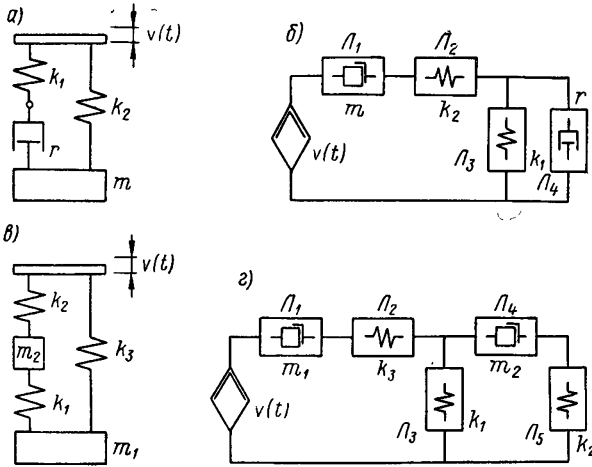


Рис. 2.15. Система под действием скорости, передаваемой на платформу

следовательном соединении упругости  $k_1$  в системе требует ее изображения в параллельной с элементом  $r$  цепи. ЧКП звена 34 представляет собой параллельное соединение, в котором скорость будет общая, т. е.  $v_{34} = v_3 = v_4$ , а сила  $Q_{34} = Q_3 + Q_4$ . Поэтому  $L_{34} = L_3 L_4 / (L_3 + L_4)$ . Если  $L_1 = -j1/(\omega m)$ ;  $L_2 = j\omega/k_2$ ;  $L_3 = j\omega/k_1$ ;  $L_4 = 1/r$ , то  $L_{34} = \frac{j\omega/k_1 \cdot 1/r}{j\omega/k_1 + 1/r} = \frac{j\omega}{k_1 r [(j\omega r + k_1)/(k_1 r)]} = \frac{j\omega}{j\omega r + k_1}$ .

ЧКП звена 12 будет  $L_{12} = L_1 + L_2 = -j1/(\omega m) + j\omega/k_2 = j [(\omega^2 m - k_2)/(\omega k_2 m)]$ .

ПКП системы соответствует  $L = L_{12} + L_{34} = (j\omega^2 m - jk_2)/(\omega k_2 m) + j\omega/(j\omega r + k_1)$ ;  $L = [(j\omega^2 m - jk_2)(j\omega r + k_1) + j\omega^2 k_2 m]/[j\omega^2 k_2 m r + \omega k_1 k_2 m]$ ;  $L = [\omega r (k_2 - \omega^2 m) + j(\omega^2 k_2 m - k_1 k_2 + \omega^2 k_2 m)]/[\omega k_2 m (j\omega r + k_1)]$ .

Зная ПКП системы, найдем силу  $Q = v/L$ , а дальше по звеньям и элементам найдем силы и скорости в них.

**Система, состоящая из двух масс и трех упругостей (рис. 2.15, в).** Механическая цепь показана на рис. 2.15, г.

Укажем основные пути решения:  $L_{45} = L_4 + L_5$ ;  $L_{345} = L_3 L_{45} / (L_3 + L_{45})$ ,  $L_{12} = L_1 + L_2$ ;  $L = L_{12} + L_{345} = [(L_1 + L_2)(L_3 + L_4 + L_5) + L_3(L_4 + L_5)] / (L_3 + L_4 + L_5)$

Определим силу в системе и силы и скорости в звеньях и элементах по ранее показанной методике.

Система типа трамвая, у которой имеется подвеска колес типа «упругость—сопротивление» и сиденье с упругим элементом (рис. 2.16, а). На основании конструктивного решения построена динамическая система (рис. 2.16, б), основная масса  $m_2$ , масса сиденья с пассажиром  $m_1$ . Механическая цепь показана на

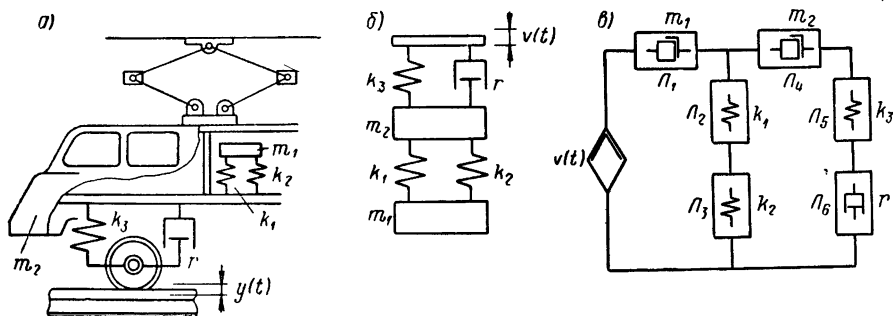


Рис. 2.16. Система типа трамвая

рис. 2.16, в. Определим ЧКП звеньев и ПКП системы:  $L_{456} = L_4 + L_5 + L_6$ ,  $L_{23} = L_2 + L_3$ ;  $L_{2...6} = L_{23} L_{456} / (L_{23} + L_{456}) = [(L_2 + L_3)(L_4 + L_5 + L_6)] / (L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6)$ ;  $L = L_1 + L_{2...6} = [L_1(L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_2 + L_3)(L_4 + L_5 + L_6)] / (L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6)$ . Остальные действия по определению численных значений сил, скоростей, ПКС и ЧКС вполне очевидны.

## 2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ В НЕПЛАНАРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Существуют динамические системы, решение которых не может быть осуществлено обычными методами, рассмотренными в этой работе; имеются в виду системы со многими степенями свободы, у которых, как правило, помимо связей между тремя массами (рис. 2.17, а) или другими элементами существует прямая связь между первой и третьей массами (или другими элементами). При построении механической цепи (рис. 2.17, б) возникает дополнительная ветвь, в данном случае с параллельно соединенной упругостью  $k_4$ , это так называемые цепи с перекрещивающимися линиями соединения элементов или непланарные механические цепи. Подобная механическая цепь с перекрещивающимися линиями в полюсах 1 и 2 не позволяет пользоваться обычными методами расчета комплексных сопротивлений, сил и скоростей.

Как видно из рис. 2.17,  $\delta$ , упругости  $k_1, k_2, k_4$  или соответствующие этим элементам сопротивления, которые для данного случая обозначим через  $S_{31}, S_{23}, S_{12}$ , образуют соединение треугольником с вершинами 1, 2, 3.

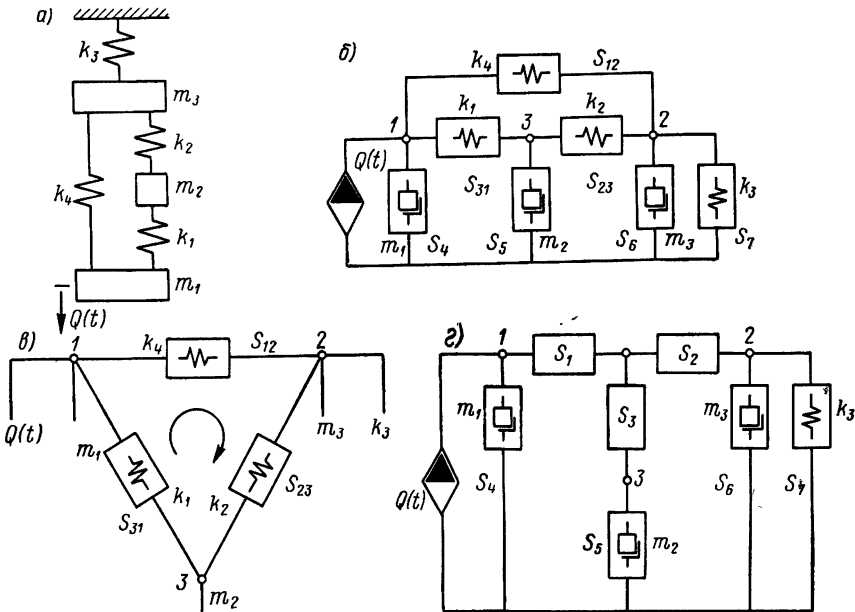


Рис. 2.17. Непланарная динамическая система

Можно поставить задачу о преобразовании данного механического треугольника в соединение эквивалентных элементов, составляющих механическую звезду. Соот-

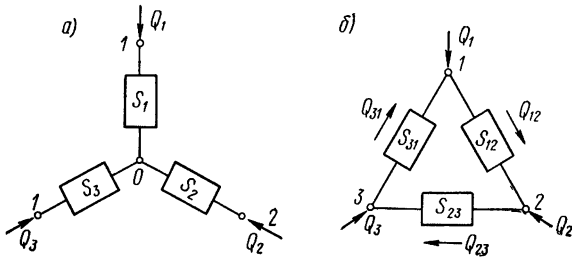


Рис. 2.18. Соединение механических сопротивлений типа звезды и треугольника

ношение это формальное, так как сопротивление  $r$  в механическом соединении и  $R$  в электрическом соединении находятся в обратной зависимости  $r \equiv 1/R$ . Эквивалентность должна состоять в том, чтобы входные сопротивления звезды между полюсами 1—2, 2—3,

3—1 были бы равны соответствующим входным сопротивлениям треугольника.

**Соединение сопротивлений в виде звезды.** Пусть дано соединение механических элементов с комплексными сопротивлениями  $S_1, S_2, S_3$ , соединенными в виде звезды (рис. 2.18, а). В точках 1, 2, 3 приложены соответственно силы  $Q_1, Q_2, Q_3$ , выраженные в звезде через разности действующих скоростей  $v_1, v_2, v_3, v_0$  и сопротивления двуполусных элементов соединения  $S_1, S_2, S_3$ .

Для соединения звездой

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0. \quad (2.21)$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= (v_1 - v_0) S_1; \\ Q_2 &= (v_2 - v_0) S_2; \\ Q_3 &= (v_3 - v_0) S_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Подставляя значения  $Q_i$  из (2.22) в (2.21), имеем:

$$\begin{aligned} (v_1 - v_0) S_1 + (v_2 - v_0) S_2 + (v_3 - v_0) S_3 &= 0; \\ S_1 v_1 - S_1 v_0 + S_2 v_2 - S_2 v_0 + S_3 v_3 - S_3 v_0 &= 0; \\ S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3 &= v_0 (S_1 + S_2 + S_3); \\ v_0 &= \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подставим значения  $v_0$  из (2.23) в (2.22) и получим:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( v_1 - \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3} \right) S_1 = \\ &= \frac{(S_1 v_1 + S_2 v_1 + S_3 v_1 - S_1 v_1 - S_2 v_2 - S_3 v_3) S_1}{S_1 + S_2 + S_3}; \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{S_1 (S_2 + S_3) v_1}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_1 S_2 v_2}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_1 S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left( v_2 - \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3} \right) S_2 = \\ &= \frac{(S_1 v_2 + S_2 v_2 + S_3 v_2 - S_1 v_1 - S_2 v_2 - S_3 v_3) S_2}{S_1 + S_2 + S_3}; \end{aligned}$$

$$Q_2 = \frac{S_2 (S_1 + S_3) v_2}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_1 S_2 v_1}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_2 S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \left( v_3 - \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3} \right) S_3 = \\ &= \frac{(S_1 v_3 + S_2 v_3 + S_3 v_3 - S_1 v_1 - S_2 v_2 - S_3 v_3) S_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \end{aligned}$$

$$Q_3 = \frac{S_3 (S_1 + S_2) v_3}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_1 S_3 v_1}{S_1 + S_2 + S_3} - \frac{S_2 S_3 v_2}{S_1 + S_2 + S_3}. \quad (2.26)$$

Для соединения треугольником (рис. 2.18, б) имеем, учитывая индексы у скоростей по направлению действия сил:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{12} - Q_{31} = (v_1 - v_2) S_{12} - (v_3 - v_1) S_{31}; \\ Q_1 &= S_{12}v_1 - S_{12}v_2 - S_{31}v_3 + S_{31}v_1; \\ Q_1 &= (S_{12} + S_{31}) v_1 - S_{12}v_2 - S_{31}v_3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Приравнивая значения коэффициентов при  $v_2$  в уравнениях (2.27) и (2.24), получаем:

$$\begin{aligned} -S_{12}v_2 &= -\frac{S_1 S_2 v_2}{S_1 + S_2 + S_3}; \\ S_{12} &= \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2 + S_3}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Точно так же

$$\begin{aligned} -S_{31}v_3 &= -\frac{S_1 S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \\ S_{31} &= \frac{S_1 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Точно так же, для соединения треугольником напомним зависимости для  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_{23} - Q_{12} = (v_2 - v_3) S_{23} - (v_1 - v_2) S_{12}; \\ Q_2 &= S_{23}v_2 - S_{23}v_3 - S_{12}v_1 + S_{12}v_2; \\ Q_2 &= (S_{23} + S_{12}) v_2 - S_{23}v_3 - S_{12}v_1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Приравнивая значения коэффициентов при  $v_1$  в уравнениях (2.30) и (2.25), получаем:  $-S_{12}v_1 = -\frac{S_1 S_2 v_1}{S_1 + S_2 + S_3}$ ;  $S_{12} = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2 + S_3}$ , что доказано ранее в (2.28). Точно также

$$\begin{aligned} -S_{23}v_3 &= -\frac{S_2 S_3 v_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \\ S_{23} &= \frac{S_2 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Итак, найдены эквивалентные комплексные сопротивления для перехода от звезды к треугольнику:

$$\left. \begin{aligned} S_{12} &= \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2 + S_3}; \\ S_{23} &= \frac{S_2 S_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \\ S_{31} &= \frac{S_3 S_1}{S_1 + S_2 + S_3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

**Соединение сопротивлений в виде треугольника.** Определим теперь комплексные сопротивления  $S_1, S_2, S_3$  для соединения тре-



угольником по известным сопротивлениям  $S_{12}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{31}$  соединения звездой. Преобразуем величины в (2.32) на обратные, т. е. представим эти сопротивления в виде подвижностей.

Пусть

$$L_1 = 1/S_1; \quad L_2 = 1/S_2; \quad L_3 = 1/S_3; \quad (2.33)$$

$$L_{12} = 1/S_{12}; \quad L_{23} = 1/S_{23}; \quad L_{31} = 1/S_{31}. \quad (2.34)$$

Напишем уравнения в новых обозначениях:

$$L_{12} = \frac{1}{S_{12}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1 S_2} = \frac{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}{\frac{1}{L_1} \frac{1}{L_2}};$$

$$L_{12} = \frac{\frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_1 L_2 L_3}}{\frac{1}{L_1 L_2}} = \frac{(L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3) L_1 L_2}{L_1 L_2 L_3} = \\ = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3}{L_3}.$$

Пусть

$$L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 = E. \quad (2.35)$$

В таком случае

$$\left. \begin{aligned} L_{12} &= E/L_3; \\ L_{23} &= E/L_1; \\ L_{31} &= E/L_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

или

$$\left. \begin{aligned} L_3 &= E/L_{12}; \\ L_1 &= E/L_{23}; \\ L_2 &= E/L_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Подставим в (2.35) значения (2.37) и получим

$$E = \frac{E}{L_{23}} \frac{E}{L_{31}} + \frac{E}{L_{23}} \frac{E}{L_{12}} + \frac{E}{L_{31}} \frac{E}{L_{12}} = E^2 \left( \frac{1}{L_{23} L_{31}} + \frac{1}{L_{23} L_{12}} + \frac{1}{L_{31} L_{12}} \right);$$

после преобразования

$$E = E^2 \left( \frac{L_{12} + L_{31} + L_{23}}{L_{12} L_{23} L_{31}} \right); \quad E = \frac{L_{12} L_{23} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}. \quad (2.38)$$

Подставляя выражение (2.38) в первое значение (2.37), найдем

$$L_3 = \frac{L_{12} L_{23} L_{31}}{(L_{12} + L_{23} + L_{31}) L_{12}} = \frac{L_{23} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}. \quad (2.39)$$

Подставляя выражение (2.38) во второе значение (2.37), найдем

$$L_1 = \frac{L_{12} L_{23} L_{31}}{(L_{12} + L_{23} + L_{31}) L_{23}} = \frac{L_{12} L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}. \quad (2.40)$$

Подставляя выражение (2.38) в третье значение (2.37), найдем

$$L_2 = \frac{L_{12}L_{23}L_{31}}{(L_{12} + L_{23} + L_{31})L_{31}} = \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}. \quad (2.41)$$

Подставим в выражения (2.39), (2.40), (2.41) значения из (2.33) и (2.34) и получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_3} &= \frac{\frac{1}{S_{23}} \frac{1}{S_{31}}}{\frac{1}{S_{12}} + \frac{1}{S_{23}} + \frac{1}{S_{31}}} = \frac{S_{12}S_{23}S_{31}}{(S_{23}S_{31} + S_{12}S_{31} + S_{12}S_{23})S_{23}S_{31}}; \\ S_3 &= S_{23} + S_{31} + \frac{S_{23}S_{31}}{S_{12}}; \quad \frac{1}{S_1} = \frac{\frac{1}{S_{12}} \frac{1}{S_{31}}}{\frac{1}{S_{12}} + \frac{1}{S_{23}} + \frac{1}{S_{31}}} = \\ &= \frac{S_{12}S_{23}S_{31}}{(S_{23}S_{31} + S_{12}S_{31} + S_{12}S_{23})S_{12}S_{31}}; \quad S_1 = S_{12} + S_{31} + \frac{S_{12}S_{31}}{S_{23}}; \\ \frac{1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{S_{12}} \frac{1}{S_{23}}}{\frac{1}{S_{12}} + \frac{1}{S_{23}} + \frac{1}{S_{31}}} = \frac{S_{12}S_{23}S_{31}}{(S_{23}S_{31} + S_{12}S_{31} + S_{12}S_{23})S_{12}S_{23}}; \\ S_2 &= S_{12} + S_{23} + \frac{S_{12}S_{23}}{S_{31}}. \end{aligned}$$

Итак, найдены эквивалентные комплексные сопротивления для перехода от треугольника к звезде:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S_{12} + S_{31} + S_{12}S_{31}/S_{23}; \\ S_2 &= S_{12} + S_{23} + S_{12}S_{23}/S_{31}; \\ S_3 &= S_{23} + S_{31} + S_{23}S_{31}/S_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

**Пример 2.** Определить ПКС динамической системы (рис. 2.17, а), обладающей свойством непланарности. Механическая цепь этой системы (рис. 2.17, б) рассчитывается с учетом выведенных формул (2.42) для перехода от треугольника с сопротивлениями  $S_{12}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{31}$  (рис. 2.17, б) к звезде с эквивалентными сопротивлениями  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ .

Этап 1. Определение эквивалентных сопротивлений звезды:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{12} + S_{31} + \frac{S_{12}S_{31}}{S_{23}} = \frac{k_4}{j\omega} + \frac{k_1}{j\omega} + \frac{\frac{k_4}{j\omega} \frac{k_1}{j\omega}}{\frac{k_2}{j\omega}} = \\ &= \frac{k_1 + k_4}{j\omega} + \frac{k_1k_4}{j\omega k_2}; \quad S_1 = \frac{k_1k_2 + k_4(k_1 + k_2)}{j\omega k_2}; \\ S_2 &= S_{12} + S_{23} + \frac{S_{12}S_{23}}{S_{31}} = \frac{k_4}{j\omega} + \frac{k_2}{j\omega} + \frac{\frac{k_4}{j\omega} \frac{k_2}{j\omega}}{\frac{k_1}{j\omega}} = \frac{k_2 + k_4}{j\omega} + \frac{k_2k_4}{j\omega k_1}; \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{k_1 k_2 + k_4 (k_1 + k_2)}{j\omega k_1}; \quad S_3 = S_{23} + S_{31} + \frac{S_{23} S_{31}}{S_{12}} = \frac{k_2}{j\omega} + \frac{k_1}{j\omega} + \frac{k_2}{j\omega} \frac{k_1}{j\omega} = \frac{k_1 + k_2}{j\omega} + \frac{k_1 k_2}{j\omega k_4}; \quad S_3 = \frac{k_1 k_2 + k_4 (k_1 + k_2)}{j\omega k_4}.$$

Этап 2. ЧКС всех элементов системы:

$$S_4 = j\omega m_1; \quad S_5 = j\omega m_2; \quad S_6 = j\omega m_3; \quad S_7 = k_3/(j\omega); \quad S_{12} = k_4/(j\omega); \quad S_{23} = k_2/(j\omega) \\ S_{31} = k_1/(j\omega); \quad S_1 = \frac{k_1 k_2 + k_4 (k_1 + k_2)}{j\omega k_2}; \quad S_2 = \frac{k_1 k_2 + k_4 (k_1 + k_2)}{j\omega k_1}; \\ S_3 = \frac{k_1 k_2 + k_4 (k_1 + k_2)}{j\omega k_4};$$

Этап 3. Определение ЧКС звеньев и ПКС системы: для звена 67

$$S_{67} = j\omega m_3 + \frac{k_3}{j\omega};$$

для звена 267

$$S_{267} = \frac{(k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4) (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)};$$

для звена 35

$$S_{35} = \frac{j\omega m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4)}{(k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 - \omega^2 m_2 k_4)};$$

для звена  $S_{35267}$

$$S_{35267} = \frac{j\omega m_2 (k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4)}{(k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 - \omega^2 k_4 m_2)} + \frac{(k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4) (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)};$$

где

$$k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 = h; \\ S_{35267} = \frac{j\omega m_2 h}{h - \omega^2 k_4 m_2} + \frac{h (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (h + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)};$$

для звена 135267

$$S_{135267} = \frac{\frac{h}{j\omega k_2} \left( \frac{j\omega m_2 h}{h - \omega^2 k_4 m_2} + \frac{h (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (h + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)} \right)}{\left( \frac{h}{j\omega k_2} + \frac{j\omega m_2 h}{h - \omega^2 k_4 m_2} + \frac{h (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (h + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)} \right)}; \\ S = j\omega m_1 + \frac{\frac{h}{j\omega k_2} \left( \frac{j\omega m_2 h}{h - \omega^2 k_4 m_2} + \frac{h (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (h + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)} \right)}{\left( \frac{h}{j\omega k_2} + \frac{j\omega m_2 h}{h - \omega^2 k_4 m_2} + \frac{h (k_3 - \omega^2 m_3)}{j\omega (h + k_1 k_3 - \omega^2 k_1 m_3)} \right)}.$$

Пример 3. Предыдущий пример проделан при следующих параметрах:  $m_1 = m_2 = m_3 = 2$  кг·с<sup>2</sup>/м;  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1000$  кгс/м;  $\omega = 100$  1/с. В таком случае:  $S_4 = j200$ ;  $S_{31} = S_{12} = S_{23} = S_7 = -j10$ ;  $S_4 = S_5 = S_6 = j200$ . Вычисленные значения для сложных элементов соответствуют  $S_1 = S_2 = S_3 = -j30$ .

Случай 1. В динамической системе (рис. 2.17, а, б)  $m_2 = 0$ ; в этом случае отсутствует непланарность цепи, так как  $S_5 = 0$ . Вычисленная величина ПКС  $S = j 183,8$  кгс·с/м.

Случай 2. В динамической системе  $m_2 = 0$  и  $k_4 = 0$ ; в этом случае также отсутствует непланарность цепи, так как  $S_5 = 0$  и, кроме того,  $S_{12} = 0$ .

Величина ПКС  $S = j 194,6$  кгс·с/м.

Случай 3. В динамической системе  $k_4 = 0$ ; в этом случае также отсутствует непланарность цепи, так как  $S_{12} = 0$ . Величина ПКС  $S = j 189,5$  кгс·с/м.

Случай 4. Механическая цепь непланарная (рис. 2.17, в). Величина ПКС  $S = j 178,8$  кгс·с/м.

Наибольшим будет ПКС у системы, состоящей из двух масс (случай 2). Система с тремя степенями свободы (случай 3) несколько уменьшает ПКС. Дальнейшее снижение ПКС заметно у системы с двумя степенями свободы, но с параллельными ветвями упругости (случай 1). Наименьшая величина ПКС наблюдается у непланарной цепи системы (случай 4).

В этой главе рассмотрены способы определения ПКС и ЧКС для широкого круга динамических задач по построенным механическим цепям; на основании этого систематически показано, как определить силу и скорость в каждом элементе, в каждом звене и во всей системе при действии на нее силы или скорости (или перемещения). В то же время этот метод позволяет определить действительную силу, скорость или перемещение в интересующем элементе системы. Все это показано на ряде подобранных примеров. Вместе с тем показаны методы решения задач при одновременном действии двух или более сил. В заключении главы приводится метод решения задач для непланарных механических цепей.

## МЕХАНИЧЕСКИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

## 3.1. СУЩНОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Механическим четырехполюсником называется любая механическая система, в которой отмечены две пары точек, поведение которых взаимозависимо. Различие между двухполюсником и четырехполюсником заключается не в свойствах системы элементов, а в способе описания этих свойств: одна и та же система может рассматриваться в качестве двухполюсника и в качестве четырехполюсника.

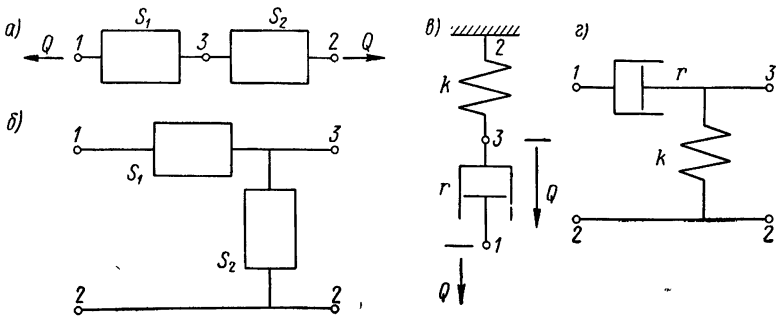


Рис. 3.1. Понятие о МЧП

Рассмотрим соединение пары двухполюсников с сопротивлениями  $S_1$  и  $S_2$  между точками 1 и 2, на которое действует сила  $Q^1$  (рис. 3.1, а). Этих данных достаточно, чтобы определить ПКС и скорость для последовательного соединения:

$$S = S_1 S_2 / (S_1 + S_2); \quad v = Q/S = Q (S_1 + S_2) / (S_1 S_2).$$

Эти же двухполюсники можно рассматривать иначе, если известна сила между точками 1 и 2. Требуется определить скорость, например, между точками 3 и 2 (рис. 3.1, б). В данном случае эта система будет представлять собой четырехполюсник с входными полюсами 1 и 2 и выходными 3 и 2 (рис. 3.1, в, з). Таким образом, в то время как двухполюсник характеризуется силой и скоростью,

<sup>1</sup> Подразумевается комплексная сила вида  $Q(t)$ ; для упрощения рассуждений обозначена  $Q$ .

МЧП характеризуется двумя силами и двумя скоростями:  $Q_1, v_1$  на входе и  $Q_2, v_2$  на выходе. Режим работы МЧП полностью определяется, если известны силы  $Q_1, Q_2$  и скорости  $v_1, v_2$ ; обычно две из этих величин известны, две другие определяются из основных уравнений четырехполюсника, записываемых в одном из шести вариантов (табл. 3.1).

Т а б л и ц а 3.1

Взаимосвязи между силами (крутящими моментами) и скоростями (угловыми скоростями) механического четырехполюсника

| Варианты | Система параметров | Величины       |                      |                |                      |
|----------|--------------------|----------------|----------------------|----------------|----------------------|
|          |                    | неизвестные    |                      | известные      |                      |
|          |                    | Движение       |                      |                |                      |
|          |                    | поступательное | вращательное         | поступательное | вращательное         |
| 1        | <i>L</i>           | $v_1, v_2$     | $\delta_1, \delta_2$ | $Q_1, Q_2$     | $M_1, M_2$           |
| 2        | <i>S</i>           | $Q_1, Q_2$     | $M_1, M_2$           | $v_1, v_2$     | $\delta_1, \delta_2$ |
| 3        | <i>B</i>           | $Q_1, v_1$     | $M_1, \delta_1$      | $v_2, Q_2$     | $\delta_2, M_2$      |
| 4        | <i>V</i>           | $Q_2, v_2$     | $M_2, \delta_2$      | $v_1, Q_1$     | $\delta_1, M_1$      |
| 5        | <i>Ш</i>           | $Q_2, v_1$     | $M_2, \delta_1$      | $v_2, Q_1$     | $\delta_2, M_1$      |
| 6        | <i>W</i>           | $Q_1, v_2$     | $M_1, \delta_2$      | $v_1, Q_2$     | $\delta_1, M_2$      |

### 3.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЧП

В соответствии со вторым законом Ньютона и его развитием, принципом Даламбера, для механических динамических систем число уравнений соответствует числу степеней свободы.

Пусть для системы с  $n$  степеней свободы существует  $n$  уравнений

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2 + \dots + S_{1n}v_n; \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2 + \dots + S_{2n}v_n; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Q_n &= S_{n1}v_1 + S_{n2}v_2 + \dots + S_{nn}v_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Неизвестные величины скоростей найдем решением этой системы методом определителей.

Решение системы уравнений методом определителей. Возьмем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Исключая одно из неизвестных, например  $x_3$ , из (3.2), получим:

$$x_3 = \frac{b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2}{a_{13}} = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2}{a_{23}};$$

$$b_1 a_{23} - a_{11} a_{23} x_1 - a_{12} a_{23} x_2 = b_2 a_{13} - a_{13} a_{21} x_1 - a_{13} a_{22} x_2;$$

$$x_1 (a_{11} a_{23} - a_{13} a_{21}) + x_2 (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) = b_1 a_{23} - b_2 a_{13}; \quad (3.3)$$

$$x_3 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2}{a_{23}} = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}};$$

$$x_1 (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + x_2 (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) = b_2 a_{33} - b_3 a_{23}. \quad (3.4)$$

Исключая из (3.3) и (3.4)  $x_2$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 a_{22} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} + a_{13} b_2 a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}}; \\ x_2 &= \frac{a_{11} b_2 a_{33} - a_{11} a_{23} b_3 + a_{13} a_{21} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}}; \\ x_3 &= \frac{a_{11} a_{22} b_3 - a_{11} b_2 a_{32} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31}}. \end{aligned} \right\} (3.5)$$

Т а б л и ц а 3.2

Коэффициенты определителя третьего порядка

|   |        |    |        |   |
|---|--------|----|--------|---|
| 1 | ↖ 11 ↗ | 12 | ↘ 13 ↙ | - |
| 5 | ↖ 21 ↗ | 22 | ↘ 23 ↙ | - |
| 3 | ↖ 31 ↗ | 32 | ↘ 33 ↙ | - |
| 6 | ↖ 11 ↗ | 12 | ↘ 13 ↙ | + |
| 2 | ↖ 21 ↗ | 22 | ↘ 23 ↙ | + |
| 4 | ↖ 21 ↗ | 22 | ↘ 23 ↙ | + |

В этой формуле все уравнения имеют общий знаменатель, который можно представить в виде определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Для наглядности приведем табл. 3.2 разложения определителя (в клетках помечены индексы коэффициента  $a$ ) ( $a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$ ).

Структура числителя и знаки перед многочленом точно такие же, как и у знаменателя, но в определенном порядке

вместо соответствующих коэффициентов при неизвестных расположены постоянные коэффициенты правой части уравнений ( $b_1, b_2, b_3$ ). Поэтому систему уравнений (3.5) можно представить в иной записи:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (3.7)$$

Произведем перегруппировку членов в знаменателе  $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$ . Члены, расположенные в скобках, являются развернутыми определителями второго порядка. Представим запись знаменателя в виде определителя  $\Delta$  третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Определитель следующего низшего порядка, получающийся путем вычеркивания строки и столбца, в котором стоит известный элемент, называется минором этого элемента. В определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ минор члена } a_{11} \text{ есть определитель } \Delta_{11} = \\ = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минор называют алгебраическим дополнением соответствующего элемента, если перед ним стоит определенный знак. Пусть элемент расположен в  $a$ -й строке и в  $b$ -м столбце; его минор, умноженный на  $(-1)^{a+b}$ , называется алгебраическим дополнением элемента и проставляется перед каждым минором; если  $a + b$  — величина нечетная, то перед минором будет знак минус, например  $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$ ; если  $a + b$  — величина четная, то перед минором будет знак плюс, например  $(-1)^{2+2} = (-1)^4 = +1$ .

Рассмотрим следующие свойства определителей: а) разложение определителя  $n$ -го порядка дает  $n!$  членов; б) если все элементы столбца или строки есть нули, то определитель равен нулю; в) если все элементы столбца или строки, кроме одного, равны нулю, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = c_2 (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$



г) величина определителя не изменяется, если заменить строки столбцами или наоборот; д) перестановка двух строк или столбцов одного на место другого изменяет знак определителя; е) если две строки или два столбца определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

**Решение системы  $n$ -уравнений в общем виде.** Для решения системы с  $n$ -степенями свободы (3.1) определителем коэффициентов системы уравнений будет

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \dots S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} \dots S_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n1} & S_{n2} \dots S_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Минором члена  $S_{22}$  будет определитель

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \dots S_{1n} \\ S_{31} & S_{33} \dots S_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n1} & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов определителя будут:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Q_1 & S_{12} \dots S_{1n} \\ Q_2 & S_{22} \dots S_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ Q_n & S_{n2} \dots S_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} S_{11} & Q_1 & S_{13} \dots S_{1n} \\ S_{21} & Q_2 & S_{23} \dots S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n1} & Q_n & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \dots S_{1(n-1)} & Q_1 \\ S_{21} & S_{22} \dots S_{2(n-1)} & Q_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_{n1} & S_{n2} \dots S_{n(n-1)} & Q_n \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

В таком случае неизвестные  $v_1, v_2, \dots, v_n$  находятся из (3.5) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= Q_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + Q_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + \dots + Q_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta}; \\ v_2 &= Q_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + Q_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + \dots + Q_n \frac{\Delta_{n2}}{\Delta}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v_n &= Q_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + Q_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} + \dots + Q_n \frac{\Delta_{nn}}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \tag{3.11}$$

Подставляя значения  $\Delta_{11}$  из (3.9) и другие  $\Delta_{12}, \Delta_{23} \dots$  в (3.11), получим решение системы уравнений в виде:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (-1)^{1+1} \frac{Q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{22} & S_{23} \dots S_{2n} \\ S_{32} & S_{33} \dots S_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n2} & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix} + \\
&+ (-1)^{1+2} \frac{Q_2}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} \dots S_{1n} \\ S_{32} & S_{33} \dots S_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n2} & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix} + \\
&+ \dots + (-1)^{1+n} \frac{Q_n}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{(n-1)2} & S_{(n-1)3} \dots & S_{(n-1)n} \end{vmatrix}; \\
v_2 &= (-1)^{2+1} \frac{Q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \dots S_{2n} \\ S_{31} & S_{33} \dots S_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n1} & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix} + \\
&+ (-1)^{2+2} \frac{Q_2}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} \dots S_{1n} \\ S_{31} & S_{33} \dots S_{3n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ S_{n1} & S_{n3} \dots S_{nn} \end{vmatrix} + \\
&+ \dots + (-1)^{2+n} \frac{Q_n}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{(n-1)1} & S_{(n-1)3} \dots & S_{(n-1)n} \end{vmatrix}; \\
\vdots & \\
v_n &= (-1)^{n+1} \frac{Q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2(n-1)} \\ S_{31} & S_{32} & \dots & S_{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{(n-1)1} & S_{(n-1)2} \dots & S_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} + \\
&+ (-1)^{n+2} \frac{Q_2}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1(n-1)} \\ S_{31} & S_{32} & \dots & S_{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{(n-1)1} & S_{(n-1)2} \dots & S_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} + \\
&+ \dots + (-1)^{n+n} \frac{Q_n}{\Delta} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1(n-1)} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{(n-1)1} & S_{(n-1)2} \dots & S_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В действительности рассмотренная система  $n$ -уравнений для четырехполюсника будет иметь несколько иной вид, так как только в двух уравнениях имеются силы; например, действующая сила  $+Q_1$  на входе и реактивная сила  $-Q_2$  на выходе; для всех остальных уравнений внутри четырехполюсника, не имеющих источника силы значения  $Q_i = Q_3 = Q_4 = \dots = 0$ .

В таком случае

$$\left. \begin{aligned} (+Q_1) &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2 + \dots + S_{1n}v_n, \\ (-Q_2) &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2 + \dots + S_{2n}v_n; \\ 0 &= S_{31}v_1 + S_{32}v_2 + \dots + S_{3n}v_n; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= S_{n1}v_1 + S_{n2}v_2 + \dots + S_{nn}v_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Рассматривая первые два уравнения и учитывая правила знаков для силы на выходе  $-Q_2$  и для алгебраических дополнений, можно написать основные уравнения четырехполюсника в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} +v_1 &= (-1)^{1+1} Q_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + (-1)^{1+2} Q_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + (-1)^{1+3} [Q_3 = 0] \frac{\Delta_{31}}{\Delta}; \\ -v_2 &= (-1)^{2+1} Q_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + (-1)^{2+2} Q_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + (-1)^{2+3} [Q_3 = 0] \frac{\Delta_{32}}{\Delta}; \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= Q_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} - Q_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta}; \\ v_2 &= Q_1 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} - Q_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Существует значительное количество параметров, характеризующих четырехполюсник. Принято все параметры разделять на первичные и вторичные. К первичным параметрам относятся параметры систем в зависимости от сочетаний сил и скоростей, входящих на вход и на выход системы.

Ко вторичным параметрам относятся так называемые характеристики сопротивления, коэффициенты трансформации и распределения, которые будут рассмотрены в гл. 5.

Таким образом, для решения задачи взаимосвязи между входом и выходом или воздействием и реакцией в четырехполюснике нужно располагать системой двух уравнений с двумя неизвестными, которые называются основными уравнениями МЧП. В дальнейшем будут рассматриваться только линейные и пассивные четырехполюсники, т. е. не содержащие источников энергии или содержащие, но взаимно скомпенсированные, а также обратимые, т. е. подчиняющиеся принципу взаимности, когда отношение силы на входе к скорости на выходе не зависит от того, что в МЧП является входом и что выходом.

Основной смысл теории МЧП заключается в том, что, пользуясь некоторыми обобщенными параметрами четырехполюсника, можно аналитически связать и исследовать силы и скорости на входе и выходе, не производя расчетов сил и скоростей внутри четырехполюсника.

### 3.3. ПЕРВИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МЧП

**Система Л-параметров (вариант 1).** Этой системой пользуются, когда требуется определить скорости на входе  $v_1$  и на выходе  $v_2$ , при условии, что известны силы на входе  $Q_1$  и выходе  $Q_2$ .

Рассматривая уравнения (3.15), примем:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}/\Delta_{\downarrow} &= L_{11}; & -\Delta_{21}/\Delta &= L_{12}; & \Delta_{12}/\Delta &= L_{21}; \\ & & -\Delta_{22}/\Delta &= L_{22}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В таком случае уравнения (3.15) для системы Л-параметров будут представлены:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= L_{11}Q_1 + L_{12}Q_2; \\ v_2 &= L_{21}Q_1 + L_{22}Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Коэффициенты (3.17), в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены из табл. 3.3. Систему уравнений (3.17) можно переписать, пользуясь методами матричного исчисления:

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} = \|L\| \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Из уравнений (3.17) следует, что если  $Q_2 = 0$ , то  $L_{11} = v_1/Q_1$  и  $L_{21} = v_2/Q_1$ ; если  $Q_1 = 0$ , то  $L_{12} = v_1/Q_2$  и  $L_{22} = v_2/Q_2$ . Во всех случаях для этой системы размерность  $[L] = [v/Q] = [м/(кгс \cdot с)]$  и соответствует подвижности.

В случае обратимого четырехполюсника  $L_{12} = -L_{21}$ ; для симметричного четырехполюсника  $L_{11} = -L_{22}$  и  $L_{12} = -L_{21}$ .

**Система S-параметров (вариант 2).** Этой системой пользуются, когда требуется определить силы на входе  $Q_1$  и на выходе  $Q_2$ , если известны скорости на входе  $v_1$  и на выходе  $v_2$ . Для перехода от системы Л-параметров в систему S-параметров выполним следующее. Определим из (3.17)  $Q_1$  и упростим

$$\begin{aligned} Q_1 &= (v_1 - L_{12}Q_2)/L_{11} = (v_2 - L_{22}Q_2)/L_{21}; \\ L_{21}v_1 - L_{12}L_{21}Q_2 &= L_{11}v_2 - L_{11}L_{22}Q_2; \\ Q_2 (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) &= -L_{21}v_1 + L_{11}v_2 = Q_2 |L| \end{aligned}$$

Значение определителя  $|L| = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$  взято из табл. 3.3 на пересечении первой строки и столбца 9.

$$Q_2 = -\frac{L_{21}}{|L|} v_1 + \frac{L_{11}}{|L|} v_2 = S_{21}v_1 + S_{22}v_2, \quad (3.19)$$

| Системы уравнений | Коэффициенты                                 | Матрицы  |  |  |  |  |
|-------------------|--|--|--|--|--|--|
|                   |  | $\ L\ $  | $\ S\ $  | $\ B\ $  | $\ V\ $  | $\ W\ $  |
| 1                 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| (3.17)            | $L_{11}$<br>$L_{12}$<br>$L_{21}$<br>$L_{22}$ | $L_{11}$ $L_{12}$<br>$L_{21}$ $L_{22}$   | $\frac{S_{22}}{ S } \left(-\frac{S_{12}}{ S }\right)$<br>$\left(-\frac{S_{21}}{ S }\right) \frac{S_{11}}{ S }$     | $\frac{B_{22}}{B_{12}} \left(-\frac{ B }{B_{12}}\right)$<br>$\frac{1}{B_{12}} \left(-\frac{B_{11}}{B_{12}}\right)$ | $\left(-\frac{B_{11}}{B_{12}}\right) \frac{1}{B_{12}}$<br>$\left(-\frac{ B }{B_{12}}\right) \frac{B_{22}}{B_{12}}$ | $\left(-\frac{ W }{ W_{12}}\right) \frac{ W_{22}}{ W_{12}}\right)$<br>$-\frac{ W_{11}}{ W_{12}} \frac{1}{ W_{12}}$                 |
| (3.23)            | $S_{11}$<br>$S_{12}$<br>$S_{21}$<br>$S_{22}$ | $\frac{L_{22}}{ L } \left(-\frac{L_{12}}{ L }\right)$<br>$\left(-\frac{L_{21}}{ L }\right) \frac{L_{11}}{ L }$     | $S_{11}$ $S_{12}$<br>$S_{21}$ $S_{22}$   | $\frac{B_{11}}{B_{21}} \left(-\frac{ B }{B_{21}}\right)$<br>$\frac{1}{B_{21}} \left(-\frac{B_{22}}{B_{21}}\right)$ | $\left(-\frac{B_{22}}{B_{21}}\right) \frac{1}{B_{21}}$<br>$\left(-\frac{ B }{B_{21}}\right) \frac{B_{11}}{B_{21}}$ | $\frac{1}{ W_{21}} \left(-\frac{ W_{22}}{ W_{21}}\right)$<br>$\frac{ W_{11}}{ W_{21}} \left(-\frac{ W_{12}}{ W_{21}}\right)$       |
| (3.30)            | $B_{11}$<br>$B_{12}$<br>$B_{21}$<br>$B_{22}$ | $\left(-\frac{L_{22}}{L_{21}}\right) \frac{1}{L_{21}}$<br>$\left(-\frac{ L }{L_{21}}\right) \frac{L_{11}}{L_{21}}$ | $\frac{S_{11}}{S_{21}} \left(-\frac{ S }{S_{21}}\right)$<br>$\frac{1}{S_{21}} \left(-\frac{S_{22}}{S_{21}}\right)$ | $B_{11}$ $B_{12}$<br>$B_{21}$ $B_{22}$   | $\frac{B_{22}}{ B } \left(-\frac{B_{12}}{ B }\right)$<br>$\left(-\frac{B_{21}}{ B }\right) \frac{B_{11}}{ B }$     | $\frac{1}{ W_{11}} \left(-\frac{ W_{12}}{ W_{11}}\right)$<br>$\frac{ W_{21}}{ W_{11}} \frac{ W_{11}}{ W_{11}}$                     |
| (3.35)            | $B_{11}$<br>$B_{12}$<br>$B_{21}$<br>$B_{22}$ | $\left(-\frac{L_{11}}{L_{12}}\right) \frac{1}{L_{12}}$<br>$\left(-\frac{ L }{L_{12}}\right) \frac{L_{22}}{L_{12}}$ | $\frac{S_{22}}{S_{12}} \left(-\frac{ S }{S_{12}}\right)$<br>$\frac{1}{S_{12}} \left(-\frac{S_{11}}{S_{12}}\right)$ | $\frac{B_{22}}{ B } \left(-\frac{B_{12}}{ B }\right)$<br>$\left(-\frac{B_{21}}{ B }\right) \frac{B_{11}}{ B }$     | $B_{11}$ $B_{12}$<br>$B_{21}$ $B_{22}$   | $\frac{ W_{11}}{ W_{22}} \frac{ W_{12}}{ W_{22}}$<br>$\left(-\frac{ W_{21}}{ W_{22}}\right) \frac{1}{ W_{22}}$                     |
| (3.39)            | $W_{11}$<br>$W_{12}$<br>$W_{21}$<br>$W_{22}$ | $\left(-\frac{L_{21}}{L_{22}}\right) \frac{1}{L_{22}}$<br>$\frac{ L }{L_{22}} \frac{L_{12}}{L_{22}}$               | $\frac{S_{21}}{S_{11}} \frac{ S }{S_{11}}$<br>$\frac{1}{S_{11}} \left(-\frac{S_{12}}{S_{11}}\right)$               | $\frac{1}{B_{11}} \left(-\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)$<br>$\frac{B_{21}}{B_{11}} \frac{ B }{B_{11}}$               | $\frac{ B }{B_{22}} \frac{B_{12}}{B_{22}}$<br>$\left(-\frac{B_{21}}{B_{22}}\right) \frac{1}{B_{22}}$               | $W_{11}$ $W_{12}$<br>$W_{21}$ $W_{22}$   |
| (3.43)            | $W_{11}$<br>$W_{12}$<br>$W_{21}$<br>$W_{22}$ | $\left(-\frac{L_{12}}{L_{11}}\right) \frac{1}{L_{11}}$<br>$\frac{ L }{L_{11}} \frac{L_{21}}{L_{11}}$               | $\frac{S_{12}}{S_{22}} \frac{ S }{S_{22}}$<br>$\frac{1}{S_{22}} \left(-\frac{S_{21}}{S_{22}}\right)$               | $\frac{ B }{B_{22}} \frac{B_{12}}{B_{22}}$<br>$\left(-\frac{B_{21}}{B_{22}}\right) \frac{1}{B_{22}}$               | $\frac{1}{B_{11}} \left(-\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)$<br>$\frac{B_{21}}{B_{11}} \frac{ B }{B_{11}}$               | $\frac{ W_{22}}{ W_{11}} \left(-\frac{ W_{12}}{ W_{11}}\right)$<br>$\left(-\frac{ W_{21}}{ W_{11}}\right) \frac{ W_{11}}{ W_{11}}$ |

## параметры МЧП

| W  | Определители                  |  |  |  |  |  |
|--|-------------------------------|--|--|--|--|--|
|  | J                             | S  | B  | B  | Ш  | W  |
| 8  | 9                             | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   |
| $\frac{1}{W_{12}} \left( -\frac{W_{11}}{W_{12}} \right)$<br>$\frac{W_{22}}{W_{12}} \left( -\frac{ W }{W_{12}} \right)$ | $J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$ | $1/ S $  | $-B_{21}/B_{12}$                                   | $-B_{21}/B_{12}$                                   | $Ш_{21}/Ш_{12}$                                    | $W_{21}/W_{12}$                                    |
| $\left( -\frac{ W }{W_{21}} \right) \frac{W_{11}}{W_{21}}$<br>$\left( -\frac{W_{22}}{W_{21}} \right) \frac{1}{W_{21}}$ | $1/ J $                       | $\frac{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}}{S_{12}S_{21}}$ | $-B_{12}/B_{21}$                                   | $-B_{12}/B_{21}$                                   | $Ш_{12}/Ш_{21}$                                    | $W_{12}/W_{21}$                                    |
| $\frac{ W }{W_{22}} \frac{W_{12}}{W_{22}}$<br>$\left( -\frac{W_{21}}{W_{22}} \right) \frac{1}{W_{22}}$                 | $-J_{12}/J_{21}$              | $-S_{12}/S_{21}$                                   | $\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{12}B_{21}}$ | $1/ B $  | $Ш_{22}/Ш_{11}$                                    | $W_{11}/W_{22}$                                    |
| $\frac{1}{W_{11}} \left( -\frac{W_{12}}{W_{11}} \right)$<br>$\frac{W_{21}}{W_{11}} \frac{ W }{W_{11}}$                 | $-J_{21}/J_{12}$              | $-S_{21}/S_{12}$                                   | $1/ B $  | $\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{12}B_{21}}$ | $Ш_{11}/Ш_{22}$                                    | $W_{22}/W_{11}$                                    |
| $\frac{W_{22}}{ W } \left( -\frac{W_{12}}{ W } \right)$<br>$\left( -\frac{W_{21}}{ W } \right) \frac{W_{11}}{ W }$     | $-J_{11}/J_{22}$              | $-S_{22}/S_{11}$                                   | $B_{22}/B_{11}$                                    | $B_{11}/B_{22}$                                    | $\frac{Ш_{11}Ш_{22} - Ш_{12}Ш_{21}}{Ш_{12}Ш_{21}}$ | $1/ W $  |
| $W_{11} \quad W_{12}$<br>$W_{21} \quad W_{22}$   | $-J_{22}/J_{11}$              | $-S_{11}/S_{22}$                                   | $B_{11}/B_{22}$                                    | $B_{22}/B_{11}$                                    | $1/ Ш $  | $\frac{W_{11}W_{22} - W_{12}W_{21}}{W_{12}W_{21}}$ |

отсюда

$$S_{21} = -\frac{J_{21}}{|J|}; \quad S_{22} = \frac{J_{11}}{|J|}. \quad (3.20)$$

Точно так же, из (3.17) определим  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_2 &= (v_1 - J_{11}Q_1)/J_{12} = (v_2 - J_{21}Q_1)/J_{22}; \\ J_{22}v_1 - J_{11}J_{22}Q_1 &= J_{12}v_2 - J_{12}J_{21}Q_1; \\ Q_1 (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}) &= J_{22}v_1 - J_{12}v_2 = Q_1 |J|; \\ Q_1 &= \frac{J_{22}}{|J|} v_1 - \frac{J_{12}}{|J|} v_2 = S_{11}v_1 + S_{12}v_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

отсюда имеем

$$S_{11} = \frac{J_{22}}{|J|}; \quad S_{12} = -\frac{J_{12}}{|J|}. \quad (3.22)$$

Учитывая полученные значения (3.19) и (3.21) для  $Q_1$  и  $Q_2$ , уравнения системы  $S$ -параметров будут:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2; \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Коэффициенты (3.20) и (3.22) в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены по табл. 3.3. Систему уравнений (3.23) можно переписать, пользуясь методами матричного исчисления:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \|S\| \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

Из уравнений (3.23) следует, что если  $v_2 = 0$ , то  $S_{11} = Q_1/v_1$  и  $S_{21} = Q_2/v_1$ , если  $v_1 = 0$ , то  $S_{12} = Q_1/v_2$  и  $S_{22} = Q_2/v_2$ . Во всех случаях для этой системы размерность  $[S] = [Q/v] = [\text{кгс} \cdot \text{с/м}]$  и соответствует сопротивлению.

В случае обратимого четырехполюсника  $S_{12} = -S_{21}$ ; для симметричного четырехполюсника  $S_{11} = -S_{22}$  и  $S_{12} = -S_{21}$ .

**Система  $B$ -параметров (вариант 3).** Этой системой пользуются, когда требуется определить данные о входе: силу  $Q_1$  и скорость  $v_1$ , при условии, что известны данные о выходе: сила  $Q_2$  и скорость  $v_2$ .

Для перехода от системы  $S$ -параметров в систему  $B$ -параметров выполним следующее. Из второго уравнения (3.23) определим  $v_1$ :

$$\begin{aligned} S_{21}v_1 &= Q_2 - S_{22}v_2; \\ v_1 &= \frac{Q_2}{S_{21}} - \frac{S_{22}}{S_{21}}v_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставим полученное выражение для  $v_1$  в первое уравнение (3.23):

$$Q_1 = S_{11} \left( \frac{Q_2}{S_{21}} - \frac{S_{22}}{S_{21}} v_2 \right) + S_{12} v_2 = \frac{S_{11}}{S_{21}} Q_2 - \frac{S_{11} S_{22}}{S_{21}} v_2 + S_{12} v_2;$$

$$Q_1 = \frac{S_{11}}{S_{21}} Q_2 + \left( S_{12} - \frac{S_{11} S_{22}}{S_{21}} \right) v_2 = \frac{S_{11}}{S_{21}} Q_2 + \left( \frac{S_{12} S_{21} - S_{11} S_{22}}{S_{21}} \right) v_2,$$

$$Q_1 = \frac{S_{11}}{S_{21}} Q_2 + \left[ \frac{-(S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21})}{S_{21}} \right] v_2 = \frac{S_{11}}{S_{21}} Q_2 + \left( -\frac{|S|}{S_{21}} \right) v_2. \quad (3.26)$$

Выражение  $S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}$  взято из табл. 3.3 на пересечении второй строки и столбца 10 и равно  $|S|$ .

Примем:

$$\frac{S_{11}}{S_{21}} = B_{11}; \quad -\frac{|S|}{S_{21}} = B_{12}. \quad (3.27)$$

В таком случае  $Q_1 = B_{11} Q_2 + B_{12} v_2$ . Из уравнения (3.25) можем написать

$$v_1 = \frac{1}{S_{21}} Q_2 + \left( -\frac{S_{22}}{S_{21}} \right) v_2. \quad (3.28)$$

Примем:

$$\frac{1}{S_{21}} = B_{21}; \quad \left( -\frac{S_{22}}{S_{21}} \right) = B_{22}. \quad (3.29)$$

Уравнения системы  $B$ -параметров будут:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11} Q_2 + B_{12} v_2; \\ v_1 &= B_{21} Q_2 + B_{22} v_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Коэффициенты (3.27) и (3.29) в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены по табл. 3.3.

Из уравнений (3.30) следует, что если  $v_2 = 0$ , то  $B_{11} = Q_1/Q_2$  и  $B_{21} = v_1/Q_2$ ; если  $Q_2 = 0$ , то  $B_{12} = Q_1/v_2$  и  $B_{22} = v_1/v_2$ . Коэффициенты уравнений:  $[B_{11}]$  — безразмерный;  $[B_{12}] = [кгс \cdot с/м]$  — сопротивление;  $[B_{21}] = [м/кгс \cdot с]$  — подвижность;  $[B_{22}]$  — безразмерный.

В случае обратимого четырехполюсника можно написать

$$\begin{aligned} B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} &= -\frac{L_{22} L_{11}}{L_{21} L_{21}} - \frac{1}{L_{21}} \left[ \frac{-(L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21})}{L_{21}} \right] = \\ &= -\frac{L_{11} L_{22}}{L_{21}^2} + \frac{L_{11} L_{22}}{L_{21}^2} - \frac{L_{12} L_{21}}{L_{21}^2} = -\frac{L_{12}}{L_{21}} = 1, \end{aligned}$$

так как  $L_{12} = -L_{21}$  или окончательно  $B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} = 1$ .  
Для симметричного четырехполюсника  $B_{11} = B_{22}$ , тогда  $B_{11} = \sqrt{1 + B_{12} B_{21}}$ .



Для вращательного движения уравнения в системе  $B$ -параметров будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= B_{11}M_2 + M_{12}\delta_2; \\ \delta_1 &= B_{21}M_2 + B_{22}\delta_2. \end{aligned} \right\}$$

**Система  $B$ -параметров (вариант 4).** Этой системой пользуются, когда требуется определить данные о выходе — силу  $Q_2$  и скорость  $v_2$ , при условии, что известны данные о входе — сила  $Q_1$  и скорость  $v_1$ . Для перехода от системы  $B$ -параметров в систему  $V$ -параметров выполним следующие действия. Определим из первого уравнения (3.30)  $Q_2$ :

$$B_{11}Q_2 = Q_1 - B_{12}v_2 \text{ или } Q_2 = \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}v_2, \quad (3.31)$$

Определим из второго уравнения (3.30)  $v_2$

$$B_{22}v_2 = v_1 - B_{21}Q_2 \text{ или } v_2 = \frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}}Q_2. \quad (3.32)$$

Значение  $v_2$  из (3.32) подставим в (3.31) и получим:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \left( \frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}}Q_2 \right) = \\ &= \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}B_{22}}v_1 + \frac{B_{12}B_{21}}{B_{11}B_{22}}Q_2; \\ Q_2 \left( 1 - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{11}B_{22}} \right) &= \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}B_{22}}v_1; \\ Q_2 \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{11}B_{22}} \right) &= \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}B_{22}}v_1. \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на  $B_{11}B_{22}$ , получаем

$$Q_2 = B_{22}Q_1 - B_{12}v_1. \quad (3.33)$$

Для определения  $v_2$  подставим выражение (3.33) в (3.32) и получим

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}}(B_{22}Q_1 - B_{12}v_1) = \frac{v_1}{B_{22}} - B_{21}Q_1 + \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}}v_1, \\ v_2 &= -B_{21}Q_1 + \left( \frac{1}{B_{22}} + \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}} \right) v_1 = -B_{21}Q_1 + \\ &+ \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{22}} + \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}} \right) v_1; \\ v_2 &= -B_{21}Q_1 + B_{11}v_1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Примеч:  $B_{11} = B_{22}$ ;  $B_{12} = -B_{12}$ ;  $B_{21} = -B_{21}$ ;  $B_{22} = B_{11}$ . В таком случае из выражений (3.33) и (3.34) имеем

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= B_{11}Q_1 + B_{12}v_1; \\ v_2 &= B_{21}Q_1 + B_{22}v_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Коэффициенты (3.35) в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены по табл. 3.3. Уравнение (3.35) можно переписать, пользуясь методами матричного исчисления:

$$\begin{vmatrix} Q_2 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11}B_{12} \\ B_{21}B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ v_1 \end{vmatrix} = \|B\| \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ v_1 \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

Из уравнений (3.35) следует, что если  $v_1 = 0$ , то  $B_{11} = Q_2/Q_1$  и  $B_{21} = v_2/Q_1$ ; если  $Q_1 = 0$ , то  $B_{12} = Q_2/v_1$  и  $B_{22} = v_2/v_1$ .

Коэффициенты уравнений:  $[B_{11}]$  — безразмерный;  $[B_{12}] = [\text{кгс с/м}]$  — сопротивление;  $[B_{21}] = [\text{м/кгс с}]$  — подвижность;  $[B_{22}]$  — безразмерный.

В случае обратного четырехполюсника  $|B| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}$  —  $-B_{12}B_{21}$ , что получается из  $|B| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = B_{22}B_{11} - (-B_{12})(-B_{21}) = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = |B| = 1$ . Для симметричного четырехполюсника  $B_{11} = B_{22}$ .

**Система Ш-параметров (вариант 5).** Этой системой пользуются, когда требуется определить силу  $Q_2$  на выходе и скорость  $v_1$  на входе, при условии, что известны силы  $Q_1$  на входе и скорость  $v_2$  на выходе. Для перехода от системы  $B$ -параметров в систему Ш-параметров выполним следующее. Определим  $v_1$  из уравнения (3.34):

$$B_{11}v_1 = v_2 + B_{21}Q_1 \quad \text{или} \quad v_1 = \frac{v_2}{B_{11}} + \frac{B_{21}}{B_{11}} Q_1. \quad (3.37)$$

Подставив значение  $v_1$  в (3.33), получим:

$$Q_2 = B_{22}Q_1 - B_{12} \left( \frac{v_2}{B_{11}} + \frac{B_{21}}{B_{11}} Q_1 \right) = B_{22}Q_1 - \frac{B_{12}}{B_{11}} v_2 - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{11}} Q_1,$$

$$Q_2 = \left( B_{22} - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{11}} \right) Q_1 - \frac{B_{12}}{B_{11}} v_2 =$$

$$= \left( \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{11}} \right) Q_1 - \frac{B_{12}}{B_{11}} v_2,$$

$$Q_2 = \frac{|B|}{B_{11}} Q_1 - \frac{B_{12}}{B_{11}} v_2. \quad (3.38)$$

Примем, исходя из (3.37) и (3.38):  $Ш_{11} = \frac{|B|}{B_{11}}$ ;  $Ш_{12} = -\frac{B_{12}}{B_{11}}$ ;  
 $Ш_{21} = \frac{B_{21}}{B_{11}}$ ,  $Ш_{22} = \frac{1}{B_{11}}$ ; тогда

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Ш_{11}Q_1 + Ш_{12}v_2; \\ v_1 &= Ш_{21}Q_1 + Ш_{22}v_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Коэффициенты (3.39) в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены по табл. 3.3. Уравнения (3.39) можно переписать, пользуясь методами матричного исчисления:

$$\begin{vmatrix} Q_2 \\ v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ш_{11} & Ш_{12} \\ Ш_{21} & Ш_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \|Ш\| \cdot \begin{vmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

Из уравнений (3.39) следует, что если  $v_2 = 0$ , то  $\Pi_{11} = Q_2/Q_1$  и  $\Pi_{21} = v_1/Q_1$ ; если  $Q_1 = 0$ , то  $\Pi_{12} = Q_2/v_2$  и  $\Pi_{22} = v_1/v_2$ . Коэффициенты уравнений:  $[\Pi_{11}]$  — безразмерный;  $[\Pi_{12}] = [\text{кгс с/м}]$  — сопротивление;  $[\Pi_{21}] = [\text{м/кгс} \cdot \text{с}]$  — подвижность;  $[\Pi_{22}]$  — безразмерный. В случае обратимого четырехполюсника  $\Pi_{12} = \Pi_{21}$ ; для симметричного четырехполюсника  $|\Pi| = \Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}$ .

**Система W-параметров (вариант 6).** Этой системой пользуются, когда требуется определить силу  $Q_1$  на входе и скорость  $v_2$  на выходе, при условии, что известны данные о силе  $Q_2$  на выходе и скорости  $v_1$  на входе. Для перехода от системы B-параметров в систему W-параметров выполним следующее.

Из второго уравнения (3.30) имеем

$$B_{22}v_2 = v_1 - B_{21}Q_2 \text{ или } v_2 = \frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}}Q_2. \quad (3.41)$$

Подставляя значение  $v_2$  из (3.41) в первое уравнение (3.30), имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}\left(\frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}}Q_2\right) = B_{11}Q_2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}v_1 - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}}Q_2; \\ Q_1 &= \left(B_{11} - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}}\right)Q_2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}v_1 = \\ &= \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{22}}\right)Q_2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}v_1, \\ Q_1 &= \frac{|B|}{B_{22}}Q_2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}v_1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Примем  $W_{11} = |B|/B_{22}$ ;  $W_{12} = B_{12}/B_{22}$ ;  $W_{21} = -B_{21}/B_{22}$ ;  $W_{22} = 1/B_{22}$ .

Уравнения системы W-параметров будут:

$$\begin{aligned} Q_1 &= W_{11}Q_2 + W_{12}v_1; \\ v_2 &= W_{21}Q_2 + W_{22}v_1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Коэффициенты  $W_i$  в общем случае комплексные, зависят от частоты и могут быть определены по табл. 3.3. Уравнения (3.43) можно переписать, пользуясь методами матричного исчисления:

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_1 \end{vmatrix} = \|W\| \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_1 \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

Из уравнений (3.43) следует, что если  $v_1 = 0$ , то  $W_{11} = Q_1/Q_2$  и  $W_{21} = v_2/Q_2$ ; если  $Q_2 = 0$ , то  $W_{12} = Q_1/v_1$  и  $W_{22} = v_2/v_1$ . Коэффициенты уравнений  $[W_{11}]$  — безразмерный;  $[W_{12}] = [\text{кгс} \cdot \text{с/м}]$  — сопротивление;  $[W_{21}] = [\text{м/кгс} \cdot \text{с}]$  — подвижность;  $[W_{22}]$  — безразмерный.

В случае обратимого четырехполюсника  $W_{12} = W_{21}$ . Для симметричного четырехполюсника  $|W| = W_{11}W_{22} - W_{12}W_{21}$ .

**Соединение механических цепей четырехполюсников.** В результате соединения между собой двух и более четырехполюсников можно образовать сложный МЧП. В зависимости от известных и неизвестных величин входа и выхода соединения четырехполюсников могут быть: в системе *L*-параметров — последовательное; в системе *S*-параметров — параллельное; в системе *B*- и *V*-параметров — ступенчатое; в системе *III*-параметров — последовательно-параллельное; в системе *W*-параметров — параллельно-последовательное соединение.

**Последовательное соединение четырехполюсников.** Пусть даны два четырехполюсника, в которых известны силы  $Q_1$  и  $Q_2$ , а требуется определить скорости  $v_1$  и  $v_2$ ; это соответствует варианту 1, поэтому оба четырехполюсника следует представить в системе *L*-параметров с матрицами  $\|L'\|$  и  $\|L''\|$ .

В четырехполюснике *L'* обозначим силы на входе и на выходе  $Q_1'$  и  $Q_2'$  и скорости —  $v_1'$  и  $v_2'$ , в четырехполюснике *L''* введем соответствующие обозначения  $Q_1''$ ,  $Q_2''$ ,  $v_1''$ ,  $v_2''$  (рис. 3.2).

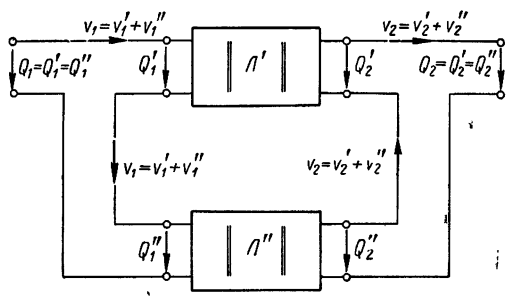


Рис. 3.2. Последовательное соединение МЧП

Линии связи между четырехполюсниками показывают последовательность прохождения внешней энергии. Для последовательного соединения элементов ранее доказано в записи в общем виде для сил (1.5), что  $Q = Q_1 = Q_2$ , для скоростей (1.3), что  $v = v_1 + v_2$ , для комплексных подвижностей (1.12), что  $L = L_1 + L_2$ . Для рассматриваемых условий двух четырехполюсников  $Q_1 = Q_1' = Q_1''$  и  $Q_2 = Q_2' = Q_2''$ , а также для скоростей  $v_1 = v_1' + v_1''$  и  $v_2 = v_2' + v_2''$ .

В матричной записи это будет

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \|L'\| \cdot \begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = \|L''\| \cdot \begin{pmatrix} Q_1'' \\ Q_2'' \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

При соединении двух четырехполюсников запишем, что при  $v = v_1 + v_2$

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = [\|L'\| + \|L''\|] \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}; \quad (3.46)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \|L\| \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> В дальнейшем матрицы будем обозначать  $\|L_2\|$  или  $\|S_1\|$  или  $\|B_3\|$ ; при сложении — через индексы сверху, например  $\|L''\|$ ,  $\|S'\|$ ,  $\|B''\|$ .

Матрица результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составляющих четырехполюсников:

$$\|L\| = \begin{vmatrix} L'_{11} + L''_{11} & L'_{12} + L''_{12} \\ L'_{21} + L''_{21} & L'_{22} + L''_{22} \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

**Параллельное соединение четырехполюсников.** Пусть даны два четырехполюсника, в которых известны скорости на входе  $v_1$  и выходе  $v_2$ , а требуется определить силы  $Q_1$  и  $Q_2$ ; это соответствует варианту 2, поэтому четырехполюсники следует представить в системе  $S$ -параметров с матрицами  $\|S'\|$  и  $\|S''\|$ . Для этой системы в параллельном соединении элементов следует помнить, что  $v = v_1 = v_2$ ,  $Q = Q_1 + Q_2$  и  $S = S_1 + S_2$ . Расположив на схеме (рис. 3.3) действующие силы и скорости, может написать:

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 = v''_1, \quad v_2 = v'_2 = v''_2, \\ \text{а также } Q_1 &= Q'_1 + Q''_1, \\ Q_2 &= Q'_2 + Q''_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{vmatrix} &= \|S'\| \cdot \begin{vmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \end{vmatrix} &= \|S''\| \cdot \begin{vmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Складывая обе матрицы и помня зависимости для  $v$ ,  $Q$  и  $S$ , напишем:

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \end{vmatrix} = [\|S'\| + \|S''\|] \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix} = \|S\| \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (3.49)$$

Матрица результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составляющих четырехполюсников

$$\|S\| = \begin{vmatrix} S'_{11} + S''_{11} & S'_{12} + S''_{12} \\ S'_{21} + S''_{21} & S'_{22} + S''_{22} \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

**Ступенчатое соединение четырехполюсников в системе  $B$ -параметров.** Пусть даны два четырехполюсника, в которых известна сила  $Q_2$  и скорость  $v_2$  на выходе, а требуется определить силу  $Q_1$  и скорость  $v_1$  на входе; это соответствует варианту 3, поэтому оба четырехполюсника следует представить в системе  $B$ -параметров с матрицами  $\|B'\|$  и  $\|B''\|$ . При ступенчатом соединении четырехполюсников (рис. 3.4, а) силы на входе первого четырехполюсника и всей системы должны быть равны между собой  $Q_1 = Q'_1$ ; силы на выходе первого и на входе второго четырехполюсника равны между собой  $Q'_2 = Q''_1$ ; силы на выходе второго четырехполюсника и всей системы равны между собой  $Q'_2 = Q_2$ .

Очевидно, рассуждения для скоростей будут такими же, как и для сил:  $v_1 = v'_1$ ;  $v'_2 = v''_2$ ,  $v''_2 = v_2$ . Рассмотрим

$$\left\| \begin{matrix} Q'_1 \\ v'_1 \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q'_2 \\ v'_2 \end{matrix} \right\|; \quad \left\| \begin{matrix} Q''_1 \\ v''_1 \end{matrix} \right\| = \|B''\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q''_2 \\ v''_2 \end{matrix} \right\| \quad (3.51)$$

Учитывая предыдущие зависимости  $Q_1 = Q'_1$ ;  $v_1 = v'_1$ ;  $Q'_2 = Q''_2$ ;  $v'_2 = v''_2$ ;  $Q''_2 = Q_2$ ;  $v''_2 = v_2$ , можно написать:  $\left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q'_1 \\ v'_1 \end{matrix} \right\|$  Подставляя вместо  $\left\| \begin{matrix} Q'_1 \\ v'_1 \end{matrix} \right\|$  выражение (3.51), получим

$$\left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left[ \|B''\| \left\| \begin{matrix} Q''_2 \\ v''_2 \end{matrix} \right\| \right] = \|B\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| \quad (3.52)$$

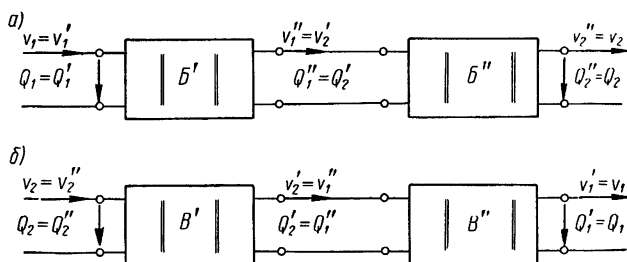


Рис. 3.4. Ступенчатое соединение МЧП

Таким образом,

$$\|B\| = \|B'\| \cdot \|B''\| = \left\| \begin{matrix} B'_{11}B'_{12} \\ B'_{21}B'_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} B''_{11}B''_{12} \\ B''_{21}B''_{22} \end{matrix} \right\| \quad (3.53)$$

Напомним, что произведение двух матриц выполняется следующим образом:

$$\left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{matrix} \right\|$$

Для нашего случая произведение двух матриц будет

$$\|B'\| \cdot \|B''\| = \left\| \begin{matrix} B'_{11}B''_{11} + B'_{12}B''_{21} & B'_{11}B''_{12} + B'_{12}B''_{22} \\ B'_{21}B''_{11} + B'_{22}B''_{21} & B'_{21}B''_{12} + B'_{22}B''_{22} \end{matrix} \right\| \quad (3.54)$$

Учитывая, что умножение матриц не обладает переместительным свойством ( $AB \neq BA$ ), при ступенчатом соединении четырехполюсников матрицы, подлежащие перемножению, должны располагаться в порядке соединения четырехполюсников.

**Ступенчатое соединение четырехполюсников в системе  $B$ -параметров.** Пусть даны два четырехполюсника, в которых известны сила  $Q_1$  и скорость  $v_1$  на входе, а требуется определить силу  $Q_2$

и скорость  $v_2$  на выходе; это соответствует варианту 4, поэтому оба четырехполюсника следует представить в системе  $B$ -параметров с матрицами  $\|B'\|$  и  $\|B''\|$ . При ступенчатом соединении четырехполюсников (рис. 3.4, б) зависимость между силами и скоростями должна быть следующая:

$$Q_2 = Q_2'; Q_2' = Q_1'; Q_1' = Q_1 \text{ и } v_2 = v_2'; v_2' = v_1'; v_1' = v_1.$$

Рассмотрим

$$\left\| \begin{matrix} Q_2' \\ v_2' \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1' \\ v_1' \end{matrix} \right\|; \quad \left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \|B''\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| \quad (3.55)$$

Учитывая зависимости между силами и скоростями, можно написать  $\left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_2' \\ v_2' \end{matrix} \right\|$ . Подставляя вместо  $\left\| \begin{matrix} Q_2' \\ v_2' \end{matrix} \right\|$  второе выражение (3.55), получим

$$\left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \|B'\| \cdot \left[ \|B''\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| \right] = \|B\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| \quad (3.56)$$

Таким образом

$$\|B\| = \|B'\| \cdot \|B''\| = \left\| \begin{matrix} B'_{11}B''_{11} & B'_{11}B''_{12} \\ B'_{21}B''_{11} & B'_{21}B''_{12} \end{matrix} \right\|$$

Произведение двух матриц будет

$$\|B\| = \left\| \begin{matrix} B'_{11}B''_{11} + B'_{12}B''_{21} & B'_{11}B''_{12} + B'_{12}B''_{22} \\ B'_{21}B''_{11} + B'_{22}B''_{21} & B'_{21}B''_{12} + B'_{22}B''_{22} \end{matrix} \right\| \quad (3.57)$$

**Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников.** Пусть даны два четырехполюсника, в которых известны сила  $Q_1$  на входе и скорость  $v_2$  на выходе, а требуется определить силу  $Q_2$  на выходе и скорость  $v_1$  на входе; это соответствует варианту 5, поэтому оба четырехполюсника следует представить в системе  $Ш$ -параметров с матрицами  $\|Ш'\|$  и  $\|Ш''\|$ . При нахождении скорости  $v_1$  на входе следует помнить о варианте 1 с последовательным соединением четырехполюсников ( $v = QЛ$ ), а при нахождении силы  $Q_2$  на выходе следует помнить о варианте 2 с параллельным соединением четырехполюсника ( $Q = vS$ ); поэтому левая часть схемы (на входе) должна быть выполнена в последовательном соединении, а правая часть схемы (на выходе) — в параллельном соединении (рис. 3.5).

Для рассматриваемого соединения следует брать для левой части  $v_1 = v_1' + v_1''$ ;  $Q_1 = Q_1' = Q_1''$ , для правой части  $v_2 = v_2' = v_2''$ ;  $Q_2 = Q_2' + Q_2''$ .

Рассмотрим

$$\left\| \begin{matrix} Q_2' \\ v_1' \end{matrix} \right\| = \|Ш'\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1' \\ v_2' \end{matrix} \right\|; \quad \left\| \begin{matrix} Q_2'' \\ v_1'' \end{matrix} \right\| = \|Ш''\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_1'' \\ v_2'' \end{matrix} \right\| \quad (3.58)$$

Так как  $Q_2' + Q_2'' = Q_2$ ,  $v_1' + v_1'' = v_1$ ; а  $Q_1 = Q' = Q_1'$ ,  $v_2' = v_2'' = v_2$ , то при складывании этих матричных уравнений

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ v_1 \end{bmatrix} = [ \| \mathcal{W}' \| + \| \mathcal{W}'' \| ] \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Матрица результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников:

$$\| \mathcal{W} \| = \| \mathcal{W}' \| + \| \mathcal{W}'' \| = \begin{bmatrix} \mathcal{W}'_{11} + \mathcal{W}''_{11} & \mathcal{W}'_{12} + \mathcal{W}''_{12} \\ \mathcal{W}'_{21} + \mathcal{W}''_{21} & \mathcal{W}'_{22} + \mathcal{W}''_{22} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

**Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников.** Пусть дано два четырехполюсника, в которых известны

сила  $Q_2$  на выходе и скорость  $v_1$  на входе, а требуется определить силу  $Q_1$  на входе и скорость  $v_2$  на выходе; это соответствует варианту 6, поэтому оба четырехполюсника следует представить в системе  $\mathcal{W}$ -параметров с матрицами  $\| \mathcal{W}' \|$  и  $\| \mathcal{W}'' \|$ . При нахождении скорости  $v_2$  на выходе системе следует брать в последовательном соединении  $v = Q\mathcal{L}$ , а при нахождении силы  $Q_1$  на входе — в параллельном соединении  $Q = v\mathcal{S}$ ; поэтому правая часть схемы (на выходе) должна быть выполнена в последовательном соединении, а левая часть схемы

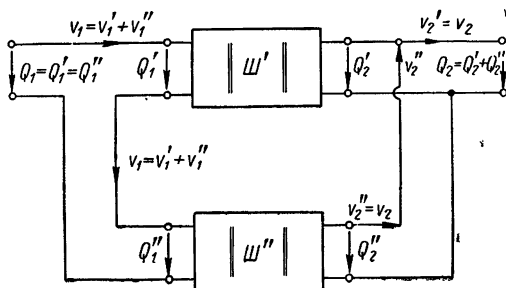


Рис. 3.5. Последовательно-параллельное соединение МЧП

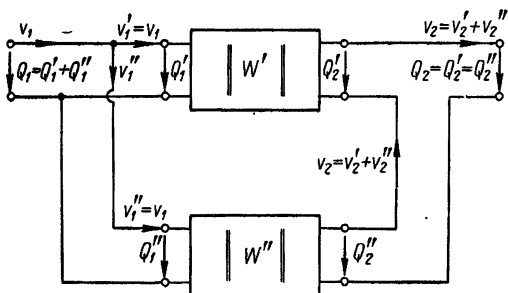


Рис. 3.6. Параллельно-последовательное соединение МЧП

(на входе) — в параллельном соединении (рис. 3.6). Для рассматриваемого соединения следует брать для правой части  $v_2 = v_2' + v_2''$ ;  $Q_2 = Q_2' = Q_2''$ ; для левой части  $v_1 = v_1' = v_1''$ ;  $Q_1 = Q_1' + Q_1''$ . Берем обе матрицы

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \| \mathcal{W}' \| \cdot \begin{bmatrix} Q_2' \\ v_1' \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} Q_1'' \\ v_2'' \end{bmatrix} = \| \mathcal{W}'' \| \cdot \begin{bmatrix} Q_2'' \\ v_1'' \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Так как  $Q_1' + Q_1'' = Q_1$ ,  $v_2' + v_2'' = v_2$ , а  $Q_2' = Q_2'' = Q_2$ ,  $v_1' = v_1'' = v_1$ , то

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [ \| \mathcal{W}' \| + \| \mathcal{W}'' \| ] \cdot \begin{bmatrix} Q_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$



Матрица результирующего четырехполюсника равна сумме матриц составных четырехполюсников

$$\|W\| = \|W'\| + \|W''\| = \begin{vmatrix} W'_{11} + W''_{11} & W'_{12} + W''_{12} \\ W'_{21} + W''_{21} & W'_{22} + W''_{22} \end{vmatrix} \quad (3.63)$$

### 3.5. МАТРИЦЫ МЧП

**Одноэлементные четырехполюсники.** Возможны два случая механической цепи с одним элементом: когда элемент находится в цепи в параллельном или последовательном соединении. Известно, что четырехполюсник с двумя входами и двумя выходами можно описать системой из двух линейных уравнений, например, в системе  $B$ -параметров (3.30)

известно, что четырехполюсник с двумя входами и двумя выходами можно описать системой из двух линейных уравнений, например, в системе  $B$ -параметров (3.30)

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2. \end{aligned} \right\}$$

**Параллельное соединение одного элемента.** Пусть дана схема четырехполюсника с одним элементом в цепи в параллельном соединении (рис. 3.7, а). Известно, что в параллельном соединении  $v_1 = v_2$  и  $Q_1 - Q_2 = Sv_2$ . Исходя из (3.30), эти равенства можно записать

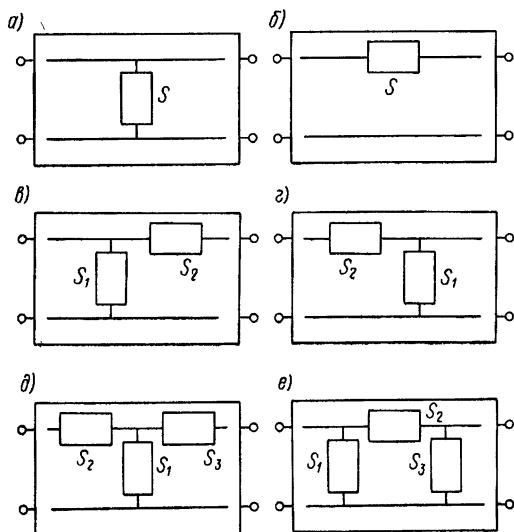


Рис. 3.7. Матрицы МЧП

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 1Q_2 + Sv_2; \\ v_1 &= 0Q_2 + 1v_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

отсюда видно, что

$$B_{11} = 1; B_{12} = S; B_{21} = 0; B_{22} = 1 \quad (3.65)$$

или

$$\left\| \begin{matrix} Q_1 \\ v_1 \end{matrix} \right\| = \|B\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} Q_2 \\ v_2 \end{matrix} \right\| \quad (3.66)$$

Запишем систему уравнений (3.64) в системе  $L$ -параметров. Из табл. 3.3 на пересечении первой строки и столбца 5 имеем  $L_{11} = B_{22}/B_{12}$ . Подставляя значения  $B_{12}$  и  $B_{22}$  из (3.65), получим  $L_{11} = 1/S$ . Точно также  $L_{12} = -|B|/B_{12}$ , имеем

$$L_{12} = -\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{12}} = -\frac{1 \cdot 1 - S \cdot 0}{S} = -\frac{1}{S};$$

$$L_{21} = \frac{1}{B_{12}} = \frac{1}{S}; \quad L_{22} = -\frac{B_{11}}{B_{12}} = -\frac{1}{S}.$$

Уравнения для системы  $\mathcal{L}$ -параметров (3.17) будут

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \mathcal{L}_{11}Q_1 + \mathcal{L}_{12}Q_2 = \frac{1}{S}Q_1 + \left(-\frac{1}{S}\right)Q_2 = \frac{1}{S}(Q_1 - Q_2); \\ v_2 &= \mathcal{L}_{21}Q_1 + \mathcal{L}_{22}Q_2 = \frac{1}{S}Q_1 + \left(-\frac{1}{S}\right)Q_2 = \frac{1}{S}(Q_1 - Q_2), \end{aligned} \right\}$$

что подтверждает равенство скоростей для одного элемента в параллельном соединении ( $v_1 = v_2$ ).

**Последовательное соединение одного элемента.** Пусть дана схема четырехполюсника с одним элементом в цепи в последовательном соединении (рис. 3.7, б). Известно, что в последовательном соединении  $Q_1 = Q_2$  и  $v_1 - v_2 = Q_2/S$ . Исходя из (3.30) и помня, что  $S = 1/\mathcal{L}$ , эти равенства можно записать:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 1Q_2 + 0v_2; \\ v_1 &= \mathcal{L}Q_2 + 1v_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

отсюда видно, что

$$B_{11} = 1; \quad B_{12} = 0; \quad B_{21} = \mathcal{L}; \quad B_{22} = 1. \quad (3.68)$$

Система уравнений (3.67) в матричном исчислении запишется так:

$$\left\| \begin{array}{c} Q_1 \\ v_1 \end{array} \right\| = \left\| B \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} Q_2 \\ v_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \mathcal{L} & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} Q_2 \\ v_2 \end{array} \right\| \quad (3.69)$$

Запишем (3.69) в системе  $B$ -параметров; из табл. 3.3 на пересечении четвертой строки и столбца 5 имеем:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{B_{22}}{|B|} = \frac{1}{1} = 1; & B_{12} &= -\frac{B_{12}}{|B|} = -\frac{0}{1} = 0; \\ B_{21} &= -\frac{B_{21}}{|B|} = -\frac{\mathcal{L}}{1} = -\mathcal{L}; & B_{22} &= \frac{B_{11}}{|B|} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Уравнение для системы  $B$ -параметров будет:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= B_{11}Q_1 + B_{12}v_1 = 1Q_1 + 0v_1 = Q_1; \\ v_2 &= B_{21}Q_1 + B_{22}v_1 = -\mathcal{L}Q_1 + 1v_1 = v_1 - \mathcal{L}Q_1. \end{aligned} \right\}$$

Для системы  $S$ -параметров система уравнений (3.69) получится, если из табл. 3.3 возьмем коэффициенты на пересечении строки 2 и столбца 5

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{1}{\mathcal{L}} = S; & S_{12} &= -\frac{|B|}{B_{21}} = -\frac{1}{\mathcal{L}} = -S; \\ S_{21} &= \frac{1}{B_{21}} = S; & S_{22} &= -\frac{B_{22}}{B_{21}} = -S. \end{aligned}$$

Уравнение для системы  $S$ -параметров будет:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2 = Sv_1 - Sv_2 = S(v_1 - v_2); \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2 = Sv_1 - Sv_2 = S(v_1 - v_2), \end{aligned} \right\}$$

что подтверждает ранее принятые величины  $Q_1 = Q_2$  и  $v_1 - v_2 = = \mathcal{L}Q_2$ .

**Пример 1.** Для поступательного движения массы под действием силы матрица запишется так:

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ v_1 \end{vmatrix} = \|B\| \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j\omega m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

Для вращательного движения матрица будет

$$\begin{vmatrix} M_1 \\ \delta_1 \end{vmatrix} = \|B\| \cdot \begin{vmatrix} M_2 \\ \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j\omega I \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_2 \\ \delta_2 \end{vmatrix}$$

**Двухэлементные четырехполюсники.** Четырехполюсники из двух элементов можно представить в двух вариантах. Первый вариант в виде прямого Г-образного соединения — одного параллельного и одного последовательного одноэлементных двухполюсников (рис. 3.7, в). Второй вариант в виде обратного Г-образного соединения — одного последовательного и одного параллельного одноэлементных двухполюсников (рис. 3.7, г). Здесь не рассматриваются соединения таких двух элементов, которые образуют только параллельное (рис. 3.8, а, б) или только последовательное (рис. 3.8, в, г) соединения: подобные соединения после

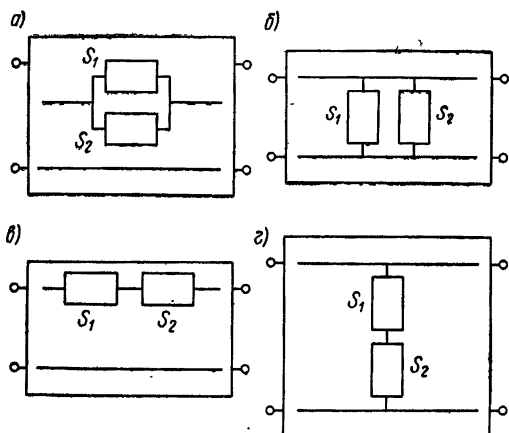


Рис. 3.8. Варианты одноэлементных матриц

нахождения общего комплексного сопротивления представляют собой одноэлементные четырехполюсники.

**Прямое Г-образное соединение.** Для прямого Г-образного механического четырехполюсника матрица в системе  $B$ -параметров запишется как произведение двух матриц одноэлементных двухполюсников (рис. 3.7, в). Для параллельного соединения матрица  $B_1 = \begin{vmatrix} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , а для последовательного соединения матрица

$$\|B_2\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{L}_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \|B_1\| \cdot \|B_2\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + S_1 \frac{1}{S_2} & 1 \cdot 0 + S_1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{S_2} & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{S_1}{S_2} & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\|; \\
\|B\| &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\| \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Уравнение в системе  $B$ -параметров будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) Q_2 + S_1 v_2; \\
v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = \frac{1}{S_2} Q_2 + 1 v_2.
\end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

Для двух зубчатых колес, находящихся в зацеплении, имеем для ведущего (входного) колеса  $M_1, \delta_1, z_1$ , для ведомого (выходного) колеса  $M_2, \delta_2, z_2$ . Пусть передаточное число от выходного к входному колесу будет  $\eta = z_2/z_1$ ; при этом очевидно, что при внешнем зацеплении, если колесо  $z_1$  вращается по часовой стрелке, колесо  $z_2$  вращается против часовой стрелки. Известно, что окружные скорости будут  $v = (\pi n)/30 D/2 = \delta_1 D_1/2 = \delta_2 D_2/2 = \delta_1 m z_1 = \delta_2 m z_2$ , здесь  $D_1, D_2$  — начальные диаметры колес, а  $m$  — модуль зацепления (см. рис. 1.15, а). С учетом направления вращения  $\delta_1 z_1 = -\delta_2 z_2$ ;  $M_1/z_1 = -M_2/z_2$ .

Уравнение четырехполюсника для двух зубчатых колес

$$\left. \begin{aligned}
M_1 &= \left( -\frac{z_1}{z_2} \right) M_2 + 0 \delta_2; \\
\delta_1 &= 0 M_2 + \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \delta_2.
\end{aligned} \right\}$$

При этом  $B_{11} = -z_1/z_2 = -1/\eta$ ;  $B_{12} = 0$ ;  $B_{21} = 0$ ;  $B_{22} = -z_2/z_1 = -\eta$ .

Если в зацеплении находятся три колеса (см. рис. 1.15, з), то направления вращения первого и третьего колес будут одинаковые; в таком случае  $\delta_1 z_1 = \delta_3 z_3$  и  $M_1/z_1 = M_3/z_3$ , при этом  $B_{11} = z_1/z_3 = 1/\eta$ ;  $B_{12} = 0$ ;  $B_{21} = 0$ ;  $B_{22} = z_3/z_1 = \eta$ .

Напишем уравнения в системе  $\mathcal{L}$ -параметров. Из табл. 3.3 на пересечении первой строки и столбца 5 имеем (3.70):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= \frac{B_{22}}{B_{12}} = \frac{1}{S_1} = \mathcal{L}_1, & \mathcal{L}_{12} &= -\frac{|B|}{B_{12}} = -\frac{1}{S_1} = -\mathcal{L}_1; \\ \mathcal{L}_{21} &= \frac{1}{B_{12}} = \frac{1}{S_1} = \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{L}_{22} &= -\frac{B_{11}}{B_{12}} = -\frac{\frac{S_1 + S_2}{S_2}}{S_1} = -\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}; \\ \mathcal{L}_{22} &= -\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) = -(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2). \end{aligned}$$

Уравнение в системе  $\mathcal{L}$ -параметров имеет вид

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \mathcal{L}_{11}Q_1 + \mathcal{L}_{12}Q_2 = \mathcal{L}_1Q_1 + (-\mathcal{L}_1Q_2) = \mathcal{L}_1(Q_1 - Q_2); \\ v_2 &= \mathcal{L}_{21}Q_1 + \mathcal{L}_{22}Q_2 = \mathcal{L}_1Q_1 - (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)Q_2. \end{aligned} \right\} (3.72)$$

*Обратное Г-образное соединение.* Для обратного Г-образного МЧП матрица в системе  $B$ -параметров запишется как произведение двух матриц одноэлементных двухполюсников:  $\|B\| =$

$$\begin{aligned} &= \|B_2\| \cdot \|B_1\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1/S_2 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot S_1 + 0 \cdot 1 \\ (1/S_2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (1/S_2) \cdot S_1 + 1 \cdot 1 \end{array} \right\|; \\ &\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (3.73)$$

Уравнения в системе  $B$ -параметров будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = 1Q_2 + S_1v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = \frac{1}{S_2}Q_2 + \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right)v_2. \end{aligned} \right\} (3.74)$$

$$\left\| \begin{array}{c} Q_1 \\ v_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} Q_2 \\ v_2 \end{array} \right\| \quad (3.75)$$

Представим матричное уравнение (3.75) в системе  $S$ -параметров. Из табл. 3.3 на пересечении второй строки и столбца 5 имеем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{S_2}} = S_2; & S_{12} &= -\frac{|B|}{B_{21}} = -\frac{1}{\frac{1}{S_2}} = -S_2; \\ S_{21} &= \frac{1}{B_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{S_2}} = S_2; & S_{22} &= -\frac{B_{22}}{B_{21}} = -\frac{S_1 + S_2}{\frac{1}{S_2}} = -(S_1 + S_2). \end{aligned}$$

Уравнения в системе S-параметров имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2 = S_2v_1 - S_2v_2 = S_2(v_1 - v_2); \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2 = S_2v_1 - (S_1 + S_2)v_2 = \\ &= S_2(v_1 - v_2) - S_1v_2. \end{aligned} \right\} (3.76)$$

**Трехэлементные четырехполюсники.** Четырехполюсник, состоящий из трех элементов, можно представить в нескольких вариантах; наибольшее распространение имеют Т-образные и П-образные четырехполюсники (рис. 3.7, д, е). Здесь не рассматриваются соединения таких трех элементов, которые в результате преобразования приводятся к прямым или обратным Г-образным четырехполюсникам или к одноэлементным четырехполюсникам в последовательном или параллельном соединении (рис. 3.9, а—з).

**Т-образное соединение.** Т-образный МЧП представляет собой последовательное соединение двух и параллельное соединение одного двухполюсников (рис. 3.7, д). Для получения общей матрицы в системе B-параметров возможны три варианта рассмотрения отдельных матриц: 1) перемножение матриц последовательного —  $S_2$ , параллельного —  $S_1$  и последовательного —  $S_3$  элементов; 2) перемножение матриц последовательного элемента  $S_2$  на матрицу прямого Г-образного соединения  $S_1S_3$ ; 3) перемножение матрицы обратного Г-образного соединения  $S_2S_1$  на матрицу последовательного элемента  $S_3$ .

Случай 1. Для получения общей матрицы необходимо перемножить последовательно три матрицы в системе B-параметров:

$$\|B\| = \|B_2\| \cdot \|B_1\| \cdot \|B_3\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 1 \end{array} \right\|;$$

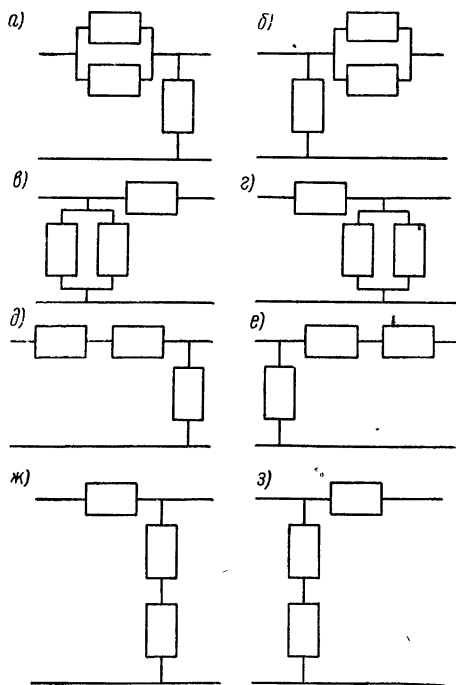


Рис. 3.9. Варианты сложных матриц

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot S_1 + 0 \cdot 1 \\ \frac{1}{S_2} \cdot 1 + 1 \cdot 0 & \frac{1}{S_2} \cdot S_1 + 1 \cdot 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 1 \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 1 \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + S_1 \frac{1}{S_3} & 1 \cdot 0 + S_1 \cdot 1 \\ \frac{1}{S_2} \cdot 1 + \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) \frac{1}{S_3} & \frac{1}{S_2} \cdot 0 + \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) 1 \end{array} \right\|; \\
\|B\| &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_3}{S_3} & S_1 \\ \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\|. \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Уравнения в системе  $B$ -параметров будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned}
Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = \left( \frac{S_1 + S_3}{S_3} \right) Q_2 + S_1 v_2; \\
v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = \left( \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3} \right) Q_2 + \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) v_2.
\end{aligned} \right\} \tag{3.78}$$

В матричном изображении эти уравнения будут представлены так:

$$\left\| \begin{array}{c} Q_1 \\ v_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_3}{S_3} & S_1 \\ \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} Q_2 \\ v_2 \end{array} \right\|. \tag{3.79}$$

Случай 2. Для получения общей матрицы необходимо перемножить матрицу последовательного элемента  $S_2$  на матрицу прямого  $\Gamma$ -образного соединения  $S_1 S_3$ :

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \|B_2\| \cdot \|B_{13}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_3}{S_3} & S_1 \\ \frac{1}{S_3} & 1 \end{array} \right\| = \\
&= \left\| \begin{array}{cc} 1 \left( \frac{S_1 + S_3}{S_3} \right) + 0 \frac{1}{S_3} & 1 \cdot S_1 + 0 \cdot 1 \\ \frac{1}{S_2} \left( \frac{S_1 + S_3}{S_3} \right) + 1 \frac{1}{S_3} & \frac{1}{S_2} S_1 + 1 \cdot 1 \end{array} \right\|;
\end{aligned}$$

$$\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_3}{S_3} & S_1 \\ \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\|.$$

Это выражение одинаково с (3.77).

Случай 3. Для получения общей матрицы необходимо перемножить матрицу обратного Г-образного соединения  $S_2 S_1$  на матрицу последовательного элемента  $S_3$ :

$$\begin{aligned} \|B\| &= \|B_{21}\| \cdot \|B_3\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{S_3} & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + S_1 \frac{1}{S_3} & 1 \cdot 0 + S_1 \cdot 1 \\ \frac{1}{S_2} \cdot 1 + \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) \frac{1}{S_3} & \frac{1}{S_2} \cdot 0 + \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right) \cdot 1 \end{array} \right\|; \\ \|B\| &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_3}{S_3} & S_1 \\ \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3} & \frac{S_1 + S_2}{S_2} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Это выражение также одинаково с (3.77).

Представим матричное уравнение (3.79) в систему  $W$ -параметров. Из табл. 3.3 на пересечении шестой строки и столбца 5 найдем требуемые коэффициенты:

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{|B|}{B_{22}} = \frac{1}{\frac{S_1 + S_2}{S_2}} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}; \quad W_{12} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \\ &= \frac{S_1}{\frac{S_1 + S_2}{S_2}} = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}; \\ W_{21} &= -\frac{B_{21}}{B_{22}} = -\frac{\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3}}{\frac{S_1 + S_2}{S_2}} = -\frac{(S_1 + S_2 + S_3) S_2}{S_2 S_3 (S_1 + S_2)}; \\ W_{22} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_3 (S_1 + S_2)}; \quad W_{23} = \frac{1}{B_{22}} = \frac{1}{\frac{S_1 + S_2}{S_2}} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}. \end{aligned}$$

Уравнения в системе  $W$ -параметров имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= W_{11} Q_2 + W_{12} v_1 = \left( \frac{S_2}{S_1 + S_2} \right) Q_2 + \left( \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \right) v_1; \\ v_2 &= W_{21} Q_2 + W_{22} v_1 = \left[ -\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_3 (S_1 + S_2)} \right] Q_2 + \left( \frac{S_2}{S_1 + S_2} \right) v_1 \end{aligned} \right\}$$



*П-образное соединение.* П-образный четырехполюсник представляет собой последовательное соединение одного и параллельное соединение двух двухполюсников (рис. 3.7, е). Для получения общей матрицы в системе *B*-параметров возможны три варианта рассмотрения отдельных матриц: 1) перемножение матриц параллельного —  $S_1$ , последовательного —  $S_2$  и параллельного —  $S_3$  элементов; 2) перемножение матрицы прямого  $\Gamma$ -образного соединения  $S_1 S_2$  на матрицу параллельного элемента  $S_3$ ; 3) перемножение матрицы параллельного элемента  $S_1$  на матрицу обратного  $\Gamma$ -образного соединения  $S_2 S_3$ .

Случай 1. Для получения общей матрицы необходимо перемножить последовательно три матрицы в системе *B*-параметров:

$$\begin{aligned} \|B\| &= \|B_1\| \cdot \|B_2\| \cdot \|B_3\| = \begin{vmatrix} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/S_2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ \|B\| &= \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 + S_1 \cdot \frac{1}{S_2} & 1 \cdot 0 + S_1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{S_2} & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & S_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \\ \|B\| &= \begin{vmatrix} \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) 1 + S_1 \cdot 0 & \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) S_3 + S_1 \cdot 1 \\ \frac{1}{S_2} \cdot 1 + 1 \cdot 0 & \frac{1}{S_2} \cdot S_3 + 1 \cdot 1 \end{vmatrix}; \\ \|B\| &= \begin{vmatrix} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_2 + S_3}{S_2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Уравнения в системе *B*-параметров будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right)Q_2 + \left(\frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2}\right)v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = \frac{1}{S_2}Q_2 + \left(\frac{S_2 + S_3}{S_2}\right)v_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

В матричном изображении эти уравнения будут представлены так:

$$\begin{vmatrix} Q_1 \\ v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_2 + S_3}{S_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Q_2 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (3.82)$$

Случай 2. Для получения общей матрицы необходимо перемножить матрицу прямого Г-образного соединения  $S_1 S_2$  на матрицу параллельного элемента  $S_3$ :

$$\|B\| = \|B_{12}\| \cdot \|B_3\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & S_1 \\ \frac{1}{S_2} & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_3 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Из варианта 1 имеем:

$$\|B\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_2 + S_3}{S_2} \end{array} \right\|.$$

Случай 3. Для получения общей матрицы необходимо перемножить матрицу параллельного элемента  $S_1$  на матрицу обратного Г-образного соединения  $S_2 S_3$  (3.73):

$$\begin{aligned} \|B\| &= \|B_1\| \cdot \|B_{23}\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & S_3 \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_2 + S_3}{S_2} \end{array} \right\|; \\ \|B\| &= \left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 1 + S_1 \frac{1}{S_2} & 1 \cdot S_3 + S_1 \frac{(S_2 + S_3)}{S_2} \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{S_2} & 0 \cdot S_3 + 1 \cdot \frac{(S_2 + S_3)}{S_2} \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{S_1 + S_2}{S_2} & \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2} \\ \frac{1}{S_2} & \frac{S_2 + S_3}{S_2} \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Напишем эти уравнения в системе  $\mathcal{L}$ -параметров. Из табл. 3.3 на пересечении первой строки и столбца 5 имеем:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{B_{22}}{B_{12}} = \left( \frac{S_2 + S_3}{S_2} \right) \left( \frac{S_2}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3} \right) = \frac{S_2 + S_3}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3};$$

$$\mathcal{L}_{12} = -\frac{|B|}{B_{12}} = -\frac{S_2}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3};$$

$$\mathcal{L}_{21} = \frac{1}{B_{12}} = \frac{S_2}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3};$$

$$\mathcal{L}_{22} = -\frac{B_{11}}{B_{12}} = -\frac{(S_1 + S_2) S_2}{S_2 (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)} = -\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}.$$

Уравнения в системе  $\mathcal{L}$ -параметров будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \mathcal{L}_{11}Q_1 + \mathcal{L}_{12}Q_2 = \left( \frac{S_2 + S_3}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} \right) Q_1 - \\ &\quad - \left( \frac{S_2}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} \right) Q_2; \\ v_2 &= \mathcal{L}_{21}Q_1 + \mathcal{L}_{22}Q_2 = \left( \frac{S_2}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} \right) Q_1 - \\ &\quad - \left( \frac{S_1 + S_2}{S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3} \right) Q_2. \end{aligned} \right\}$$

Пример 2. Дана динамическая система (рис. 3.10, а) со значениями элементов  $m_1 = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $m_2 = 5$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $k_1 = 500$  кгс/м;  $k_2 = 1000$  кгс/м. Известно, что  $Q_1(t) = 20 \cos 5t$  (кгс) действует на массу  $m_1$ ,  $Q_2(t) = 10 \cos 5t$  (кгс) действует на массу  $m_2$ . Требуется определить  $v_1$ ,  $v_2$ .

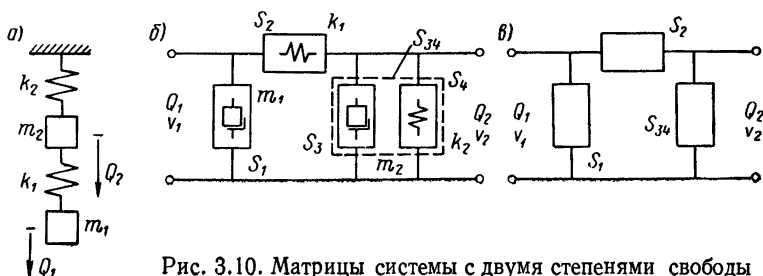


Рис. 3.10. Матрицы системы с двумя степенями свободы

Построим механическую цепь (рис. 3.10, б) и проведем ее преобразование с тем, чтобы привести механическую цепь к схеме четырехполюсника в П-образном соединении. Для этого объединим звено с элементами  $m_2$  и  $k_2$  в одно и обозначим его  $S_{34} = S_3 + S_4 = j\omega m_2 + k_2/(j\omega)$  (рис. 3.10, в).

Определим значения ЧКС для  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_{34}$ ; из  $\omega t = 5t$ ;  $\omega = 5$  1/с:

$$S_1 = j\omega m_1 = j5 \cdot 2 = j10; \quad S_2 = k_1/(j\omega) = 500/(j5) = -j100;$$

$$S_{34} = j5 \cdot 5 + 1000/(j5) = -j175. \quad ;$$

Определим значения коэффициентов в системе  $B$ -параметров (3.80):  $B_{11} = 0,9$ ;  $B_{12} = -j147,5$ ;  $B_{21} = j0,01$ ;  $B_{22} = 2,75$ . Ввиду того, что неизвестными являются скорости  $v_1$ ,  $v_2$ , дальнейшее решение проводится в системе  $\mathcal{L}$ -параметров. По табл. 3.3 для системы  $\mathcal{L}$ -параметров имеем коэффициенты:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{B_{22}}{B_{12}} = \frac{2,75}{(-j147,5)} = +j0,018644; \quad \mathcal{L}_{12} = -\frac{|B|}{B_{12}} =$$

$$= -\frac{1}{(-j147,5)} = -j0,00677966;$$

$$\mathcal{L}_{21} = \frac{1}{B_{12}} = \frac{1}{(-j147,5)} = j0,00677966;$$

$$\mathcal{L}_{22} = -\frac{B_{11}}{B_{12}} = -\frac{0,9}{(-j147,5)} = -j0,006101694.$$

Подставим значения  $Q_1$ ,  $Q_2$ , а также коэффициенты  $\|L\|$  в (3.17), получим искомые значения  $v_1$ ,  $v_2$ :

$$v_1 = L_{11}Q_1 + L_{12}Q_2 = j0,018644 \cdot 20 + (-j0,00677966) \cdot 10 = j0,3050834;$$

$$v_2 = L_{21}Q_1 + L_{22}Q_2 = j0,00677966 \cdot 20 + (-j0,006101694) \cdot 10 = j0,07457626.$$

Округленно  $v_1 = j0,3$  м/с;  $v_2 = j0,075$  м/с.

**Пример 3.** Дана динамическая система (рис. 3.10, а) со значениями элементов, показанных в примере 2. Известно, что сила  $Q_2(t) = 10 \cos 5t$  кгс действует на массу  $m_2$ , скорость  $v_2 = +j0,07457626$  м/с проходит через массу  $m_2$ . Требуется определить  $Q_1(t)$ ,  $v_1(t)$ , действующую на массу  $m_1$ . Воспользуемся построенной цепью (рис. 3.10, в) и данными для ЧКС  $S_1, S_2, S_{34}$  при  $\omega = 5$  1/с;  $S_1 = j10$ ;  $S_2 = -j100$ ;  $S_{34} = -j175$ . Нам также известно  $B_{11} = 0,9$ ;  $B_{12} = -j147,5$ ;  $B_{21} = j0,01$ ;  $B_{22} = 2,75$ . Ввиду того что неизвестными являются сила  $Q_1$  и скорость  $v_1$ , дальнейшее решение следует проводить в системе  $B$ -параметров (3.30):  $Q_1 = B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = 0,9 \cdot 10 + (-j147,5)(+j0,07457626) = 9 + 10,9999 = 19,9999$ ; определим  $v_1 = B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = j0,01 \cdot 10 + 2,75(+j0,07457626) = j0,1 + j0,2050847 = j0,30508471$ ;  $Q_1 = 20$  кгс,  $v = j0,30508$  м/с, что соответствует величинам предыдущей задачи.

Если бы заданы были, например,  $v_1, Q_2$ , то требовалось найти  $Q_1$  и  $v_2$ . Для этого нужно было взять уравнения в системе  $W$ -параметров, предварительно определив коэффициенты матрицы  $\|W\|$  через известные коэффициенты  $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ , при этом  $W_{11} = 1/B_{11}$ ;  $W_{12} = B_{12}/B_{22}$ ;  $W_{21} = -B_{21}/B_{22}$ ;  $W_{22} = 1/B_{22}$  и подставить в систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= W_{11}Q_2 + W_{12}v_1; \\ v_2 &= W_{21}Q_2 + W_{22}v_1, \end{aligned} \right\}$$

откуда получатся требуемые значения  $Q_1, v_2$ .

## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 4.1. НУЛИ И ПОЛЮСЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Виброустойчивость машины в процессе эксплуатации при заданной характеристике упругой системы зависит от параметров, при которых работает производственная машина. Для оценки математического или конструктивного решения динамической системы важно иметь представление о ее частотных характеристиках и в первую очередь о зонах резонансов сил и скоростей; надежными средствами решения являются методы теории функций комплексного переменного.

Уравнение, связывающее воздействие и реакцию линейной системы с постоянными сосредоточенными параметрами, может быть записано таким образом:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 &= \\ = b_m \frac{d^m y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0, \end{aligned}$$

здесь  $x = x(t)$  — воздействие на входе системы;  $y = y(t)$  — реакция на выходе системы.

Вводя преобразование Лапласа при нулевых условиях, получим:  $(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) X = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) Y$  или

$$A(p) X = B(p) Y, \quad (4.1)$$

здесь  $A(p)$  и  $B(p)$  — полиномы от  $p$ ;  $X$  и  $Y$  — изображение функций  $x$  и  $y$ , которые, в свою очередь, могут быть полиномами от  $p$ . Выражение  $A(p)/B(p) = Y/X = K(p)$  называется передаточной функцией.

С этим выражением связана структура механической цепи в зависимости от применяемой системы воздействия и реакции; в двухполюсниках обычно это связано с полным комплексным сопротивлением.

Одним из важнейших свойств передаточных функций является то, что они представляют собой дробно-рациональные функции комплексной переменной  $p$ .

В общем виде  $K(p)$  можно представить так:

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}. \quad (4.2)$$

Разложим на множители полиномы в числителе и знаменателе

$$K(p) = \frac{a_n \left( p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \dots + \frac{a_2}{a_n} p^2 + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n} \right)}{b_m \left( p^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} p^{m-1} + \dots + \frac{b_2}{b_m} p^2 + \frac{b_1}{b_m} p + \frac{b_0}{b_m} \right)}. \quad (4.3)$$

Основываясь на свойствах функций комплексного переменного и прилагаемых ниже выводах (теорема Виета), уравнение (4.3) можно представить:

$$K(p) = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(p - p_1)(p - p_3)(p - p_5) \dots (p - p_{n-1})(p - p_n)}{(p - p_2)(p - p_4)(p - p_6) \dots (p - p_{m-1})(p - p_m)}. \quad (4.4)$$

Отношение  $(a_n : b_m)$  постоянно и представляет собой масштабный коэффициент; корни уравнения  $A(p) = 0$ , при которых  $K(p) = 0$ , называются нулями и на графиках обозначаются знаком  $\circ$ ; для отличия эти корни имеют нечетные индексы:  $p_1, p_3, p_5 \dots$ . Корни уравнения  $B(p) = 0$ , при которых  $K(p) = \infty$ , называются полюсами и на графиках обозначаются знаком  $\times$ ; эти корни имеют четные индексы  $p_2, p_4, p_6, p_8 \dots$ .

В общем случае нули и полюсы являются комплексными числами.

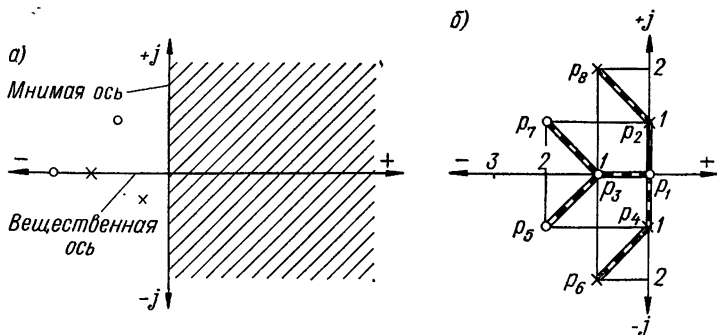


Рис. 4.1. Распределение нулей и полюсов на комплексной плоскости

**Пример 1.** Изображение и численные значения нулей и полюсов функции вида

$$S(p) = \frac{p_1(p_3 + 1)(p_5 + 2 + j)(p_7 + 2 - j)}{(p_{2,4}^2 + 1)(p_6 + 1 + j2)(p_8 + 1 - j2)}.$$

Получаем для нулей значения:  $p_1 = 0$ ;  $p_3 = -1$ ;  $p_5 = -2 - j$ ;  $p_7 = -2 + j$ ; для полюсов  $p_2 = +j$ ;  $p_4 = -j$ ;  $p_6 = -1 - j2$ ;  $p_8 = -1 + j2$  (рис. 4.1, б). Нахождение числа корней и их величин в операторном уравнении.

Преобразуем числитель уравнения (4.2):

$$\begin{aligned}
 a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 &= a_n \left( p^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} p^{n-1} + \right. \\
 + \frac{a_{n-2}}{a_n} p^{n-2} + \dots + \frac{a_2}{a_n} p^2 + \frac{a_1}{a_n} p + \frac{a_0}{a_n} \Big) &= a_n [p^n + p^{n-1} (p_1 + p_2 + \dots + \\
 + p_{n-1} + p_n) + p^{n-2} (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_1 p_{n-1} + p_1 p_n + p_2 p_3 + \dots + \\
 + p_2 p_n + p_3 p_4 + \dots + p_3 p_n + \dots + p_{n-1} p_n) + p^{n-3} (p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \dots + \\
 + p_1 p_2 p_n + p_2 p_3 p_4 + \dots + p_2 p_3 p_n + \dots + p_{n-2} p_{n-1} p_n) + \dots + p^{n-k} (p_1 p_2 \dots p_k + \\
 + p_1 p_2 \dots p_{k+1} + p_1 p_2 \dots p_{k+2} + \dots + \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{k\text{-членов}} + \dots) + \\
 + p^{n-(n-1)=1} (p_1 p_2 \dots p_{n-1} + p_1 p_2 \dots p_n) + p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n, \\
 \text{здесь} \quad a_{n-1}/a_n &= (p_1 + p_2 + \dots + p_n); \\
 a_{n-2}/a_n &= (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_1 p_{n-1} + p_1 p_n + p_2 p_3 + \dots + p_{n-1} p_n); \\
 a_{n-3}/a_n &= (p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \dots + p_1 p_2 p_n + p_2 p_3 p_4 + \dots + p_{n-2} p_{n-1} p_n); \\
 &\dots \\
 \frac{a_{n-k}}{a_n} &= [(p_1 p_2 \dots p_k) + (p_1 p_2 \dots p_{k+1}) + (p_1 p_2 \dots p_n) + (p_2 p_3 \dots p_{k+1}) + \\
 &\quad + (p_2 p_3 \dots p_{k+2}) + \dots]; \\
 &\dots \\
 \frac{a_1}{a_n} &= [(p_1 p_2 \dots p_{n-1}) + (p_1 p_2 \dots p_n) + (p_2 p_3 \dots p_n)]; \\
 \frac{a_0}{a_n} &= (p_1 p_2 p_3 \dots p_{n-1} p_n).
 \end{aligned}$$

Представленные здесь результаты в общем виде показаны в табл. 4.1. Покажем порядок вычисления зависимостей для корней уравнений 1; 2; 3, 4-й степеней:  $p + p_1 = p^1 [1] + p^0 [1]$  (в квадратных скобках показано количество членов)

$$\begin{aligned}
 (p + p_1) (p + p_2) &= p^2 + p p_1 + p p_2 + p_1 p_2 = \\
 = p^2 + p (p_1 + p_2) + p_1 p_2 &= p^2 [1] + p^1 [2] + p^0 [1]; \\
 (p + p_1) (p + p_2) (p + p_3) &= (p + p_1) (p^2 + p p_2 + \\
 + p p_3 + p_2 p_3) &= p^3 + p^2 p_2 + p^2 p_3 + p p_2 p_3 + \\
 + p^2 p_1 + p p_1 p_2 + p p_1 p_3 + p_1 p_2 p_3 &= p^3 + p^2 (p_1 + \\
 + p_2 + p_3) + p (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + p_1 p_2 p_3 &= \\
 = p^3 [1] + p^2 [3] + p^1 [3] + p^0 [1]; \\
 (p + p_1) (p + p_2) (p + p_3) (p + p_4) &= \\
 = p^4 + p^3 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + p^2 (p_1 p_2 + \\
 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4) + p^1 (p_1 p_2 p_3 + \\
 + p_1 p_2 p_4 + p_2 p_3 p_4) + p_1 p_2 p_3 p_4 &= p^4 [1] + p^3 [4] + \\
 + p^2 [6] + p^1 [3] + p^0 [1].
 \end{aligned}$$

## Коэффициенты уравнений линейной системы

| Наибольшая степень полинома | Общее число членов | Степень члена полинома, вынесенного за скобки |   |   |  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
|-----------------------------|--------------------|---|---|---|--|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|--|--|
|                             |                    | 0   | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19 | 20 |  |  |
| 1                           | 2                  | 1   | 1 |   |  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 2                           | 4                  | 1   | 2 | 1 | Пример: $p^7 [1] + p^6 [7] + p^5 [21] + p^4 [15] + p^3 [10] + p^2 [6] + p^1 [3] + p^0 [1]$ |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 3                           | 8                  | 1   | 3 | 3 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 4                           | 15                 | 1   | 3 | 6 | 4  | 1  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 5                           | 26                 | 1   | 3 | 6 | 10   | 5  | 1  |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 6                           | 42                 | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 6  | 1  |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 7                           | 64                 | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 7  | 1  |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 8                           | 93                 | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 8  | 1  |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 9                           | 130                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 9  | 1  |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 10                          | 176                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 10 | 1  |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 11                          | 232                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 11 | 1  |     |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 12                          | 299                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 12 | 1   |     |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 13                          | 378                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 13  | 1   |     |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 14                          | 470                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 14  | 1   |     |     |     |     |    |    |  |  |
| 15                          | 576                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 105 | 15  | 1   |     |     |     |    |    |  |  |
| 16                          | 697                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 105 | 120 | 16  | 1   |     |     |    |    |  |  |
| 17                          | 834                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 105 | 120 | 136 | 17  | 1   |     |    |    |  |  |
| 18                          | 988                | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 105 | 120 | 136 | 153 | 18  | 1   |    |    |  |  |
| 19                          | 1160               | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | *91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 19  | 1  |    |  |  |
| 20                          | 1351               | 1   | 3 | 6 | 10   | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91  | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 | 20 | 1  |  |  |



Проведенные вычисления подтверждают равенство выражения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = a_n (p - p_1) (p - p_2) (p - p_3) \dots (p - p_{n-1}) (p - p_n).$$

Основные требования к функциям входного комплексного сопротивления. Примем без доказательств, что функции входного сопротивления  $S(p)$  пассивного двухполюсника должны удовлетворять следующим требованиям: вещественные части нулей и полюсов не должны быть положительными и, следовательно, не могут встречаться в правой полуплоскости (рис. 4.1, а); степени полинома числителя и знаменателя этого полинома не могут различаться больше, чем на единицу; разность между числом нулей и числом полюсов не может быть больше единицы; нули и полюсы функции  $S(p) = 0$ , расположенные на мнимой оси, могут быть только простыми, но не кратными; физически нуль  $S(p)$  соответствует резонансу сил, а полюс  $S(p)$  соответствует резонансу скоростей; расположенные по вещественной оси нули и полюсы обязательно чередуются.

#### 4.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ОДНОГО ЭЛЕМЕНТА

Масса под действием силы подчиняется закону  $Q = m dv/(dt) = m p v$ ; ЧКС для этого элемента  $S = j\omega m$  (рис. 4.2, а) или  $\omega = S/(jm)$ .

Масса под действием скорости подчиняется закону  $v = 1/m \int Q dt = Q/(mp)$ ; ЧКП для этого элемента  $L = -j \cdot 1/(\omega m)$  (рис. 4.2, а) или  $\omega = 1/(jmL)$ .

В зависимости от частоты сопротивление массы перемещению будет большим при высоких частотах и меньшим при низких; при этом во всем спектре частот сопротивление положительно и изменяется по линейному закону; подвижность массы будет большей при низких частотах и меньшей при высоких; при этом во всем спектре частот подвижность отрицательна и изменяется по гиперболическому закону. Из выражения  $S = pm$  можно написать, что нулем элемента будет  $p_1 m = 0$  и  $p_1 = 0$ , т. е. резонанс сил будет при  $\omega_{01} = 0$ , а резонанс скоростей будет при  $\omega_{02} = \infty$  (рис. 4.2, б).

Упругость под действием силы подчиняется закону  $Q = k \int v dt = kv/p$ ; ЧКС для этого элемента  $S = k/(j\omega) = -jk/\omega$  (рис. 4.2, в) или  $\omega = k/(jS)$ .

Упругость под действием скорости подчиняется закону  $v = 1/k (dQ/dt) = pQ/k$ . ЧКП для этого элемента  $L = j\omega/k$  (рис. 4.2, в) или  $\omega = kL/j$ .

В зависимости от частоты сопротивление упругости перемещению будет большим при низких частотах и меньшим при высоких; при этом во всем спектре частот сопротивление имеет отрицательные значения, изменяющиеся по гиперболическому закону; подвижность упругости будет большей при высоких частотах и меньшей при низких; при этом во всем спектре частот подвижность имеет положительные значения, изменяющиеся по линейному закону. Из выражения  $S = k/p$  можно написать, что полюсом

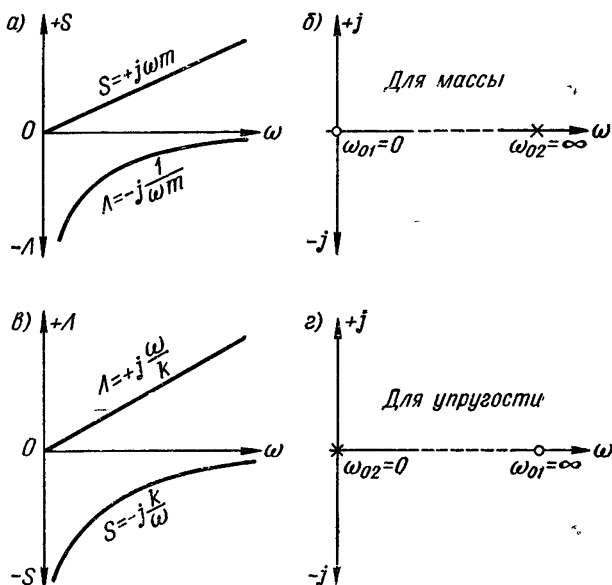


Рис. 4.2. Частотные характеристики системы из одного элемента

элемента будет  $p_2/k = 0$ ;  $p_2 = 0$ , т. е. резонанс скоростей будет при  $\omega_{02} = 0$ ; резонанс сил будет при  $\omega_{01} = \infty$  (рис. 4.2, г).

Существует две возможности учитывать количество резонансов: 1) с учетом рассмотренных двух обязательных резонансов при значениях  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ , число резонансов  $z$  равно числу элементов плюс один:  $z = n + 1$ ; 2) без учета рассмотренных двух резонансов в каждом элементе  $z = n - 1$ . Этой зависимостью будем пользоваться в дальнейшем. Из нее вытекает, что для одноэлементных двухполюсников во всем диапазоне частот резонансы отсутствуют и сопротивление выражается только через текущую частоту.

#### 4.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Соединение массы и упругости под действием силы.** Система и механическая цепь (см. рис. 1.6, а, д) позволяют решить вопрос о нулях и полюсах системы  $S(p) = S_1(p) + S_2(p) =$

$= pm + k/p = (p^2 m + k)/p$ . Для определения нулей рассмотрим значение числителя

$$p_{1,3}^2 m + k = 0; \quad p_{1,3} = \pm \sqrt{-k/m} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{k/m} = \pm j \sqrt{k/m};$$

$$p_1 = +j \sqrt{k/m}; \quad p_3 = -j \sqrt{k/m},$$

что показано на рис. 4.3, а; это соответствует резонансу сил. Для определения полюсов рассмотрим значение знаменателя  $p_2 = 0$ , что показано на рис. 4.3, а; это соответствует резонансу

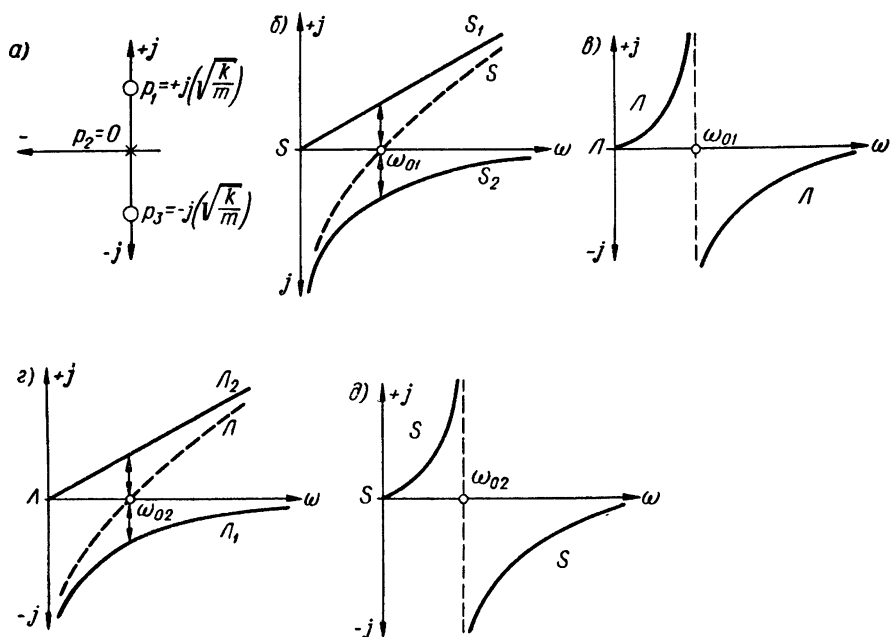


Рис. 4.3. Частотные характеристики системы из двух элементов

скоростей. Частотную характеристику совместного действия элементов найдем из ПКС (рис. 4.3, б)  $S = S_1 + S_2 = j\omega m - jk/\omega = j(\omega m - k/\omega)$ . При определенной частоте  $\omega_{01}$ , когда сопротивление  $S_1 = S_2$ , ПКС равно нулю и наступает резонанс сил  $\omega_{01} m = k/\omega_{01}$ . Эта зависимость показывает, что резонанс сил наступает при  $\omega_{01} = \sqrt{k/m}$ ; влево от значения  $\omega_{01}$  величины имеют упругостный характер и имеют отрицательное значение, вправо от значения  $\omega_{01}$  сопротивления имеют массовый характер и имеют положительное значение. Считая, что  $\omega_{01}^2 = k/m$ , можем написать, что сопротивление системы будет:

$$S = jm \left( \omega - \frac{k}{\omega m} \right) = jm \left( \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega} \right)$$

или

$$S = -jm \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega} \right) = \frac{m}{j} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega} \right). \quad (4.5)$$

Подвижность системы будет (рис. 4.3, в)

$$L = \frac{j}{m} \left( \frac{\omega}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.6)$$

На рис. 4.4 приведены графические зависимости комплексных сопротивлений массы и упругости от частот. Параметры масс

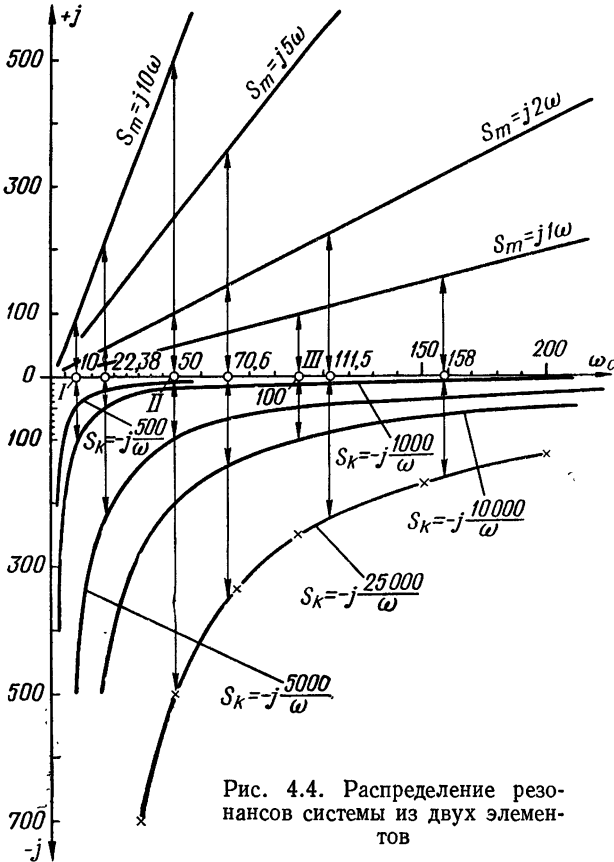


Рис. 4.4. Распределение резонансов системы из двух элементов

изменяются от 1 до 10 кгс·с<sup>2</sup>/м, а параметры упругостей — от 500 до 25 000 кгс/м. Для различных сочетаний этих элементов диапазон резонансов сил находится в пределах частот от 10 до 158 1/с.

Рассматривая сочетания любой пары кривых для  $m$  и  $k$ , точку резонанса можно определить, установив равенство ординат для этих кривых между собой. Так, для кривых  $S_m = j10\omega$  и  $S_k = -j(1000/\omega)$  резонанс будет в точке I, где  $\omega_{01} = 10$  1/с; для

кривых  $S_m = j10\omega$  и  $S_k = -j(25\,000/\omega)$  резонанс будет в точке II, где  $\omega_{01} = 50$  1/с; для кривых  $S_m = j1\omega$  и  $S_k = -j(10\,000/\omega)$  резонанс будет в точке III, где  $\omega_{01} = 100$  1/с.

Для того чтобы уменьшить частоту  $\omega_{01}$  резонанса, необходимо массу увеличивать, а упругость уменьшать; и наоборот, при

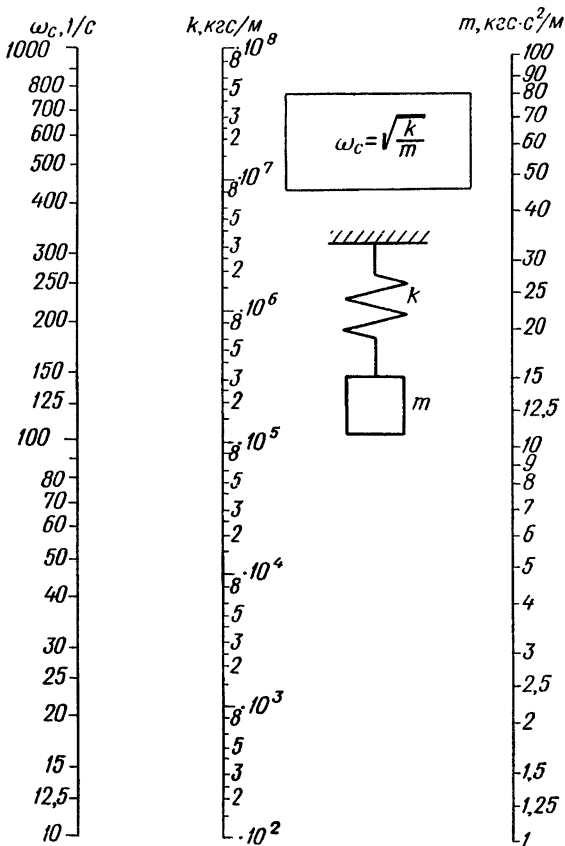


Рис. 4.5. Номограмма для определения собственной частоты системы из двух элементов

необходимости увеличения частоты  $\omega_{01}$  резонанса необходимо уменьшить массу и увеличивать упругость. На номограмме (рис. 4.5) операции по нахождению параметров  $\omega_{01}$  между  $m$  и  $k$  выполнять еще удобнее; достаточно вокруг выбранного значения  $\omega_{01}$  вращать линейку и получать связанные точки  $m_i$  и  $k_i$ .

Пример 2. Имеется динамическая система  $[mk]$  с параметрами  $m = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м и  $k = 1000$  кгс/м, имеющая резонанс сил при  $\omega_{01} = 22,38$  1/с. Необходимо сместить резонанс до порядка  $\omega_{01} = 50$  1/с изменением параметров массы или упругости.

Определим параметры: 1) при  $\omega_{01} = 50$  1/с величина  $S_k = -jk/\omega = -j1000/50 = -j20$ ; в таком случае  $S_m = j\omega m = j50m = |j20|$ ;  $m = 20/50 =$

$= 0,4 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ . Необходимо массу взять вместо  $m = 2$ ,  $m = 0,4 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ . Если размеры конструкции нельзя изменить, следует взять материал меньшей плотности; 2) оставляем в системе массу  $m = 2 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ ; при необходимости иметь резонанс при частоте  $\omega_{01} = 50 \text{ 1/с}$  следует подобрать соответствующую упругость. Для массы  $S_m = j\omega m = j50 \cdot 2 = j100$ . В этом случае  $S_k = S_m = -j k/\omega = -jk/50 = j100$ ;  $k = |-5000| = 5000 \text{ кгс/м}$ .

Следовательно, жесткость пружины необходимо увеличить.

**Замечания о наглядности графиков.** Для того чтобы график сделать наглядным, необходимо использовать возможности чисел, выраженных в натуральном или логарифмическом ряду. Если считать, что логарифмическая шкала является математическим

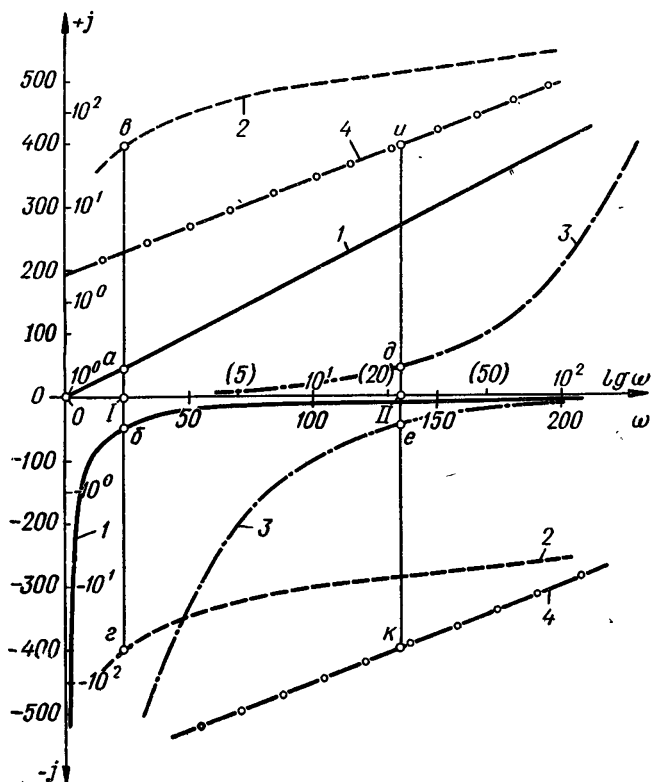


Рис. 4.6. Характер изменения сопротивлений в зависимости от масштаба координат

микроскопом, то появляется возможность раздвинуть пределы графика, что особенно заметно в окрестностях чисел, близких единице, когда желательно иметь значения, например, для 0,1 или 0,01 какой-то величины. Для наглядности этого положения построим график (рис. 4.6), в котором сравниваются кривые  $S = j\omega m$  и  $S = -jk/\omega$  для системы, где  $m = 2 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$  и  $k = 1000 \text{ кгс/м}$ . Эти кривые построены в четырех системах шкал.

1. Шкалы для чисел по осям координат  $\omega$  и  $S$  взяты натуральные (линии 1); координата  $\omega_{01}$  резонанса по оси  $\omega$  находится в точке I ( $Ia = Ib$ ).

2. Шкала для чисел по оси координат  $\omega$  взята натуральная, а по оси  $S$  — логарифмическая (линии 2); координата  $\omega_{01}$  резонанса по оси  $\omega$  находится в точке I ( $Ib = Ig$ ).

3. Шкала для чисел по оси координат  $\omega$  взята логарифмическая, а по оси  $S$  — натуральная (линии 3); координата  $\omega_{01}$  резонанса по оси  $\omega$  находится в точке II ( $II\delta = IIe$ ).

4. Шкалы для чисел по осям координат  $\omega$  и  $S$  взяты логарифмические (они для обеих зависимостей представлены прямыми линиями — линии 4); координата  $\omega_{01}$  резонанса по оси  $\omega$  находится в точке II ( $IIu = IIk$ ), хотя для всех четырех случаев  $\omega_{01} = 22,38$  1/с.

**Соединение массы и упругости под действием скорости.** Система и механическая цепь (см. рис. 1.23, а, б) позволяют решить вопрос о частотной характеристике совместного действия элементов. Найдем ПКП  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = 1/j\omega m + j\omega/k$ . При  $\mathcal{L} = 0$   $\omega_{01}/k = 1/\omega_{01}m$ ;  $\omega_{01}^2 = k/m$  или, используя зависимость  $1/\omega_{01}^2 = m/k$ , можно написать:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{-jk} \left( \omega - \frac{k}{m\omega} \right) = \frac{1}{-jk} \left( \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega} \right) = -j \frac{1}{k} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega} \right). \quad (4.7)$$

Это изображено на рис. 4.3, г; изображение не в подвижности, а в сопротивлении показано на рис. 4.3, д и будет

$$S = jk \left( \frac{\omega}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.8)$$

Сопротивление или подвижность системы из двух элементов содержит одну разность квадратов резонансной и текущей частот в числителе или знаменателе в зависимости от того, действует на систему сила или скорость: уравнения (4.5), (4.6) или (4.7), (4.8).

#### 4.4. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ

Соединения из двух элементов представляют параллельное или последовательное соединение разных элементов (массы и упругости); присоединением третьего элемента можно составить только четыре разных схемы соединения (рис. 4.7, а—г), и они будут иметь по две резонансных частоты. Присоединение последовательно или параллельно к одному из двух элементов третьего элемента, одинакового с ним по характеру сопротивления, напри-

мер упругости, изменит не количество резонансных частот, а только резонансную частоту; для схем на рис. 4.7, д—з изменения количества резонансов не произойдет.

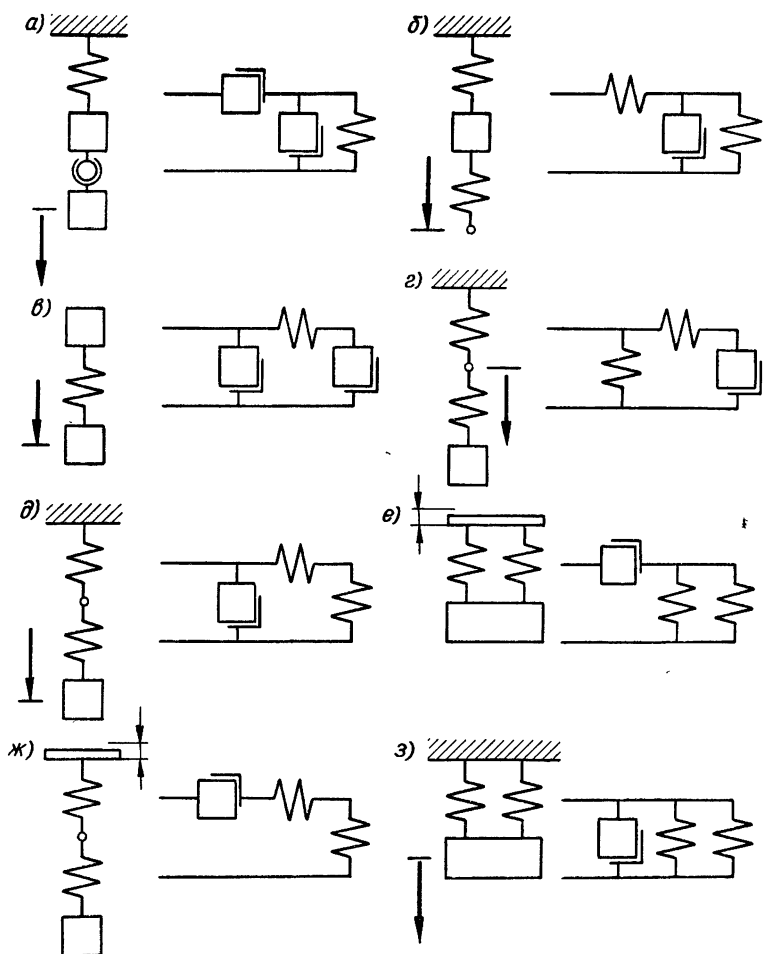


Рис. 4.7. Динамические системы, состоящие из трех элементов: а, б, в, г — имеют по два резонанса; д, е, ж, з — имеют по одному резонансу

**Система из одной массы и двух упругостей под действием силы** (см. рис. 1.8, а, г). Определение нулей и полюсов системы.

$$S_{23}(p) = S_2(p) + S_3(p) = pm + \frac{k_2}{p} = \frac{p^2m + k_2}{p};$$

$$L_{23}(p) = \frac{p}{p^2m + k_2};$$

$$L(p) = L_1(p) + L_{23}(p) = \frac{p}{k_1} + \frac{p}{p^2m + k_2} = \frac{p(p^2m + k_2) + pk_1}{p^2k_1m + k_1k_2};$$



$$L(p) = \frac{p(p^2m + k_1 + k_2)}{p^2k_1m + k_1k_2};$$

$$S(p) = \frac{p^2k_1m + k_1k_2}{p(p^2m + k_1 + k_2)}.$$

Нули системы:  $p^2k_1m + k_1k_2 = 0$ ;  $p_{1,3}^2 = -k_1k_2/(k_1m) = -k_2/m$ ;  $p_{1,3} = \pm j\sqrt{k_2/m}$ ;  $p_1 = +j\sqrt{k_2/m}$ ;  $p_3 = -j\sqrt{k_2/m}$ , что соответствует резонансу сил (рис. 4.8, а).

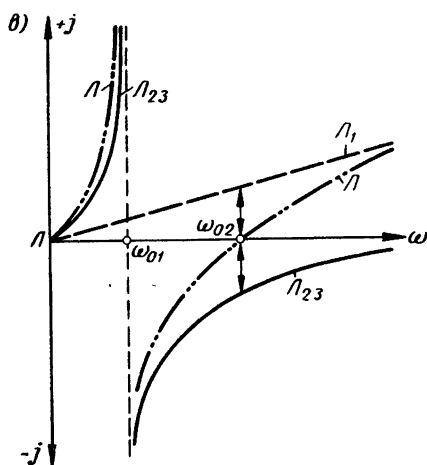
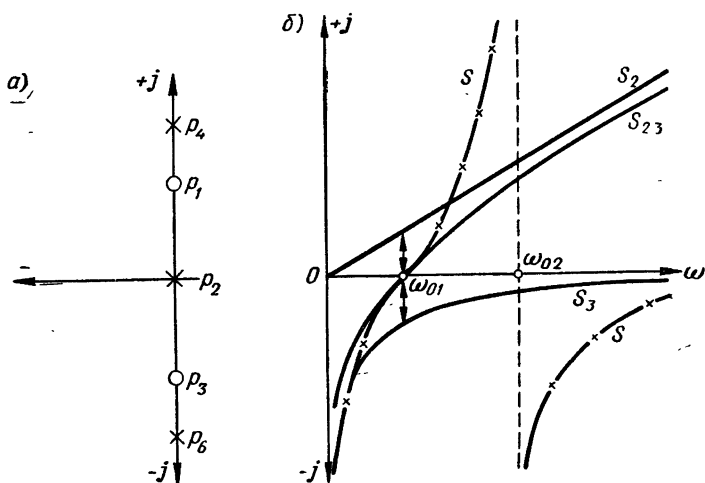


Рис. 4.8. Система  $k_1-m-k_2$ , имеющая два резонанса

Полюсы системы:  $p_2 = 0$ ;  $p_{4,6}^2m + k_1 + k_2 = 0$ ;  $p_{4,6}^2 = -(k_1 + k_2)/m$ ;  $p_{4,6} = \pm j\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ ;  $p_4 = +j\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ ;  $p_6 = -j\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ , что соответствует резонансу скоростей (рис. 4.8, а).

Частотные характеристики совместного действия элементов системы определяются из ПКС системы. ЧКС звена 23:

$$S_{23} = S_2 + S_3 = j\omega m - j \frac{k_2}{\omega} = jm \left( \omega - \frac{k_2}{m\omega} \right);$$

$$S_{23} = jm \left( \frac{m\omega^2 - k_2}{m\omega} \right),$$

ЧКП звена 23 будет

$$L_{23} = \frac{1}{jm} \left( \frac{m\omega}{m\omega^2 - k_2} \right) = \frac{j}{m} \left( \frac{m\omega}{k_2 - m\omega^2} \right),$$

ПКП системы

$$L = L_1 + L_{23} = \frac{j\omega}{k_1} + \frac{j}{m} \left( \frac{m\omega}{k_2 - m\omega^2} \right). \quad (4.9)$$

В момент, когда  $S_{23} = 0$ , то  $m\omega^2 - k_2 = 0$  соответствует резонансу сил  $\omega_{01}$ ;  $m\omega_{01}^2 - k_2 = 0$ ;  $\omega_{01}^2 = k_2/m$ ;  $\omega_{01} = \sqrt{k_2/m}$ .

Подставляя значение  $\omega_{01}^2$  в (4.9), получаем

$$L = \frac{j\omega}{k_1} + \frac{j}{m} \left( \frac{\omega}{\frac{k_2}{m} - \omega^2} \right) = \frac{j\omega}{k_1} + \frac{j}{m} \left( \frac{\omega}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.10)$$

Второй член выражения (4.10) при частоте  $\omega > \omega_{01}$  имеет характер массы; при какой-то частоте  $\omega_{02}$ , когда подвижности  $L_1$  и  $L_{23}$  будут равны по величине, но противоположны по знаку, наступает второй резонанс — резонанс скоростей

$$\frac{j\omega_{02}}{k_1} = - \frac{j}{m} \left( \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} \right); \quad \frac{1}{k_1} = - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} \right).$$

Подставляя вместо  $\omega_{01}^2 = k_2/m$ , получим:

$$m \left( \frac{k_2}{m} - \omega_{02}^2 \right) = -k_1, \quad k_2 - m\omega_{02}^2 = -k_1;$$

$$m\omega_{02}^2 = k_1 + k_2; \quad \omega_{02}^2 = \frac{k_1 + k_2}{m};$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (4.11)$$

Окончательную подвижность можно написать, используя (4.11),  $L = j\omega/k_1 [1 + k_1/m (1/\omega_{01}^2 - \omega^2)]$ .

Из (4.11) можно написать  $\omega_{02}^2 = (k_1 + k_2)/m = k_1/m + k_2/m = k_1/m + \omega_{01}^2$ ;  $k_1/m = \omega_{02}^2 - \omega_{01}^2$ , полученное уравнение подставим в выражение для  $L$ :

$$L = \frac{j\omega}{k_1} \left[ 1 + \frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right] = \frac{j\omega}{k_1} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2 + \omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right);$$

$$L = \frac{j\omega}{k_1} \left( \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.12)$$

Для сопротивления

$$S = -j \frac{k_1}{\omega} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.13)$$

Обе кривые изображены на рис. 4.8, б, в.

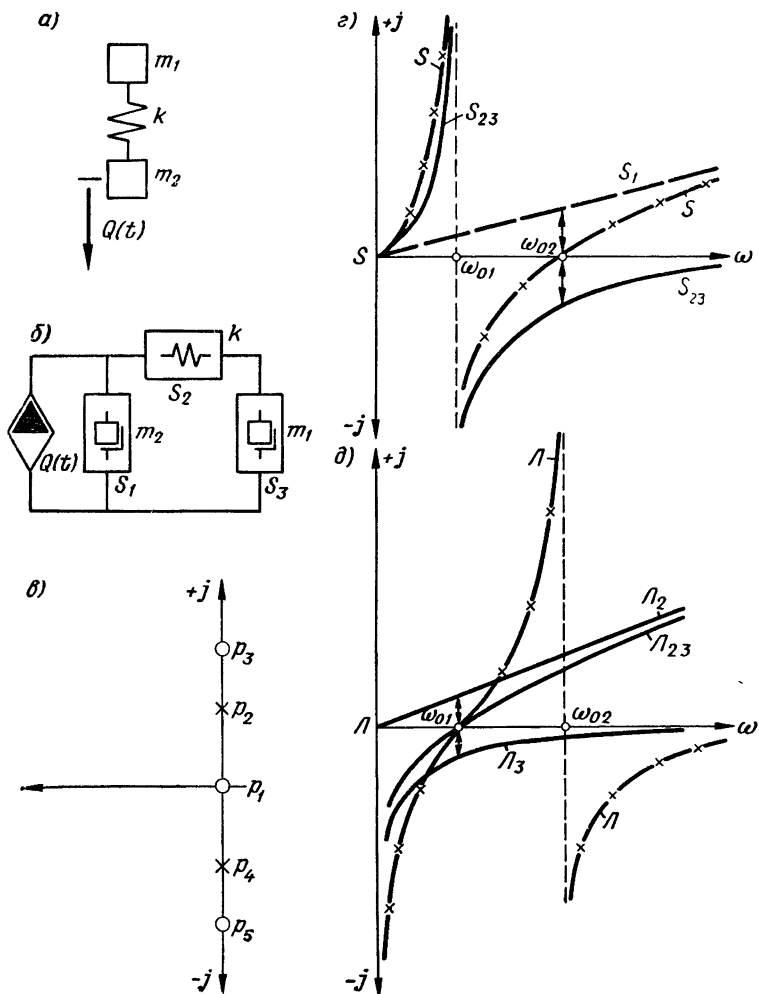


Рис. 4.9. Система  $m_1-k-m_2$ , имеющая два резонанса

Система, состоящая из двух масс и одной упругости под действием силы (рис. 4.9, а, б). Определим нули и полюсы системы:

$$L_{23}(p) = L_2(p) + L_3(p) = \frac{p}{k} + \frac{1}{pm_1} = \frac{p^2 m_1 + k}{p k m_1};$$

$$S_{23}(p) = \frac{p k m_1}{p^2 m_1 + k};$$

$$S(p) = S_1(p) + S_{23}(p) = pm_2 + \frac{pkm_1}{p^2m_1 + k} = \frac{pm_2(p^2m_1 + k) + pkm_1}{p^2m_1 + k};$$

$$S(p) = \frac{p[p^2m_1m_2 + k(m_1 + m_2)]}{p^2m_1 + k}.$$

Нули системы:  $p_1 = 0$ ;  $p_{3,5}^2 m_1 m_2 = -k(m_1 + m_2)$ ;  $p_{3,5}^2 = -\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = -\frac{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$ .

Выражение  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = m_{12}$  представляет собой взаимную массу.

$$p_3 = +j \sqrt{\frac{k}{m_{12}}}; \quad p_5 = -j \sqrt{\frac{k}{m_{12}}},$$

что соответствует резонансу сил (рис. 4.9, в).

Полюсы системы:  $p_{2,4}^2 m_1 + k = 0$ ;  $p_{2,4}^2 = -k/m_1$ ,  $p_2 = +j \sqrt{k/m_1}$ ,  $p_4 = -j \sqrt{k/m_1}$ , что соответствует резонансу скоростей (рис. 4.9, б).

Частотная характеристика совместного действия элементов системы определяется из ПКС системы.

ЧКП звена 23

$$L_{23} = L_2 + L_3 = \frac{j\omega}{k} + \frac{1}{j\omega m_1} = \frac{k - \omega^2 m_1}{j\omega k m_1};$$

$$S_{23} = \frac{j\omega k m_1}{k - \omega^2 m_1}.$$

В момент, когда  $L_{23} = 0$ , то  $k - \omega^2 m_1 = 0$  соответствует резонансу скоростей  $\omega_{01}$ :  $k - \omega_{01}^2 m_1 = 0$ ;  $\omega_{01}^2 = k/m_1$ ,  $\omega_{01} = \sqrt{k/m_1}$ .

ПКС системы  $S = S_1 + S_{23} = j\omega m_2 + (j\omega k m_1)/(k - \omega^2 m_1)$ .

Так как  $\omega_{01}^2 = k/m_1$ , то при делении числителя и знаменателя второго члена на  $m_1$  получим

$$S = j\omega m_2 + \frac{j\omega k}{\frac{k}{m_1} - \omega^2} = j\omega m_2 + \frac{j\omega k}{\omega_{01}^2 - \omega^2}. \quad (4.14)$$

Второй член выражения (4.14) имеет характер упругости при  $\omega > \omega_{01}$ , поэтому при какой-то частоте  $\omega_{02}$ , когда сопротивления  $S_1$  и  $S_{23}$  будут равны по величине, но противоположны по знаку, наступит второй резонанс — резонанс сил.

$$j\omega m_2 = -\frac{j\omega k}{\omega_{01}^2 - \omega^2}; \quad \omega_{02} m_2 = -k \left( \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} \right) = -\frac{k m_1 \omega_{02}}{k - m_1 \omega_{02}^2}.$$

Подставим значение  $\omega_{01}^2 = k/m_1$ , найдем значение  $\omega_{02}$ .

$$\omega_{02} m_2 (k - m_1 \omega_{02}^2) = -k m_1 \omega_{02}; \quad k m_2 - m_1 m_2 \omega_{02}^2 = -k m_1,$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2};$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}. \quad (4.15)$$

Окончательно из формулы (4.14) можем написать, учитывая, что  $k = m_1 \omega_{01}^2$ , так:

$$S = j\omega m_2 \left[ 1 + \frac{k}{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \right] = j\omega m_2 \left[ 1 + \frac{m_1 \omega_{01}^2}{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \right];$$

$$S = j\omega m_2 \left[ \frac{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2) + m_1 \omega_{01}^2}{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \right] = j\omega m_2 \left[ \frac{m_2 \omega_{01}^2 - m_2 \omega^2 + m_1 \omega_{01}^2}{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \right];$$

$$S = j\omega m_2 \left[ \frac{\omega_{01}^2 (m_1 + m_2) - m_2 \omega^2}{m_2 (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \right] = j\omega m_2 \left[ \frac{\omega_{01}^2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) - \omega^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right]. \quad (4.16)$$

Из (4.15)  $\omega_{02}^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} = \omega_{01}^2 \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)$ , полученное значение подставляем в числитель выражения (4.16)

$$S = j\omega m_2 \left( \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.17)$$

Подвижность будет

$$J = \frac{1}{j\omega m_2} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.18)$$

Обе кривые частотных характеристик и их построение изображены на рис. 4.9, з, д.

**Система, состоящая из одной массы и двух упругостей, под действием силы, приложенной в полюсе между упругостями.** Определение нулей и полюсов системы (рис. 4.10, а, б):

$$J_{23}(p) = J_2(p) + J_3(p) = \frac{p}{k_1} + \frac{1}{pm} = \frac{p^2 m + k_1}{pk_1 m};$$

$$S_{23}(p) = \frac{pk_1 m}{p^2 m + k_1};$$

$$S(p) = S_1(p) + S_{23}(p) = \frac{k_2}{p} + \frac{pk_1 m}{p^2 m + k_1} = \frac{p^2 k_2 m + k_1 k_2 + p^2 k_1 m}{p(p^2 m + k_1)};$$

$$S(p) = \frac{p^2 m(k_1 + k_2) + k_1 k_2}{p(p^2 m + k_1)}.$$

Нули системы:  $p_{1,2}^2 m(k_1 + k_2) = -k_1 k_2$ ;  $p_{1,2}^2 = -k_1 k_2 / [m(k_1 + k_2)] = -k_{1,2} / m$ , где  $k_{1,2}$  — взаимная упругость;  $p_1 = +j \sqrt{k_1 k_2 / [(k_1 + k_2) m]}$ ;  $p_3 = -j \sqrt{k_1 k_2 / [(k_1 + k_2) m]}$ , что соответствует резонансу сил (рис. 4.10, в). Полюсы системы:  $p_2 = 0$ ;  $p_{4,6}^2 m + k_1 = 0$ ;  $p_{4,6} = \sqrt{-k_1 / m}$ ;  $p_4 = +j \sqrt{k_1 / m}$ ;  $p_6 = -j \sqrt{k_1 / m}$ , что соответствует резонансу скоростей (рис. 4.10, в). Частотная характеристика совместного действия элементов системы определяется из ПКС системы.

ЧКП звена 23  $J_{23} = J_2 + J_3 = j\omega/k_1 + 1/(j\omega m) = j/k_1 [\omega - k_1/(\omega m)]$ . В момент когда  $J_{23} = 0$ , то  $k_1 - \omega^2 m = 0$ , что

соответствует резонансу скоростей  $\omega_{02}$ :

$$\omega_{02}^2 = k_1/m; \quad k_1 = \omega_{02}^2 m; \quad (4.19)$$

$$L_{23} = \frac{j}{k_1} \left( \omega - \frac{\omega_{02}^2 m}{\omega} \right) = \frac{j}{k_1} \left( \frac{\omega^2 - \omega_{02}^2}{\omega} \right) = \frac{1}{jk_1} \left( \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega} \right);$$

$$S_{23} = jk_1 \left( \frac{\omega}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right).$$

$$\text{ПКС системы } S = S_1 + S_{23} = \frac{k_2}{j\omega} + jk_1 \left( \frac{\omega}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.20)$$

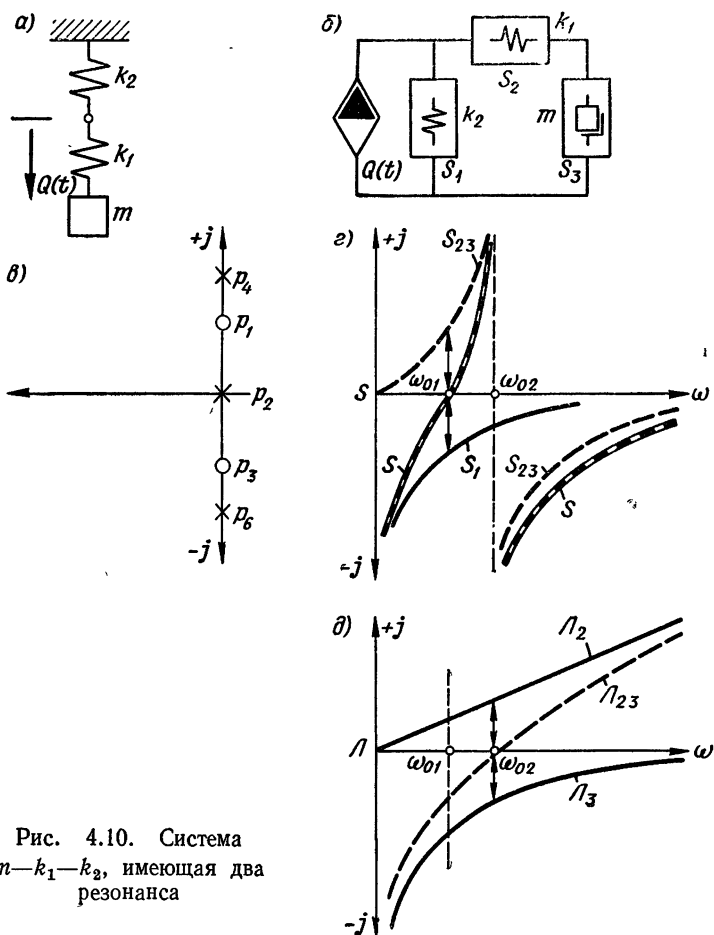


Рис. 4.10. Система  $m-k_1-k_2$ , имеющая два резонанса

Так как второй член выражения (4.20) имеет характер упругости при  $\omega > \omega_{02}$ , то при какой-то частоте  $\omega_{01}$ , когда сопротивления  $S_1$  и  $S_{23}$  будут равны по величине, но противоположны по знаку, наступит второй резонанс — резонанс сил  $\omega_{01}$ . Из (4.20)

$$-j \frac{k_2}{\omega_{01}} = -j \frac{k_1 \omega_{01}}{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}; \quad \frac{k_2}{\omega_{01}} = k_1 \left( \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2} \right).$$

Подставим вместо  $\omega_{02}^2 = k_1/m$  и определим  $\omega_{01}$ :

$$\begin{aligned} k_2 \left( \frac{k_1}{m} - \omega_{01}^2 \right) &= k_1 \omega_{01}^2; & k_1 k_2 - k_2 m \omega_{01}^2 &= k_1 m \omega_{01}^2; \\ k_1 k_2 &= \omega_{01}^2 (k_1 + k_2) m; \\ \omega_{01} &= \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Учитывая (4.19), что  $k_1/m = \omega_{02}^2$  и  $m = k_1/\omega_{02}^2$ , окончательно сопротивление запишем из (4.20) так:

$$S = \frac{1}{j\omega} \left[ k_2 - k_1 \frac{\omega^2}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)} \right] = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{k_2 \omega_{02}^2 - k_2 \omega^2 - k_1 \omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right).$$

Из выражений (4.19) и (4.21)

$$\omega_{01}^2 (k_1 + k_2) = \frac{k_1 k_2}{m} = \omega_{02}^2 k_2,$$

это значение подставим в числитель предыдущего выражения

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{j\omega} \left[ \frac{\omega_{01}^2 (k_1 + k_2) - \omega^2 (k_1 + k_2)}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right] = \frac{1}{j\omega} \left[ \frac{(k_1 + k_2) (\omega_{01}^2 - \omega^2)}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right]; \\ S &= \frac{(k_1 + k_2)}{j\omega} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Подвижность системы

$$L = \frac{j\omega}{(k_1 + k_2)} \left( \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.23)$$

Обе кривые изображены на рис. 4.10, *з*, *д*.

**Система, состоящая из двух последовательно соединенных упругостей и одной массы под действием силы, приложенной к массе (рис. 4.11, *а*, *б*).** Механическая цепь показывает, что в первом расчете ЧКС звена 23 представлены обе упругости — это и определяет, что число резонансов в подобной системе из трех элементов равно одному.

Определение нулей и полюсов системы:

$$L_{23}(p) = L_2(p) + L_3(p) = \frac{p}{k_1} + \frac{p}{k_2} = \frac{p(k_1 + k_2)}{k_1 k_2};$$

$$S_{23}(p) = \frac{k_1 k_2}{p(k_1 + k_2)};$$

$$S(p) = S_1(p) + S_{23}(p) = pm + \frac{k_1 k_2}{p(k_1 + k_2)};$$

$$S(p) = \frac{p^2 m (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{p(k_1 + k_2)}. \quad (4.24)$$

Примем  $k_{12} = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$  и, подставив в (4.24), получим:

$$S(p) = (p^2 m + k_{12})/p.$$

Нули системы

$$p_{1,3}^2 = -k_{12}/m; \quad p_1 = +j\sqrt{k_{12}/m}; \quad p_3 = -j\sqrt{k_{12}/m}.$$

Полюсы системы  $p_2 = 0$ .

Эти значения нулей и полюсов изображены на рис. 4.11, в. Частотная характеристика совместного действия элементов системы определяется из ПКС системы.

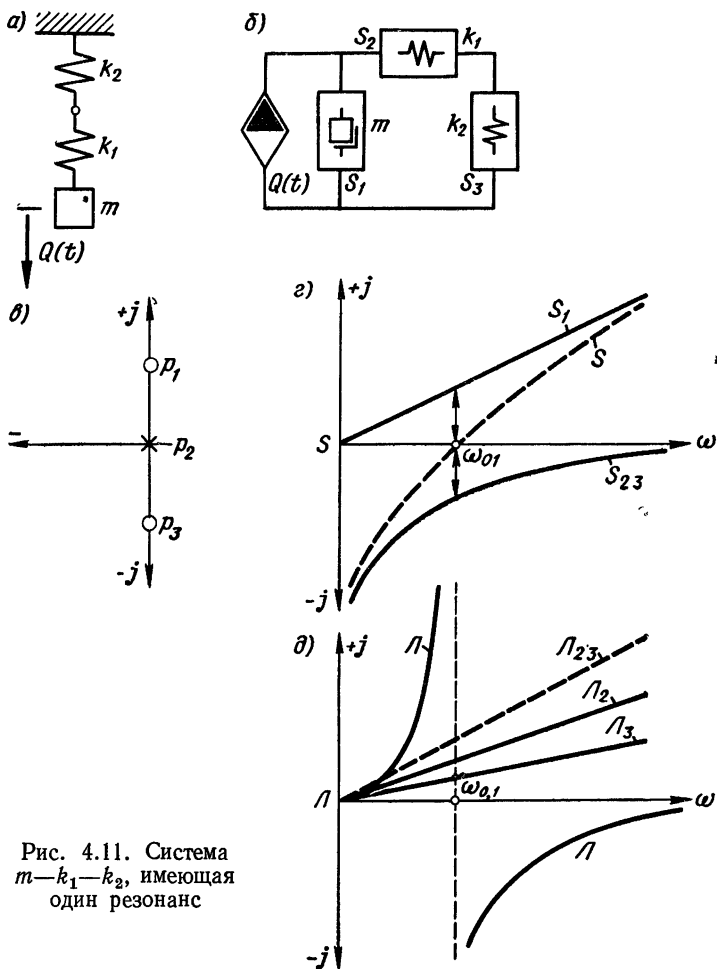


Рис. 4.11. Система  $m-k_1-k_2$ , имеющая один резонанс

ЧКП звена 23

$$L_{23} = L_2 + L_3 = \frac{j\omega}{k_1} + \frac{j\omega}{k_2} = \frac{j\omega(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} = \frac{j\omega}{k_{12}}; \quad S = \frac{k_{12}}{j\omega}.$$

$$\text{ПКС системы } S = S_1 + S_{23} = j\omega m + \frac{k_{12}}{j\omega} = \frac{k_{12} - \omega^2 m}{j\omega}.$$



Резонанс сил будет при  $S = 0$ , когда  $\omega = \omega_{01}$ :

$$k_{12} - \omega_{01}^2 m = 0; \quad \omega_{01}^2 = \frac{k_{12}}{m} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m};$$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m}},$$

что изображено на рис. 4.11, *г, д*.

Для случаев, показанных на рис. 4.7, *е, ж, з*, выводы для доказательства того, что число резонансов будет один, примерно одинаковые — они основываются на том, что либо  $S_{23}$ , либо  $L_{23}$  дают сложение двух упругостей, результирующая которых не имеет дополнительных резонансов от 0 до  $\infty$ .

#### 4.5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕТЫРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ

При рассмотрении механической цепи, состоящей из трех элементов, возникает желание усложнить эту схему, добавить один элемент (массу или упругость). Вполне очевидно, что если для соединения из трех элементов получилось четыре варианта цепи, которая имеет по два резонанса (другие варианты соединения элементов приводят к однорезонансным системам), то для соединения из четырех элементов получится восемь вариантов цепи, которые будут иметь по три резонанса (другие варианты соединения элементов приводят к двухрезонансным или даже однорезонансным системам). На рис. 4.12, *а—з* показаны восемь вариантов динамических систем и их механических цепей, которые образуют по три резонанса: два резонанса сил и один резонанс скоростей или, наоборот, в зависимости от расположения элементов в системе.

На рис. 4.13 показаны варианты динамических систем и их механических цепей, которые обладают тремя, двумя и даже одним резонансом.

**Система, состоящая из двух масс и двух упругостей, находящаяся под действием силы (рис. 4.14, *а*).** Определение нулей и полюсов системы.

$$S_{34}(p) = S_3(p) + S_4(p) = pm_1 + \frac{k_1}{p} = \frac{p^2 m_1 + k_1}{p}; \quad L_{34}(p) = \frac{p}{p^2 m_1 + k_1};$$

$$S_{12}(p) = S_1(p) + S_2(p) = pm_2 + \frac{k_2}{p} = \frac{p^2 m_2 + k_2}{p};$$

$$L_{12}(p) = \frac{p}{p^2 m_2 + k_2};$$

$$\begin{aligned} L(p) &= L_{12}(p) + L_{34}(p) = \frac{p}{p^2 m_2 + k_2} + \frac{p}{p^2 m_1 + k_1} = \\ &= \frac{p(p^2 m_1 + k_1) + p(p^2 m_2 + k_2)}{(p^2 m_1 + k_1)(p^2 m_2 + k_2)}; \end{aligned}$$

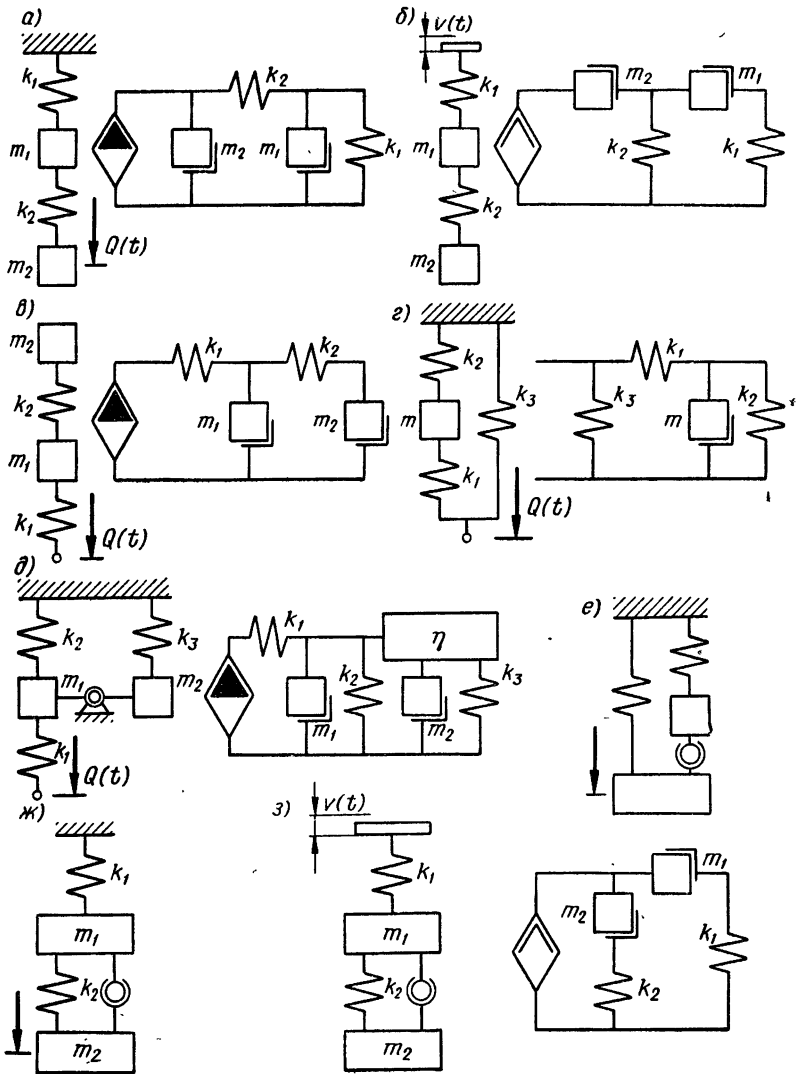


Рис. 4.12. Динамические системы, имеющие по три резонанса

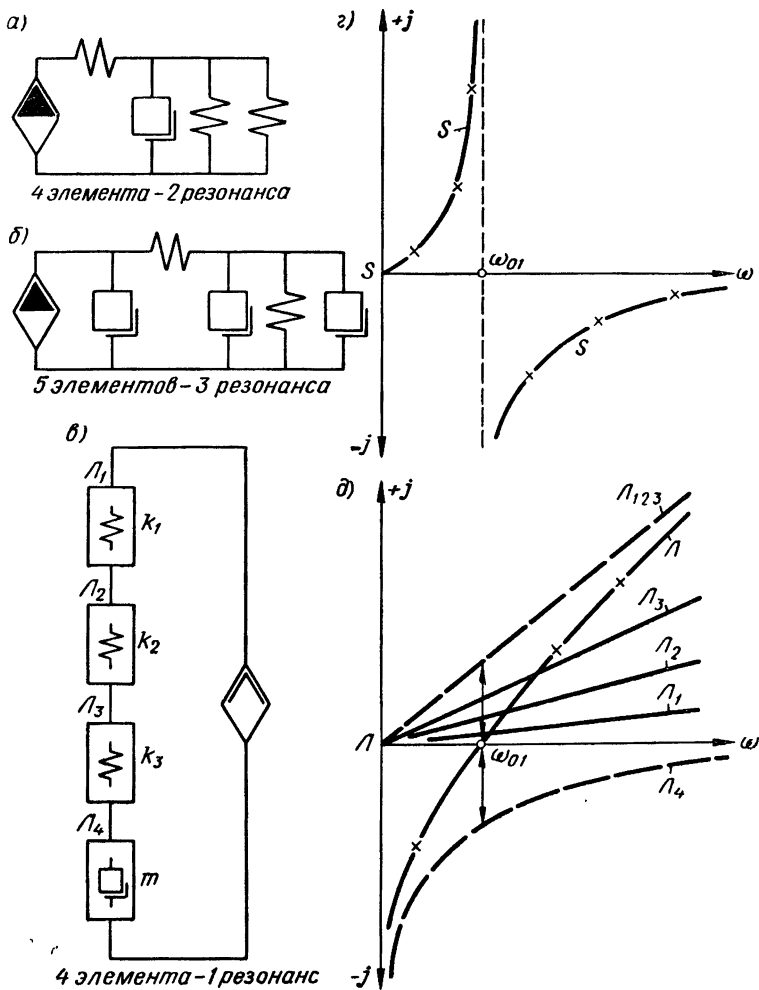


Рис. 4.13. Динамические системы, имеющие по четыре-пять элементов и от одного до трех резонансов: а — система с одним резонансом; б — с тремя резонансами; в, г, д — система с одним резонансом и ее частотные характеристики

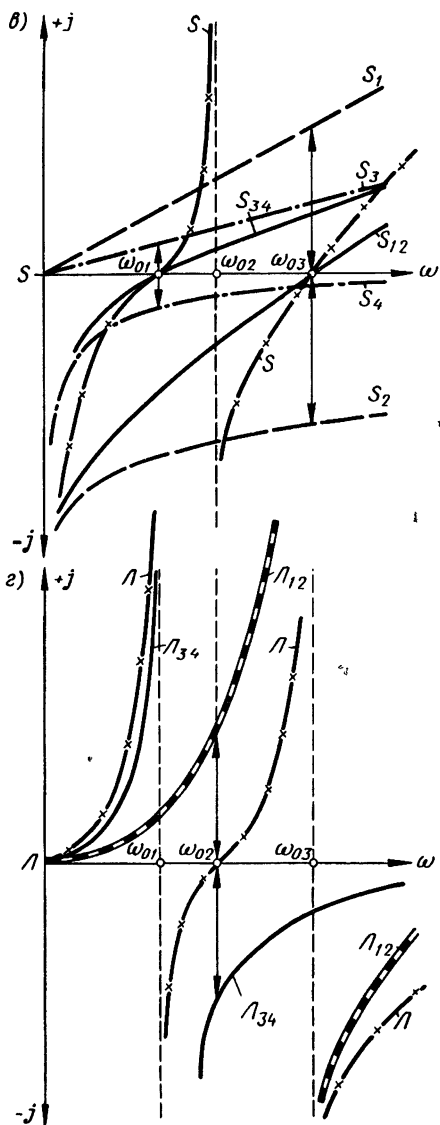
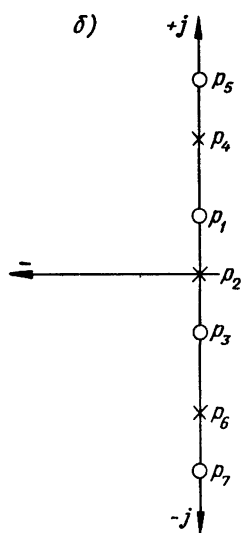
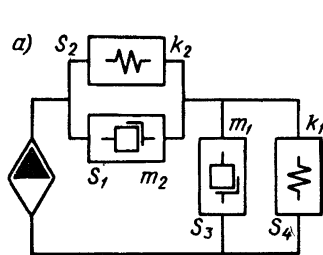


Рис. 4.14. Построение частотных характеристик, имеющих три резонанса

$$L(p) = \frac{p^4 m_1 + p^4 k_1 + p^4 m_2 + p^4 k_2}{p^4 m_1 m_2 + p^4 k_2 m_1 + p^4 k_1 m_2 + k_1 k_2} = \frac{p [p^3 (m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)]}{p^4 m_1 m_2 + p^4 (k_1 m_2 + k_2 m_1) + k_1 k_2};$$

$$S(p) = \frac{p^4 m_1 m_2 + p^4 (k_1 m_2 + k_2 m_1) + k_1 k_2}{p [p^3 (m_1 + m_2) + (k_1 + k_2)]}. \quad (4.25)$$

Нули системы

$$p^4 m_1 m_2 + p^4 (k_1 m_2 + k_2 m_1) + k_1 k_2 = 0.$$

Пусть  $p^2 = u$ ;  $p^4 = u^2$ ;  $m_1 m_2 = a$ ;  $k_1 m_2 + k_2 m_1 = b$ ;  $k_1 k_2 = c$ .

$$au^2 + bu + c = 0; \quad u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$u = \frac{-(k_1 m_2 + k_2 m_1) \pm \sqrt{(k_1 m_2 + k_2 m_1)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2};$$

$$u = \frac{-(k_1 m_2 + k_2 m_1) \pm \sqrt{(k_1 m_2 - k_2 m_1)^2}}{2m_1 m_2} =$$

$$= \frac{-(k_1 m_2 + k_2 m_1) \pm (k_1 m_2 - k_2 m_1)}{2m_1 m_2};$$

$$u_1 = \frac{-k_1 m_2 - k_2 m_1 + k_1 m_2 - k_2 m_1}{2m_1 m_2} = -\frac{2k_2 m_1}{2m_1 m_2} = -\frac{k_2}{m_2};$$

$$u_2 = \frac{-k_1 m_2 - k_2 m_1 - k_1 m_2 + k_2 m_1}{2m_1 m_2} = -\frac{2k_1 m_2}{2m_1 m_2} = -\frac{k_1}{m_1}.$$

Нулями системы будут:  $p = \sqrt{u}$ ;  $p_{1,3} = \sqrt{-k_2/m_2}$ ;  $p_1 = +j \sqrt{k_2/m_2}$ ;  $p_3 = -j \sqrt{k_2/m_2}$ ;  $p_{5,7} = \sqrt{-k_1/m_1}$ ;  $p_5 = +j \sqrt{k_1/m_1}$ ;  $p_7 = -j \sqrt{k_1/m_1}$ .

Полюсы системы:

$$p_2 = 0; \quad p_{4,6}^2 (m_1 + m_2) + (k_1 + k_2) = 0;$$

$$p_{4,6}^2 = -(k_1 + k_2)/(m_1 + m_2); \quad p_4 = +j \sqrt{(k_1 + k_2)/(m_1 + m_2)};$$

$$p_6 = -j \sqrt{(k_1 + k_2)/(m_1 + m_2)}.$$

На рис. 4.14, б показаны нули и полюсы системы. Частотная характеристика совместного действия элементов системы определяется из ПКС системы. ЧКС звена 34 будет:

$$S_{34} = S_3 + S_4 = \frac{m_1}{j} \left( \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega} \right); \quad L_{34} = \frac{j}{m_1} \left( \frac{\omega}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right),$$

при этом

$$k_1/m_1 = \omega_{01}^2. \quad (4.26)$$

ЧКС звена 12 будет

$$S_{12} = S_1 + S_2 = \frac{m_2}{j} \left( \frac{\omega_{03}^2 - \omega^2}{\omega} \right); \quad L_{12} = \frac{j}{m_2} \left( \frac{\omega}{\omega_{03}^2 - \omega^2} \right),$$

при этом

$$k_2/m_2 = \omega_{03}^2. \quad (4.27)$$

ПКП системы

$$L = L_{12} + L_{34} = \frac{j}{m_1} \left( \frac{\omega}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right) + \frac{j}{m_2} \left( \frac{\omega}{\omega_{03}^2 - \omega^2} \right). \quad (4.28)$$

При определенной частоте  $\omega_{02}$ , когда  $L_{12}$  и  $L_{34}$  равны по величине, но противоположны по знаку, наступит резонанс скоростей. Значение этой резонансной частоты найдем из (4.28), когда  $L = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{j}{m_1} \left( \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2} \right) &= - \frac{j}{m_2} \left( \frac{\omega_{02}}{\omega_{03}^2 - \omega_{02}^2} \right); & \frac{m_2}{m_1} &= - \frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\omega_{03}^2 - \omega_{02}^2}; \\ \frac{m_2}{m_1} &= - \frac{\frac{k_1}{m_1} - \omega_{02}^2}{\frac{k_2}{m_2} - \omega_{02}^2}; & k_2 - \omega_{02}^2 m_2 &= - (k_1 - \omega_{02}^2 m_1); \\ k_2 - \omega_{02}^2 m_2 &= - k_1 + \omega_{02}^2 m_1; & k_1 + k_2 &= \omega_{02}^2 (m_1 + m_2); \\ \omega_{02}^2 &= \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставляя значение  $\omega_{02}^2$  из (4.29) в преобразованное выражение (4.28), получим значение подвижности и сопротивления системы:

$$\begin{aligned} L &= \frac{j}{m_1 m_2} \left( \frac{\omega m_2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \frac{\omega m_1}{\omega_{03}^2 - \omega^2} \right) = \\ &= \frac{j}{m_1 m_2} \left[ \frac{\omega m_2 (\omega_{03}^2 - \omega^2) + \omega m_1 (\omega_{01}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]; \\ L &= \frac{j}{m_1 m_2} \left[ \frac{\omega \omega_{03}^2 m_2 - \omega^3 m_2 + \omega \omega_{01}^2 m_1 - \omega^3 m_1}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]. \end{aligned}$$

Подставим значения  $m_2$  и  $m_1$  из (4.26) и (4.27):

$$\begin{aligned} L &= \frac{j}{m_1 m_2} \left[ \frac{\omega \omega_{03}^2 \frac{k_2}{\omega_{03}^2} - \omega^3 (m_1 + m_2) + \omega \omega_{01}^2 \frac{k_1}{\omega_{01}^2}}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]; \\ L &= \frac{j}{m_1 m_2} \left[ \frac{\omega k_2 + \omega k_1 - \omega^3 (m_1 + m_2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]. \end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель на  $(m_1 + m_2)$  и, помня (4.29), получим:

$$\begin{aligned} L &= \frac{j}{m_1 m_2} \left[ \frac{\frac{\omega (k_1 + k_2)}{m_1 + m_2} - \frac{\omega^3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}}{\frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)}{m_1 + m_2}} \right] = \\ &= \frac{j (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left[ \frac{\omega \omega_{02}^2 - \omega^3}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]; \\ L &= \frac{j \omega}{m_{12}} \left[ \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)} \right]; \\ S &= \frac{m_{12}}{j \omega} \left[ \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2) (\omega_{03}^2 - \omega^2)}{\omega_{02}^2 - \omega^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Это будет выражение ПКС системы в зависимости от резонансных и текущих частот системы; в числителе расположены разности квадратов частот резонансов сил и текущей частоты, в знаменателе — разность квадратов частот резонанса скоростей и текущей частоты.

На рис. 4.14, в, г показаны порядок нахождения частотных характеристик в зависимости от соединения ЧКС  $S_3 + S_4$ ;  $S_1 + S_2$ , а также ЧКП  $L_{12} + L_{34}$ . В результате находятся кривые для ПКС и ПКП. На оси абсцисс отмечаются точки пересечения этих кривых, соответствующие резонансам.

**Пример 3.** Дана динамическая система с двумя степенями свободы (рис. 1.12, а); сила  $Q_2(t)$  действует на массу  $m_2$ ; механическая цепь показана на рис. 1.12, г. Определить резонансные частоты, если  $m_1 = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $m_2 = 5$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $k_1 = 500$  кгс/м;  $k_2 = 1000$  кгс/м. Полюсы системы будут согласно выводов  $p_2 = 0$ . Частота  $\omega = 0$  не учитывается;  $p_{4,6} = \pm \sqrt{k_1/m_1} = \pm j\sqrt{500/2} = \pm j15,8$ ; положительная частота  $\omega_6, j\omega_6 = +j15,8$  или  $\omega_6 = 15,8$  1/с.

Пропуская вывод, можно написать, что нули системы получим после решения уравнения  $m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 (k_1 m_1 + k_1 m_2 + k_2 m_1) + k_1 k_2 = 0$ . Подставим численные значения элементов  $10\omega^4 - \omega^2 (10^3 + 2,5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3) + 5 \cdot 10^5 = 0$ ;  $\omega^4 - 5,5 \cdot 10^2 \omega^2 + 5 \cdot 10^4 = 0$ ;  $\omega_{01} = 10,7$  1/с;  $\omega_{03} = -10,7$  1/с;  $\omega_{05} = 20,85$  1/с;  $\omega_{07} = -20,85$  1/с.

Итак, резонансами сил будут  $\omega_{01} = 10,7$  1/с;  $\omega_{05} = 20,85$  1/с, резонансом скоростей будет  $\omega_6 = 15,8$  1/с.

#### 4.6. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ

Добавлением еще одного элемента к системе из четырех элементов получаем динамические системы, состоящие из пяти элементов; в такой системе будет четыре резонанса: два резонанса сил и два резонанса скоростей. Выражение для сопротивления будет типа

$$S = H \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)}. \quad (4.31)$$

При этом  $H$  может иметь вид  $j\omega m$ ;  $m/(j\omega)$  или  $j\omega k$ ;  $k/(j\omega)$ , а выражения, стоящие в числителе и знаменателе, могут меняться местами. Если для двухэлементных могут быть два типа схемы, для трехэлементных — четыре, для четырехэлементных — восемь, то для пятиэлементных получается тридцать два типа схемы.

Добавляя по одному элементу, получаются системы с шестью, семью, восемью и более элементами, при этом число резонансов будет всегда на один меньше числа элементов, если они не соединены таким образом, что позволяют произвести такие соединения между собой, что уменьшает число резонансов.

Обобщая результаты выводов, полученных ранее, можно написать формулы сопротивления, состоящих из  $n$  элементов типа  $m$  или  $k$ .

**Динамическая система, состоящая из нечетного числа элементов, при этом число масс больше числа упругостей на единицу.** Если  $n$  — число элементов, то число масс будет  $(n + 1)/2$ , а число упругостей  $(n - 1)/2$ . В этом случае будет четное число резонансов сил и скоростей; первым резонансом будет резонанс сил, последним — резонанс скоростей. Поведение системы будет соответствовать характеру массы как при нулевой, так и бесконечно большой частотах. Выражение для комплексного сопротивления будет

$$S = j\omega m \frac{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)(\omega_{06}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)(\omega_{05}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}, \quad (4.32)$$

здесь  $m$  соответствует выражению массы при бесконечно большой частоте (рис. 4.15, а).

**Динамическая система, состоящая из нечетного числа элементов, при этом число упругостей больше числа масс на единицу.** Если  $n$  — число элементов, то число масс будет  $(n - 1)/2$ , а число упругостей  $(n + 1)/2$ . В этом случае будет также четное число резонансов сил и скоростей; первым резонансом будет резонанс скоростей, последним — резонанс сил. Поведение системы будет соответствовать характеру упругости, как при нулевой, так и при бесконечно большой частотах. Выражение для комплексного сопротивления будет

$$S = -j \frac{k}{\omega} \cdot \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)(\omega_{05}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)(\omega_{06}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}, \quad (4.33)$$

здесь  $k$  соответствует выражению упругости при бесконечно большой частоте (рис. 4.15, б).

**Динамическая система, состоящая из четного числа элементов, при этом число масс и упругостей одинаковое.** Если  $n$  — число элементов, то число масс и упругостей  $n/2$ . В этом случае система имеет нечетное число резонансов сил и скоростей; первым и последним резонансом будет резонанс сил. Поведение системы будет соответствовать характеру массы при нулевой частоте и характеру упругости при бесконечно большой частоте. Выражение для комплексного сопротивления будет:

$$S = j\omega k \frac{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)(\omega_{06}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)(\omega_{05}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}. \quad (4.34)$$

При этом здесь  $k$  соответствует выражению упругости при бесконечно большой частоте (рис. 4.15, в).

**Динамическая система, состоящая из четного числа элементов, при этом число масс и упругостей одинаковое.** Если  $n$  — число элементов, то число масс и упругостей  $n/2$ . В этом случае система имеет нечетное число резонансов скоростей и сил; первым и последним резонансом будет резонанс скоростей. Поведение



системы будет соответствовать характеру упругости при нулевой частоте и характеру массы при бесконечно большой частоте. Выражение для сопротивления будет:

$$S = -j \frac{m}{\omega} \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)(\omega_{05}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)(\omega_{06}^2 - \omega^2) \dots (\omega_{n-2}^2 - \omega^2)}, \quad (4.35)$$

здесь  $m$  соответствует выражению массы при бесконечно большой частоте (рис. 4.15, з).

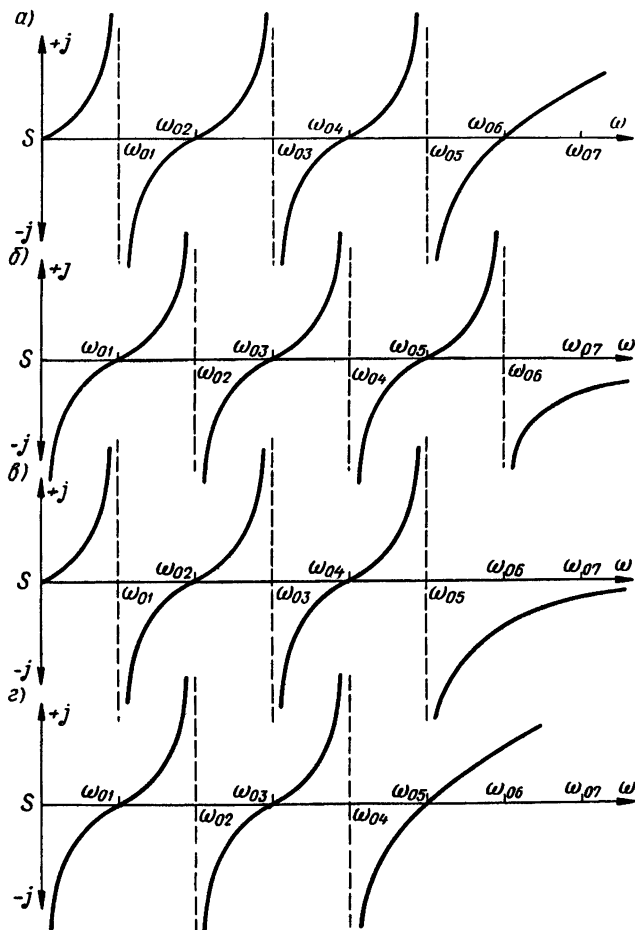


Рис. 4.15. Четыре возможных случая частотных характеристик динамических систем

Приведем несколько примеров для определения вида частотных характеристик.

Пример 4. Динамическая система показана на рис. 1.11, а. Она содержит пять пассивных элементов: две массы и три упругости. Согласно уравнению (4.33) система обладает четным числом резонансов: первым и третьим резонансами

будут резонансы скоростей, вторым и четвертым — будут резонансы сил (рис. 4.16, а). Выражение для комплексного сопротивления будет

$$S = -j \frac{k}{\omega} \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)}.$$

**Пример 5.** Динамическая система показана на рис. 1.13, а. Она содержит шесть пассивных элементов: три массы и три упругости. Согласно уравнению (4.34) система обладает нечетным числом резонансов: первым, третьим и пятым резонансами будут резонансы сил, а вторым и четвертым — резонансы скоростей (рис. 4.15, в). Выражение для комплексного сопротивления будет

$$S = j\omega k \frac{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{04}^2 - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2)(\omega_{05}^2 - \omega^2)}.$$

**Пример 6.** Динамическая система показана на рис. 4.10, а. Она содержит три пассивных элемента: две упругости и одну массу. Согласно уравнению (4.33) система обладает четным числом резонансов: первым будет резонанс скоростей, а вторым — резонанс сил (рис. 4.16, б). Выражение для комплексного сопротивления будет

$$S = -j \frac{k}{\omega} \frac{(\omega_{01}^2 - \omega^2)}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)}.$$

#### 4.7. ГАШЕНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

В конструкторской практике при рассмотрении динамических систем приходится решать задачи зачастую противоположные по содержанию. Действительно, в одних задачах необходимо в системе, находящейся в колебательном процессе, ввести массу,

которая должна погасить колебательный процесс; в других задачах необходимо в системе, находящейся в покое, создать условия для возникновения колебаний определенной амплитуды и частоты; в третьих задачах необходимо в системе, находящейся в покое, обеспечить защиту передачи колебаний от массы, находящейся внутри системы, в колебательном процессе. В табл. 4.2 показаны динамическая система и три возможных варианта задач, возникающих в практике. Постановка таких задач является тем более правомерной, что процесс колебаний сам по себе и вызываемые

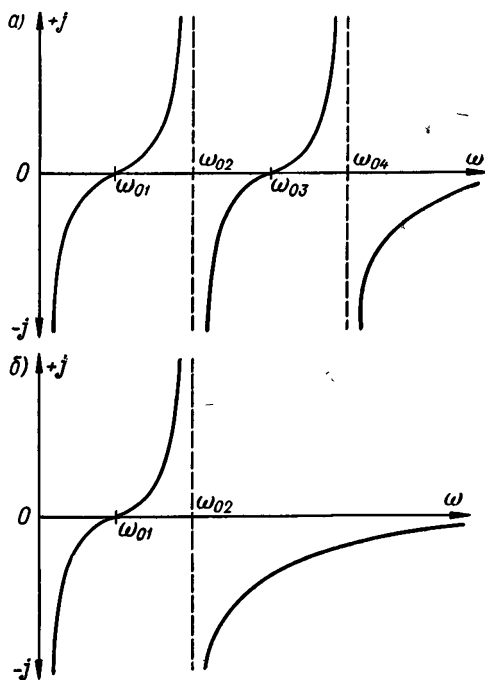


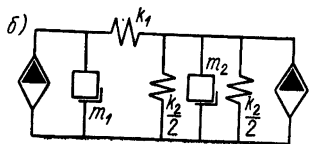
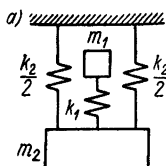
Рис. 4.16. Примеры частотных характеристик

им вибрации для одних машин и механизмов являются полезными и, следовательно, необходимо стремиться защитить конструкцию от вредных влияний вибрации с точки зрения прочности, жесткости, концентрации напряжений при знакопеременной нагрузке, для других машин и механизмов этот процесс является вредным, и необходимо принять все меры для гашения этого процесса или

Т а б л и ц а 4.2

Сочетания колебаний в системе с двумя степенями свободы

| Вариант | Колебания в системе |            |
|---------|---------------------|------------|
|         | $m_1$               | $m_2$      |
| 1       | Не имеются          | Имеются    |
| 2       | Имеются             | »          |
| 3       | »                   | Не имеются |



снижения его до такой величины, когда последствия находятся в допустимых пределах. (В данной работе под термином «гашение» подразумевается введение различных средств сопротивления; под термином «затухание» подразумевается процесс снижения колебаний во времени).

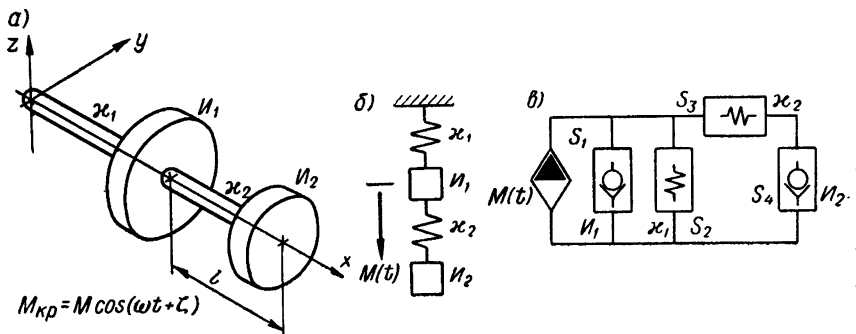


Рис. 4.17. Динамическая система гашения колебаний

Рассмотрим основы гашения вибрации для вращательной системы, состоящей из инерции и упругости. Пусть на массу с инерцией  $I_1$ , находящуюся на валу (рис. 4.17, а), с крутильной упругостью  $x_1$ , действует внешний крутящий момент  $M(t)$ , например  $M(t) = M \cos(\omega t + \zeta)$ . В зависимости от величины частот вал будет находиться в колебательном процессе с какой-то амплитудой. Имеется ряд способов уменьшения амплитуды вынужденных колебаний; одним из способов может быть введение дополнительного колебательного контура, состоящего из массы с инер-

цией  $I_2$  и вала с упругостью  $\kappa_2$ ; построим динамическую систему и механическую цепь этого устройства (рис. 4.17, б, в). Определим величины угловых поворотов  $\varphi_1$  и  $\varphi_4^1$  для инерций  $I_1$  и  $I_2$  соответственно.

Вначале определим комплексные сопротивления системы и угловые скорости для инерций  $I_1$  и  $I_2$ :

$$S_{34} = \frac{j\omega\kappa_2 I_2}{\kappa_2 - \omega^2 I_2}; \quad S_{12} = \frac{\kappa_1 - \omega^2 I_1}{j\omega};$$

$$S = \frac{I_1 I_2 \omega^4 - (\kappa_1 I_2 + \kappa_2 I_1 + \kappa_2 I_2) \omega^2 + \kappa_1 \kappa_2}{j\omega (\kappa_2 - \omega^2 I_2)}.$$

Обозначим значение числителя через  $A$ . Угловая скорость системы и инерции  $I_1$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{j\omega M (\kappa_2 - \omega^2 I_2)}{A}. \quad (4.36)$$

Угол поворота инерции  $I_1$

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}}{j\omega} = \frac{M (\kappa_2 - \omega^2 I_2)}{A}. \quad (4.37)$$

Когда  $\varphi_1 = 0$ , движение основного контура затухнет и тогда

$$\kappa_2 - \omega^2 I_2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\kappa_2 / I_2}. \quad (4.38)$$

Для определения  $\dot{\varphi}_2$  и  $\varphi_2$  инерции  $I_2$  найдем  $M_{34}$ , зная, что  $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_{34} = \varphi_{34}$ ;  $M_{34} = S_{34} \delta_{34}$ ;

$$M_{34} = \frac{(j\omega\kappa_2 I_2) [j\omega M (\kappa_2 - \omega^2 I_2)]}{(\kappa_2 - \omega^2 I_2) A} = \frac{(j\omega)^2 M \kappa_2 I_2}{A}.$$

Известно, что  $M_4 = M_{34} = M_3$ . Следовательно, угловая скорость инерции  $I_2$  (или  $S_4$ ) будет:

$$\dot{\varphi}_4 = \delta_4 = \frac{M_4}{S_4} = \frac{(j\omega)^2 M \kappa_2 I_2}{A j\omega I_2} = \frac{j\omega M \kappa_2}{A};$$

$$\varphi_4 = \frac{\dot{\varphi}_4}{j\omega} = \frac{M \kappa_2}{A};$$

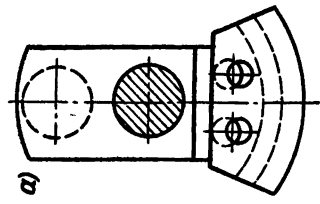
$$\varphi_4 = \frac{M \kappa_2}{I_1 I_2 \omega^4 - (\kappa_1 I_2 + \kappa_2 I_1 + \kappa_2 I_2) \omega^2 + \kappa_1 \kappa_2}. \quad (4.39)$$

Подставляя вместо  $\kappa_2 = \omega^2 I_2$  в (4.39), получим:

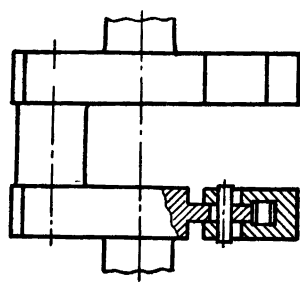
$$\varphi_4 = \frac{M \omega^2 I_2}{I_1 I_2 \omega^4 - \kappa_1 I_2 \omega^2 - I_1 I_2 \omega^4 - I_2^2 \omega^4 + \kappa_1 I_2 \omega^2} = \frac{M \omega^2 I_2}{-\omega^4 I_2^2};$$

$$\varphi_4 = -\frac{M}{\omega^2 I_2} = -\frac{M}{\kappa_2} = -\frac{M(t)}{\kappa_2}. \quad (4.40)$$

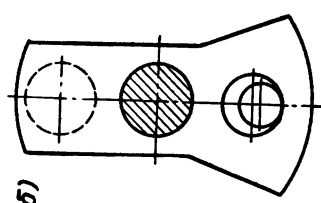
<sup>1</sup> Вместо индекса 2 взят индекс 4, так как (рис. 4.17, в) инерции  $I_2$  соответствует комплексное сопротивление  $S_4$ .



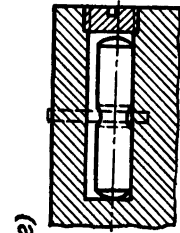
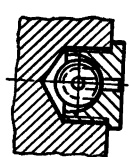
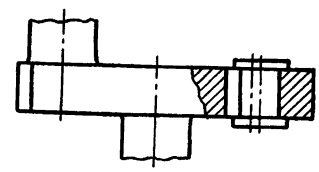
a)



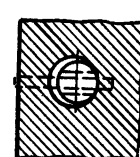
b)



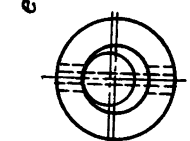
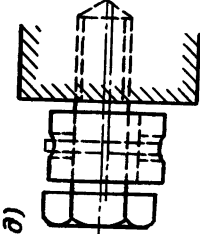
в)



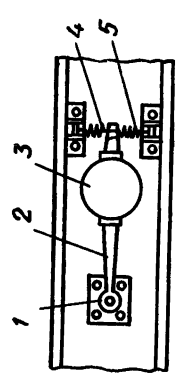
г)



д)



е)



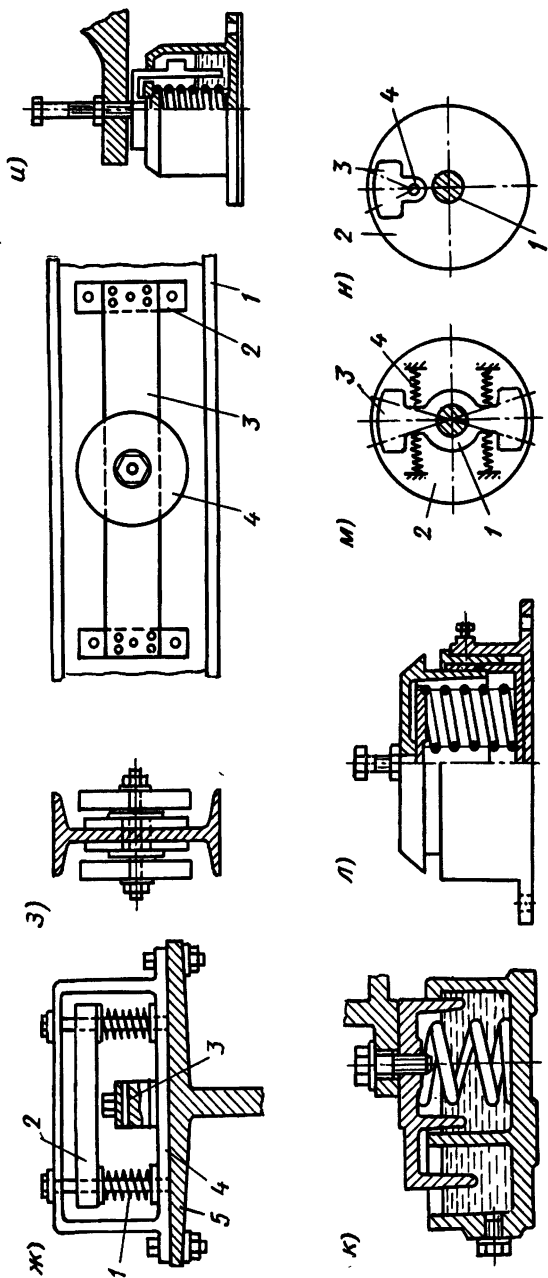


Рис. 4.18. Конструктивные примеры гашения колебаний

Угловой поворот введенной колебательной системы будет происходить в обратном направлении от внешнего момента, действующего на систему  $I_1$ , и будет отличаться на величину упругости вала введенной системы и находиться в той же фазе.

Для определения размеров введенного контура следует пользоваться уравнениями (4.38) и (4.40). Из курса «Теория упругости» известно, что  $\kappa = M/\varphi$ , а  $\varphi = MI/GI_{\pi}$ ; здесь  $l$  — длина вала,  $m$ ;  $G$  — модуль сдвига, кгс/м<sup>2</sup>;  $I_{\pi}$  — полярный момент инерции, м<sup>4</sup>. Из приведенных выше зависимостей для  $\kappa$  и  $\varphi$  можно написать

$$\kappa_2 = \frac{M}{\varphi} = \frac{MGI_{\pi}}{MI} = \frac{GI_{\pi}}{l}.$$

Из уравнения (4.40)

$$\kappa_2\varphi_4 = \frac{GI_{\pi}\varphi_4}{l} = -M(t) = -M \cos(\omega t + \xi). \quad (4.41)$$

Для гашения вибраций имеется ряд проверенных конструктивных решений, соответствующих введению только массы или массы и упругости. Для многоцилиндровых двигателей подобная подвижная масса помещается на щеках противовесов (рис. 4.18, а) или вводится в виде цилиндра, помещенного в створствие большого диаметра (рис. 4.18, б). Наиболее строго отвечающая расчетам была бы такая система из трех рассмотренных элементов, которая располагалась бы под углом 120° относительно оси коленчатого вала. Для вращательных систем также применяется следующее устройство (рис. 4.18, м): с валом 1 вращается диск 2, кроме того, на валу 1 свободно посажен рычаг 3 с определенной расчетной массой; пружины 4 одним полюсом имеют выступы на диске 2, а другим — упираются в рычаг 3. Подобный гаситель имеет тот недостаток, что он может быть настроен только на одной частоте; при наличии двух резонансов эта система не имеет оптимального решения. Лучшей системой является маятниковый гаситель с внецентровой установкой (рис. 4.18, н). На валу 1 укреплен диск 2; на этом диске на оси 4 расположен маятниковый гаситель 3.

В роли гасителей вибрации могут быть устройства ударного действия, представляющие из себя массу расчетной величины — шар (рис. 4.18, в) или цилиндр (рис. 4.18, г), свободно расположенные с диаметральным зазором в полости конструкции, вибрацию которой стремятся снизить, или в виде втулки на оси с зазором (рис. 4.18, д); при этом необходимо ограничить возможность перемещения этого тела от плоскости, вдоль которой происходят колебания, например, направляющим штифтом. Для гашения вибраций применяются решения в виде рычага 2 на оси поворота 1 и массы 3, удерживаемой двумя пружинами 4; очевидно, что собственная частота гасителя должна соответствовать частоте, с которой колеблется балка 5 (рис. 4.18, е). Идея подобного гасителя с угловым поворотом использована в другой конструкции с поступательным перемещением массы 2, пружин 1 и сопротивления 3 (рис. 4.18, ж). Корпус 4 гасителя соединяется жестко с кон-

струкцией 5, колебания которой необходимо снизить. Несколько иное конструктивное решение (рис. 4.18, з) состоит в том, что к основной конструкции, на которой хотят снизить вибрации (в данном случае — балка 1), прикрепляют по две планки 2 с каждой стороны; к планкам крепят упругие пластины 3, а к ним массы 4. В данном случае гасителем является динамическая система, состоящая из массы и упругости, выполненной в двойном

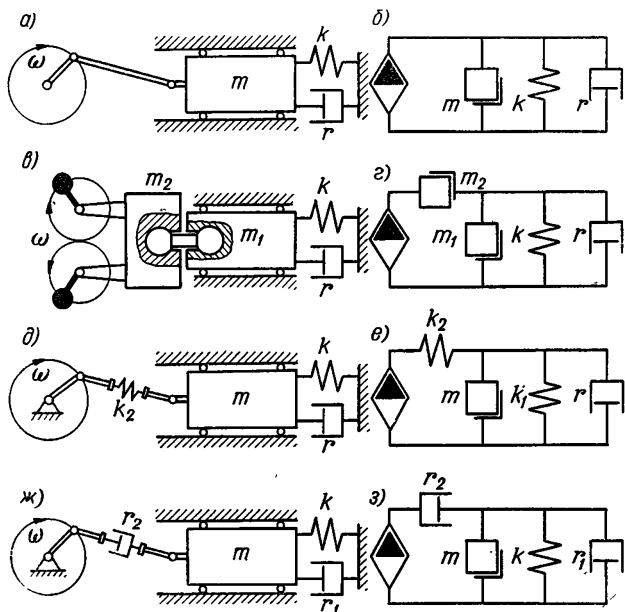


Рис. 4.19. Динамические системы возбуждения колебаний: а, б — система, состоящая из массы, упругости и сопротивления; в, г — система, состоящая из двух масс, упругости и сопротивления; д, е — система, состоящая из массы, двух упругостей и сопротивлений; ж, з — система, состоящая из массы, упругости и двух сопротивлений

количестве. Для гашения вибраций подвижных в вертикальной плоскости фундаментов, на которых установлены шлифовальные, координатно-расточные или другие прецизионные станки, в настоящее время имеются пружинные опоры нескольких конструктивных решений; с наличием дополнительного гасителя в виде масляной жидкости (рис. 4.18, и, к) или резиновых пластин (рис. 4.18, л).

Возбуждение колебаний может производиться четырьмя видами приводов: кинематически-жестким, инерционным, упругим с эластичным звеном и вязким. Периодическое воздействие внешней силы на систему создает в ней вынужденное возбуждение колебаний.

На рис. 4.19 показаны виды возбудителей колебаний, их кинематические схемы и механические цепи.

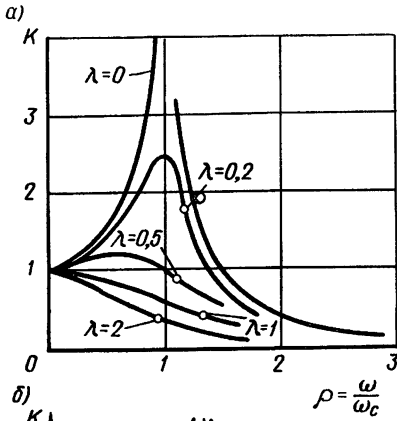


#### 4.8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПРОЦЕССОВ ЗАТУХАНИЯ

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы выражаются уравнением

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = Q_0 \sin \omega t, \quad (4.42)$$

где  $Q_0$  — наибольшая амплитуда внешней силы. Частное решение уравнения (4.42) имеет вид



$$y_{\text{ч}} = \frac{Q_0 \sin(\omega t - \zeta)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}} = Y \sin(\omega t - \zeta), \quad (4.43)$$

где  $\zeta$  — отставание по фазе, а  $Y$  — амплитуда гармонического колебания в установившемся движении.

Общее решение уравнения (4.42) имеет вид

$$y = y_c + y_{\text{ч}} = (C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}) + Y \sin(\omega t - \zeta),$$

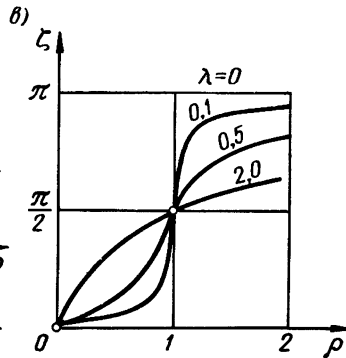
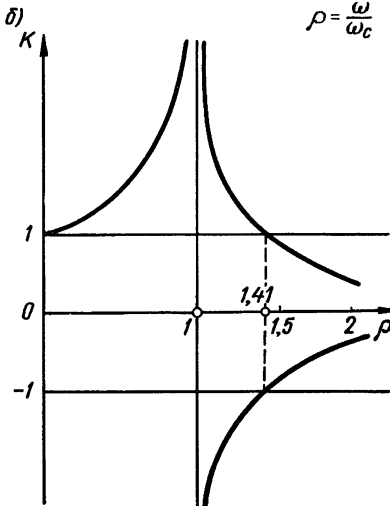


Рис. 4.20. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики

где  $y_c$  — решение уравнения свободных колебаний при  $Q_0 = 0$ . В уравнении (4.43) разделим числитель и знаменатель на  $k$  и выражение  $Q_0/k$  обозначим через  $Y_0$ :

$$Y = \frac{Y_0}{1/k \sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}.$$

Если обозначить  $r/k = 2\lambda/\omega_c$ ;  $\rho = \omega/\omega_c$ , то коэффициент усиления

$$K = Y/Y_0 = 1/\sqrt{(1 - \rho^2)^2 + (2\lambda\rho)^2}. \quad (4.44)$$

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{r\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\lambda\rho}{1 - \rho^2}. \quad (4.45)$$

Отставание по фазе определится из уравнения

При этом, если  $\omega < \omega_c$ , то  $\zeta < \pi/2$ ; если  $\omega = \omega_c$ , то  $\zeta = \pi/2$ ; если  $\omega > \omega_c$ , то  $\zeta > \pi/2$ ; если  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $\zeta \rightarrow \pi$ . На рис. 4.20, а показана амплитудно-частотная характеристика для рассматриваемой системы. Начало координат кривой выходит из точки с координатами  $\rho = 0$ ,  $K = 1$ , что получается из уравнения (4.44) вне зависимости от наличия в системе  $r$  гашения. Найдем значение  $\rho$  на нисходящей ветви резонансной кривой (под линией абсцисс) на рис. 4.20, б. Если  $K = -1$  и  $\lambda = 0$ , то  $\rho = +1,41$ . Для удобства рассматриваем зеркальное изображение резонансной кривой. Резонанс происходит при  $\rho = 1$ , если  $\lambda = 0$ ,  $K = \infty$ . В общем виде  $K = 1/(2\lambda)$ ; например, если  $\lambda = 0,2$ ,  $\rho = 1$ , то  $K = 2,5$ . Установившаяся реакция выражается через  $Y \sin(\omega t - \zeta)$ , возмущающая сила  $Q_0 \sin \omega t$ . Обе величины не достигают наибольшего значения в одно и то же время  $t$ ; это происходит из-за влияния фазового угла  $\zeta$  (4.45). При  $\rho = 0$   $\zeta = 0^\circ$ ; при  $\rho = 1$  и  $\lambda = 0$   $\zeta = 0^\circ$ . При отсутствии гашения  $\zeta = 0$  или  $\pi$ . Изображение фазо-частотной характеристики показано на рис. 4.20, в.

## МЕХАНИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

## 5.1. АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЧП

Прежде чем рассматривать существо фильтров, остановимся на некоторых вопросах анализа зависимостей МЧП и их параметрах.

Ранее было установлено, что четырехполосник характеризуется двумя силами и двумя скоростями на входе и выходе и, следовательно, двумя сопротивлениями, измеренными на входе и на выходе, следовательно, входное сопротивление  $S_{01} = Q_1/v_1$ ; выходное сопротивление  $S_{02} = Q_2/v_2$ . Если уравнения четырехполосника описаны в системе  $B$ -параметров, то (3.30):

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2. \end{aligned} \right\}$$

Между коэффициентами этой системы существует зависимость:  $\|B\| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1$ , исходя из которой пассивный четырехполосник можно характеризовать тремя независимыми величинами  $B_{11} = (1 + B_{12}B_{21})/B_{22}$ . Если четырехполосник симметричен (при  $B_{11} = B_{22}$ ), то его можно характеризовать двумя величинами:  $B_{11}^2 = 1 + B_{12}B_{21}$ ;  $B_{11} = \sqrt{1 + B_{12}B_{21}}$ .

Найдем для уравнения (3.30) входное сопротивление при условии, что нагрузка передается от входа 1 к выходу 2, и выходное

$$S'_{01} = \frac{Q_1}{v_1} = \frac{B_{11}Q_2 + B_{12}v_2}{B_{21}Q_2 + B_{22}v_2}; \quad (5.1)$$

$$S'_{02} = \frac{Q_2}{v_2}; \quad Q_2 = S'_{02}v_2. \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), имеем:

$$S_{01} = \frac{B_{11}S'_{02}v_2 + B_{12}v_2}{B_{21}S'_{02}v_2 + B_{22}v_2} = \frac{(B_{11}S'_{02} + B_{12})v_2}{(B_{21}S'_{02} + B_{22})v_2} = \frac{B_{11}S'_{02} + B_{12}}{B_{21}S'_{02} + B_{22}}.$$

В режиме мгновенной остановки  $S'_{02} = 0$  и входное сопротивление

$$S'_{01 (м. о)} = \frac{B_{12}}{B_{22}}. \quad (5.3)$$

В режиме холостого хода  $S'_{02} = \infty$  и входное сопротивление

$$S'_{01(x. x)} = \frac{B_{11} + \frac{B_{12}}{S'_{02}}}{B_{21} + \frac{B_{22}}{S'_{02}}} = \frac{B_{11} + \frac{B_{12}}{\infty}}{B_{21} + \frac{B_{22}}{\infty}} = \frac{B_{11}}{B_{21}}. \quad (5.4)$$

Если нагрузка передается в обратном направлении от выхода 2 к входу 1, то из первого уравнения (3.30) для  $Q_2$  и из второго уравнения для  $v_2$  имеем:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} v_2; \quad (5.5)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{B_{22}} - \frac{B_{21}}{B_{22}} Q_2. \quad (5.6)$$

Подставляя значение  $v_2$  из (5.6) в (5.5) и преобразовывая, получаем

$$Q_2 = B_{22} Q_1 - B_{12} v_1. \quad (5.7)$$

Подставляя значение  $Q_2$  из (5.5) в (5.6) и преобразовывая, получаем

$$v_2 = B_{11} v_1 - B_{21} Q_1. \quad (5.8)$$

Система уравнений (5.7) и (5.8) представляет собой математическое выражение действия нагрузки от выхода к входу. Так как нагрузка передается в обратном направлении, следует изменить знак действия скоростей; поэтому:

$$S''_{02} = Q_2 / -v_2; \quad S''_{01} = Q_1 / -v_1. \quad (5.9)$$

Подставляя значения (5.7) и (5.8) в (5.9) и заменяя  $Q_1 = -S''_{01} v_1$ , получаем:

$$S''_{02} = \frac{B_{22} Q_1 - B_{12} v_1}{-(-B_{21} Q_1 + B_{11} v_1)} = \frac{B_{22} (-S''_{01} v_1) - B_{12} v_1}{B_{21} (-S''_{01} v_1) - B_{11} v_1} = \frac{-v_1 (B_{22} S''_{01} + B_{12})}{-v_1 (B_{21} S''_{01} + B_{11})};$$

$$S''_{02} = \frac{B_{22} S''_{01} + B_{12}}{B_{21} S''_{01} + B_{11}}.$$

В режиме мгновенной остановки  $S''_{01} = 0$  и входное сопротивление  $S''_{02(m. o)} = B_{12} / B_{11}$ . В режиме холостого хода  $S''_{01} = \infty$  и входное сопротивление

$$S''_{02(x. x)} = \frac{B_{22} + \frac{B_{12}}{S''_{01}}}{B_{21} + \frac{B_{11}}{S''_{01}}} = \frac{B_{22} + \frac{B_{12}}{\infty}}{B_{21} + \frac{B_{11}}{\infty}} = \frac{B_{22}}{B_{21}}.$$

## 5.2. ВТОРИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МЧП

Введем первое понятие вторичных параметров — характеристическое сопротивление  $L$ ; будем считать характеристическим такое сопротивление, которое, будучи включенным на выходе четырехполюсника, обеспечивает на входе такое же сопротивление, т. е.

$$L = Q_1 / v_1 = Q_2 / v_2. \quad (5.10)$$

Если четырехполюсник симметричный (при  $B_{11} = B_{22}$ ), то уравнение (3.30) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{11}v_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Подставляя в (5.11) значения из (5.10),  $Q_2 = Lv_2$ , имеем:  $Q_1 = B_{11}Lv_2 + B_{12}v_2 = (B_{11}L + B_{12})v_2$ ;  $v_1 = B_{21}Lv_2 + B_{11}v_2 = (B_{21}L + B_{11})v_2$ . Разделим первое уравнение на второе  $L = Q_1/v_1 = (B_{11}L + B_{12})/(B_{21}L + B_{11})$ ;  $B_{21}L^2 + B_{11}L = B_{11}L + B_{12}$ ;  $B_{21}L^2 = B_{12}$ ;  $L = \sqrt{B_{12}/B_{21}}$ . Это выражение представляет собой характеристическое сопротивление в зависимости от коэффициентов четырехполюсника. Здесь и дальше перед корнем знак минус опускается; только в этом случае  $L$  имеет физический смысл.

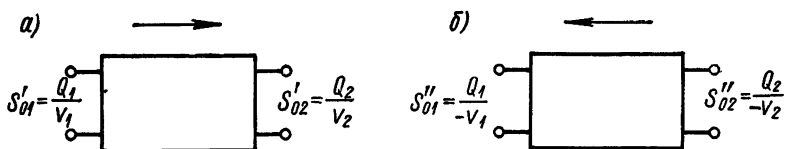


Рис. 5.1. Входные сопротивления в зависимости от передачи нагрузки: а — нагрузка от входа к выходу; б — нагрузка от выхода к входу

Рассмотрим этот вопрос в общем виде. Пусть имеется некоторый линейный пассивный МЧП (рис. 5.1). Необходимо найти два сопротивления  $L_1$  и  $L_2$ , которые находились бы между собой в следующем взаимодействии: при внешней нагрузке на выходе, равной сопротивлению  $L_2$ , в четырехполюснике на входе было бы сопротивление  $L_1$  и, наоборот, при внешней нагрузке на входе, равной сопротивлению  $L_1$ , в четырехполюснике на выходе было бы сопротивление  $L_2$ . В первом случае, когда нагрузка передается (рис. 5.1, а) от входа к выходу, из (5.1) и (5.2) получаем, принимая для согласованных на входе и выходе сопротивлений:

$$\begin{aligned} L_1 = S'_{01} &= \frac{Q_1}{v_1}; \quad Q_1 = L_1v_1 \quad \text{и} \quad L_2 = S'_{02} = \frac{Q_2}{v_2}, \quad Q_2 = L_2v_2, \\ L_1 = S'_{01} &= \frac{B_{11}Q_2 + B_{12}v_2}{B_{21}Q_2 + B_{22}v_2} = \frac{(B_{11}L_2 + B_{12})v_2}{(B_{21}L_2 + B_{22})v_2}, \\ L_1 &= \frac{B_{11}L_2 + B_{12}}{B_{21}L_2 + B_{22}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Во втором случае, когда нагрузка передается (рис. 5.1, б) от выхода к входу, из (5.7), (5.8) и (5.9) получаем, принимая для согласованного на выходе и входе сопротивления:

$$L_2 = S''_{02} = \frac{Q_2}{-v_2}; \quad Q_2 = -L_2v_2; \quad L_1 = S''_{01} = \frac{Q_1}{-v_1}; \quad Q_1 = -L_1v_1;$$

$$L_2 = S'_{02} = \frac{B_{22}Q_1 - B_{12}v_1}{-(-B_{21}Q_1 + B_{11}v_1)} = \frac{-v_1(B_{22}L_1 + B_{12})}{-v_1(B_{21}L_1 + B_{11})};$$

$$L_2 = \frac{B_{22}L_1 + B_{12}}{B_{21}L_1 + B_{11}}. \quad (5.13)$$

Подставляя из (5.13) в (5.12), получаем

$$L_1 = \frac{B_{11} \left( \frac{B_{22}L_1 + B_{12}}{B_{21}L_1 + B_{11}} \right) + B_{12}}{B_{21} \left( \frac{B_{22}L_1 + B_{12}}{B_{21}L_1 + B_{11}} \right) + B_{22}}$$

и после преобразования

$$L_1 = \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}}. \quad (5.14)$$

Подставляя из (5.12) в (5.13), получаем:

$$L_2 = \frac{B_{22} \left( \frac{B_{11}L_2 + B_{12}}{B_{21}L_2 + B_{22}} \right) + B_{12}}{B_{21} \left( \frac{B_{11}L_2 + B_{12}}{B_{21}L_2 + B_{22}} \right) + B_{11}}$$

и после преобразования

$$L_2 = \sqrt{B_{12}B_{22}/(B_{11}B_{21})}. \quad (5.15)$$

Четырехполюсник, в котором сопротивление нагрузки  $S'_2$  равно выходному характеристическому сопротивлению  $L_2$ , называется согласованным на выходе.

**Пример 1.** Используем данные примера 2 главы 3 и  $B_{11} = 0,9$ ;  $B_{12} = -j147,5$ ;  $B_{21} = j0,01$ ;  $B_{22} = 2,75$ . Найдем  $L_1$  и  $L_2$ , используя значения  $Q_1(t)$ ;  $Q_2(t)$ ;  $v_1(t)$ ;  $v_2(t)$ .

Из этого примера можно определить, что входное и выходное сопротивления:  $S'_{01} = Q_1/v_1 = 20/j0,3 = -j66,6$  кгс с/м;  $S'_{02} = Q_2/v_2 = 10/j0,075 = -j133,3$  кгс с/м.

В режиме мгновенной остановки входное сопротивление (5.3)  $S'_{01(м. о)} = B_{12}/B_{22} = -j147,5/2,75 = -j53,6$  кгс с/м. В режиме холостого хода входное сопротивление (5.4)  $S'_{01(х. х)} = B_{11}/B_{21} = 0,9/(j0,01) = -j90$  кгс с/м. Сопротивление, согласованное на входе,

$$L_1 = \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}} = \sqrt{\frac{0,9(-j147,5)}{j0,01 \cdot 2,75}} = \sqrt{-j90(-j53,6)} =$$

$$= \sqrt{-4824},$$

$$L_1 = j69,46 \text{ кгс с/м.}$$

Введем второе понятие вторичных параметров — коэффициент передачи механического четырехполюсника. Пусть имеется четырехполюсник с согласованной нагрузкой, у которого

$$L_2 = S_{02} = Q_2/v_2 = \sqrt{B_{12}B_{22}/(B_{11}B_{21})} \quad (5.16)$$

Напишем уравнение в системе  $B$ -параметров, используя (5.16):

$$\begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = B_{11}Q_2 + \frac{B_{12}Q_2}{\sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}}} = \\ &= Q_2 \left( B_{11} + \sqrt{\frac{B_{12}^2 B_{11} B_{21}}{B_{12} B_{22}}} \right), \\ Q_1 &= Q_2 \left( B_{11} + \sqrt{\frac{B_{11} B_{12} B_{21}}{B_{22}}} \right); \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = B_{21}v_2 \sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}} + B_{22}v_2 = \\ &= v_2 \left( B_{22} + \sqrt{\frac{B_{12}B_{21}^2 B_{22}}{B_{11}B_{21}}} \right); \\ v_1 &= v_2 \left( B_{22} + \sqrt{\frac{B_{12}B_{21}B_{22}}{B_{11}}} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Введем выражение  $\mu^2 = L_1/L_2$  или  $\mu = \sqrt{L_1/L_2}$ , которое назовем коэффициентом передачи. Используя значения  $L_1$  и  $L_2$  из (5.14) и (5.15), имеем:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}}} = \sqrt{\frac{B_{11}^2 B_{12} B_{21}}{B_{22}^2 B_{12} B_{21}}} = \sqrt{\frac{B_{11}^2}{B_{22}^2}} = \frac{B_{11}}{B_{22}}; \\ \mu &= \sqrt{B_{11}/B_{22}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для симметричного четырехполюсника, когда  $B_{11} = B_{22}$ ,  $\mu = 1$ .

Произведем преобразования выражений (5.17), (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{Q_2} &= B_{11} + \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{22}}} \cdot \sqrt{B_{12}B_{21}} = B_{11} + \mu \sqrt{B_{12}B_{21}} = \\ &= \mu \left( \frac{B_{11}}{\mu} + \sqrt{B_{12}B_{21}} \right); \\ \frac{1}{\mu} \frac{Q_1}{Q_2} &= B_{11} \frac{\sqrt{B_{22}}}{\sqrt{B_{11}}} + \sqrt{B_{12}B_{21}} = \sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Произведем преобразование выражений (5.18), (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v_2} &= B_{22} + \sqrt{\frac{B_{22}}{B_{11}}} \sqrt{B_{12}B_{21}} = B_{22} + \frac{1}{\mu} \sqrt{B_{12}B_{21}} = \\ &= \frac{1}{\mu} (B_{22}\mu + \sqrt{B_{12}B_{21}}); \\ \mu \frac{v_1}{v_2} &= \left( B_{22} \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{22}}} + \sqrt{B_{12}B_{21}} \right) = \sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}}; \end{aligned} \quad (5.21)$$

так как правые части выражений (5.20) и (5.21) равны, то

$$(1/\mu) (Q_1/Q_2) = \mu v_1/v_2 \text{ или } Q_1/Q_2 = \mu^2 v_1/v_2,$$

$$Q_1/v_1 = \mu^2 Q_2/v_2.$$

Отношение сил на входе и выходе согласованного МЧП, уменьшенное в  $\mu$  раз, равно подобному отношению скоростей, увеличенному во столько же раз.

Введем третье понятие вторичных параметров — коэффициент распространения механического четырехполюсника, обозначаемое буквой  $\gamma$ :

$$1/\mu Q_1/Q_2 = \mu v_1/v_2 = \sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}} = e^\gamma; \quad (5.22)$$

$$\ln Q_1/\mu Q_2 = \ln \mu v_1/v_2 = \ln e^\gamma = \gamma.$$

Если в рассматриваемом механическом четырехполюснике  $\gamma = 0$ , то  $e^\gamma = 1$  и

$$Q_1/Q_2 = \mu; \quad v_1/v_2 = 1/\mu. \quad (5.23)$$

Следовательно,  $\mu$  представляет собой коэффициент передачи сил или обратных им скоростей четырехполюсника, у которого коэффициент распространения  $\gamma = 0$ . С точки зрения физической осуществимости выражения (5.23) представляют собой рычажный механизм или зубчатый редуктор без потерь.

Определим более простые зависимости для коэффициента  $\gamma$ . Пусть дан несогласованный четырехполюсник, у которого  $L_2 \neq \neq S_0''$ . Из (5.22) напишем, что

$$e^\gamma = \sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}};$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}}}. \quad (5.24)$$

Умножим и разделим выражение (5.24) на  $(\sqrt{B_{11}B_{22}} - \sqrt{B_{12}B_{21}})$ ; помня, что  $(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}) = 1$  и  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ , имеем  $(\sqrt{B_{11}B_{22}})^2 - (\sqrt{B_{12}B_{21}})^2 = 1$ , то

$$e^{-\gamma} = \frac{(\sqrt{B_{11}B_{22}} - \sqrt{B_{12}B_{21}})}{(\sqrt{B_{11}B_{22}})^2 - (\sqrt{B_{12}B_{21}})^2} = \sqrt{B_{11}B_{22}} - \sqrt{B_{12}B_{21}}. \quad (5.25)$$

Складывая и вычитая выражения (5.22) и (5.25), получим:

$$e^\gamma + e^{-\gamma} = (\sqrt{B_{11}B_{22}} + \sqrt{B_{12}B_{21}}) + (\sqrt{B_{11}B_{22}} - \sqrt{B_{12}B_{21}}) = \\ = 2\sqrt{B_{11}B_{22}};$$

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} = \sqrt{B_{11}B_{22}}; \quad (5.26)$$

$$e^\gamma - e^{-\gamma} = 2\sqrt{B_{12}B_{21}};$$

$$\operatorname{sh} \gamma = \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} = \sqrt{B_{12}B_{21}}. \quad (5.27)$$



**Определение уравнений в системе  $B$ -параметров в зависимости от вторичных параметров  $L, \mu, \gamma$  для несимметричного механического четырехполюсника.** Будем последовательно определять коэффициенты матрицы  $\|B\|$ . *Определение  $B_{11}$ .* Перемножим выражения (5.26) и (5.19):

$$\begin{aligned} \mu \operatorname{ch} \gamma &= \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{22}}} \sqrt{B_{11}B_{22}} = \sqrt{\frac{B_{11}^2 B_{22}}{B_{22}}} = B_{11}, \\ B_{11} &= \mu \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned} \quad (5.28)$$

*Определение  $B_{12}$ .* Перемножим выражения (5.14) и (5.15).

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}} \sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}} = \sqrt{\frac{B_{12}^2}{B_{21}^2}} = \frac{B_{12}}{B_{21}}; \\ \sqrt{L_1 L_2} &= \sqrt{\frac{B_{12}}{B_{21}}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Перемножим теперь выражения (5.27) и (5.29):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{L_1 L_2} &= \sqrt{B_{12}B_{21}} \sqrt{\frac{B_{12}}{B_{21}}} = \sqrt{\frac{B_{12}^2 B_{21}}{B_{21}}} = B_{12}; \\ B_{12} &= \operatorname{sh} \gamma \sqrt{L_1 L_2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

*Определение  $B_{21}$ .* Разделим выражение (5.27) на (5.29):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \gamma}{\sqrt{L_1 L_2}} &= \sqrt{B_{12}B_{21}} : \sqrt{\frac{B_{12}}{B_{21}}} = \sqrt{\frac{B_{12}B_{21}^2}{B_{12}}} = B_{21}, \\ B_{21} &= \frac{\operatorname{sh} \gamma}{\sqrt{L_1 L_2}}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

*Определение  $B_{22}$ .* Разделим выражение (5.26) на (5.19):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} \gamma}{\mu} &= \sqrt{B_{11}B_{22}} : \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{22}}} = \sqrt{\frac{B_{11}B_{22}^2}{B_{11}}} = B_{22}; \\ B_{22} &= \frac{\operatorname{ch} \gamma}{\mu}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Уравнения в системе  $B$ -параметров будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= B_{11}Q_2 + B_{12}v_2 = \mu \operatorname{ch} \gamma Q_2 + \operatorname{sh} \gamma \sqrt{L_1 L_2} v_2; \\ v_1 &= B_{21}Q_2 + B_{22}v_2 = \frac{\operatorname{sh} \gamma}{\sqrt{L_1 L_2}} Q_2 + \frac{\operatorname{ch} \gamma}{\mu} v_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Преобразовывая коэффициенты  $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$  по табл. 3.3, можно получить уравнение для другой системы параметров четырехполюсников.

**Определение уравнений в системе  $B$ -параметров в зависимости от вторичных параметров  $L, \mu, \gamma$  для симметричного механиче-**

ского четырехполюсника. При этом  $B_{11} = B_{22}$ ,  $L_1 = L_2 = L$ ;  $\mu = 1$  В таком случае из (5.28) и (5.32) имеем

$$B_{11} = B_{22} = \operatorname{ch} \gamma. \quad (5.34)$$

Из (5.30)  $B_{12} = L \operatorname{sh} \gamma$ , из (5.31)  $B_{21} = \frac{\operatorname{sh} \gamma}{L}$ .

Поэтому уравнения (5.33) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \operatorname{ch} \gamma Q_2 + L \operatorname{sh} \gamma v_2; \\ v_1 &= \frac{\operatorname{sh} \gamma}{L} Q_2 + \operatorname{ch} \gamma v_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Определим из зависимости (5.35) общее выражение для входного сопротивления  $S_{01}$  симметричного механического четырехполюсника, имеющего на выходе произвольное сопротивление  $S_{02} = Q_2/v_2$ . Разделим первое уравнение на второе

$$S_{01} = \frac{Q_1}{v_1} = \frac{\operatorname{ch} \gamma Q_2 + L \operatorname{sh} \gamma v_2}{\frac{\operatorname{sh} \gamma}{L} Q_2 + \operatorname{ch} \gamma v_2}. \quad (5.36)$$

Разделим в этом выражении числитель и знаменатель на  $v_2 \operatorname{ch} \gamma$ , помня о значении  $S_{02} = Q_2/v_2$ .

$$\begin{aligned} S_{01} &= \frac{S_{02} + L \operatorname{th} \gamma}{\frac{S_{02} \operatorname{th} \gamma}{L} + 1} = \frac{L(S_{02} + L \operatorname{th} \gamma)}{S_{02} \operatorname{th} \gamma + L}; \\ S_{01} &= \frac{L(S_{02} + L \operatorname{th} \gamma)}{S_{02} \operatorname{th} \gamma + L}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Произведем анализ последнего уравнения: если  $S_{02} = 0$ , то

$$S_{01 (м. о)} = \frac{L(0 + L \operatorname{th} \gamma)}{0 \operatorname{th} \gamma + L} = L \operatorname{th} \gamma; \quad (5.38)$$

если  $S_{02} = \infty$ , то

$$\begin{aligned} S_{01 (х. х)} &= \frac{L \left( 1 + \frac{L}{S_{02}} \operatorname{th} \gamma \right)}{\operatorname{th} \gamma + \frac{L}{S_{02}}}; \\ S_{01 (х. х)} &= \frac{L \left( 1 + \frac{L}{\infty} \operatorname{th} \gamma \right)}{\operatorname{th} \gamma + \frac{L}{\infty}} = \frac{L(1+0)}{\operatorname{th} \gamma + 0} = L \operatorname{cth} \gamma. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Из (5.38) имеем

$$\gamma = \operatorname{Arth} S_{01 (м. о)}/L. \quad (5.40)$$

Из (5.39) имеем  $\gamma = \operatorname{Arcth} S_{01 (х. х)}/L$ .

Исходя из (5.38) и (5.39), можно выражение (5.37) представить:

$$S_{01} = \frac{L(S_{02} + L \operatorname{th} \gamma)}{S_{02} \operatorname{th} \gamma + L} = \frac{S_{02} + S_{01(\text{м.о})}}{\frac{S_{02}}{L \operatorname{cth} \gamma} + 1} = \frac{S_{02} + S_{01(\text{м.о})}}{\frac{S_{02}}{S_{01(\text{х.х})}} + 1};$$

$$S_{01} = \frac{S_{02} + S_{01(\text{м.о})}}{1 + \frac{S_{02}}{S_{01(\text{х.х})}}}.$$

Если перемножить (5.38) на (5.39), то имеем:

$$S_{01(\text{м.о})} S_{01(\text{х.х})} = L \operatorname{th} \gamma L \operatorname{cth} \gamma = L^2;$$

$$L = \sqrt{S_{01(\text{м.о})} S_{01(\text{х.х})}}. \quad (5.41)$$

Из выражения (5.40) и (5.41):

$$\gamma = \operatorname{Arth} \frac{S_{01(\text{м.о})}}{L} = \operatorname{Arth} \frac{S_{01(\text{м.о})}}{\sqrt{S_{01(\text{м.о})} S_{01(\text{х.х})}}} =$$

$$= \operatorname{Arth} \frac{S_{01(\text{м.о})} \sqrt{S_{01(\text{м.о})}}}{(\sqrt{S_{01(\text{м.о})}})^2 \sqrt{S_{01(\text{х.х})}}};$$

$$\gamma = \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{S_{01(\text{м.о})}}{S_{01(\text{х.х})}}}.$$

### 5.3. ЗАТУХАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Во всех значениях для  $\gamma$  нужно отделить вещественную часть от мнимой.

Из (5.22)  $e^\gamma = \sqrt{B_{11} B_{22}} + \sqrt{B_{12} B_{21}}$ , а  $\gamma = \ln(\sqrt{B_{11} B_{22}} + \sqrt{B_{12} B_{21}})$ . Для симметричного механического четырехполюсника, когда  $B_{11} = B_{22}$ ,

$$\gamma = \ln(B_{11} + \sqrt{B_{12} B_{21}}). \quad (5.42)$$

Так как  $B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} = 1$ , то  $B_{12} B_{21} = B_{11}^2 - 1$ ; подставляя эту зависимость в (5.42), имеем  $\gamma = \ln(B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 1})$ . Из таблиц функций имеем:  $\operatorname{Arch} u = \ln(u \pm \sqrt{u^2 - 1})$ , получим  $\gamma = \ln(B_{11} + \sqrt{B_{11}^2 - 1}) = \operatorname{Arch} B_{11}$  или из (5.27)  $\gamma = \operatorname{Arsh} \sqrt{B_{12} B_{21}}$ .

В общем виде коэффициент  $\gamma$  представляет собой комплексную величину

$$\gamma = a_1 + ja_2. \quad (5.43)$$

В согласованном четырехполюснике, когда  $B_{11} = B_{12}$  и  $\mu = 1$ , из (5.22) имеем:  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2 = e^\gamma$ ;

$$\gamma = \ln Q_1/Q_2 = \ln v_1/v_2.$$

Отношение комплексных амплитуд  $Q_1/Q_2$  можно представить в показательной форме

$$Q_1/Q_2 = Q_1/Q_2 e^{j\zeta}, \quad (5.44)$$

где  $\zeta$  — угол сдвига фаз между силами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Выражение (5.44) можно изобразить

$$\begin{aligned} \Gamma &= \ln \frac{Q_1}{Q_2} = \ln \left( \frac{Q_1}{Q_2} e^{j\zeta} \right) = \\ &= \ln \frac{Q_1}{Q_2} + j\zeta = a_1 + j\zeta. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Коэффициент  $a_1$  называется собственным затуханием четырехполюсника и характеризует степень изменения амплитуд сил или скоростей при переходе от входа к выходу; коэффициент  $\zeta$  называется фазовой постоянной и равен углу сдвига фаз между силами на входе и на выходе (то же для скоростей) согласованного четырехполюсника.

Величину  $a_1$  можно изобразить, как

$$\ln \frac{Q_1}{Q_2} = a_1 \quad \text{или}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{a_1}.$$

Затухание  $a_1$  можно рассматривать и как показатель степени, в которую нужно возвести основание натурального логарифма  $e$ , чтобы получить отношение  $Q_1 : Q_2$  (или  $v_1 : v_2$ ). Это число содержит  $a_1$  единиц, называемых неперами. Затухание  $a_1 = 1$  Нп

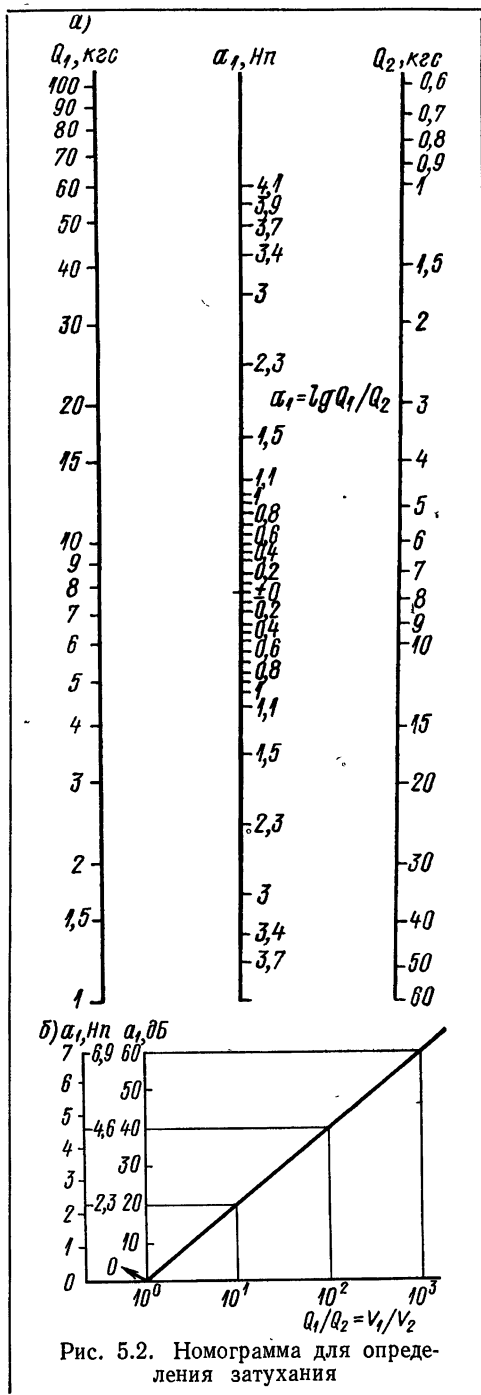


Рис. 5.2. Номограмма для определения затухания

соответствует  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2 = e^1 = 2,78$ ; если  $a_1 = 0$ , то  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2 = e^0 = 1$ . Зависимость между  $a_1 = \ln Q_1/Q_2 = \ln v_1/v_2$  или затуханием в неперах и  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2$  изображена на рис. 5.2, а.

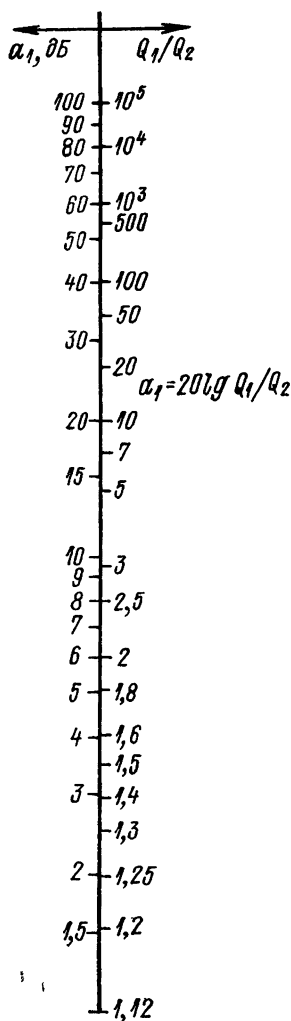


Рис. 5.3. Номограмма для определения затухания

Затуханию в 2,3 Нп соответствует соотношение сил  $Q_1/Q_2 = 10$ ; затуханию в 4,6 Нп соответствует соотношение сил, равное 100; и, наконец, затуханию в 6,9 Нп соответствует соотношение сил, равное 1000 (рис. 5.2, б).

Зачастую вместо соотношения в натуральных логарифмах  $\ln Q_1/Q_2$  берут соотношение в десятичных логарифмах  $\lg Q_1/Q_2$ ; в таком случае  $a_1 = 2 \lg Q_1/Q_2 = 2 \lg v_1/v_2$  обозначается другой единицей, называемой белом.  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2 = 10^{a_1/2}$ , но единица бел весьма крупна и ею пользоваться неудобно, поэтому обычно пользуются единицей более мелкой, равной 0,1 Б и называемой децибелом:  $a_1 = 20 \lg Q_1/Q_2 = 20 \lg v_1/v_2$ ;  $Q_1/Q_2 = v_1/v_2 = 10^{\frac{a_1}{20}}$

На рис. 5.3 показано, что затуханию в 20 дБ соответствует соотношение сил, равное 10, затуханию в 40 дБ соответствует соотношение сил, равное 100, затуханию в 60 дБ соответствует соотношение сил, равное 1000.

Неперы и децибелы связаны между собой следующими зависимостями:  $a_1 = \ln Q_1/Q_2$  Нп =  $20 \lg Q_1/Q_2$  дБ. Если  $Q_1/Q_2 = 10$ , то  $\ln 10 = 20 \lg 10$  или  $2,3$  Нп = 20 дБ,  $1$  дБ =  $2,3/20 = 0,115$  Нп;  $1$  Нп =  $20/2,3 = 8,686$  дБ.

Если любое число децибелов увеличивается или уменьшается на величину, кратную 20, то соответствующее отношение сил или скоростей увеличивается или уменьшается в  $10^n$  раз, где  $n$  — число раз увеличения или уменьшения децибелов. Приближенные соотношения: 1,5 соответствует 3,5 дБ; 2 соответствует 6 дБ; 2,5 соответствует 8 дБ, 3 соответствует 9,5 дБ; 10 соответствует 20 дБ. Следовательно,  $34$  дБ =  $(20 + 8 + 6)$  дБ =  $10 \times 2,5 \times 2 = 50$  (точная величина 50,12).

Ориентировочно 1 дБ соответствует около 11,5% увеличения или уменьшения скорости или силы.

## 5.4. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ И РАСЧЕТЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Необходимость защиты конструкции от возможных колебаний в диапазоне нежелательных частот или снижения амплитуд заставляет изучать природу этих колебаний, создавать устройства, демпфирующие колебания в области определенных частот или заметно снижающие их характеристики.

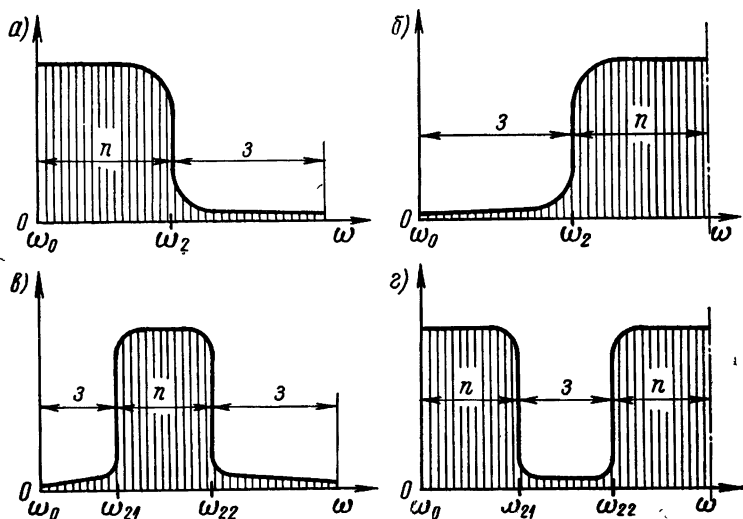


Рис. 5.4. Графики идеальных фильтров: *а* — фильтр нижних частот; *б* — фильтр верхних частот; *в* — полосовой фильтр; *г* — заграждающий фильтр

*п* — полоса пропускания; *з* — полоса затухания

В общем виде фильтром называют последовательность из нескольких одинаковых четырехполюсников, соединенных между собой таким образом, что выход предыдущего четырехполюсника является входом последующего четырехполюсника. В частности, механическим фильтром<sup>1</sup> будем называть устройство, способное отделять друг от друга механические колебания разных частот. Фильтр представляет собой пассивный четырехполюсник, пропускающий некоторую определенную полосу частот с малым затуханием; те полосы частот, которые не пропускаются фильтром, имеют большее затухание.

В дальнейшем будем пользоваться терминами **п о л о с а п р о - п у с к а н и я** — это полоса частот, в зоне которой затухание

<sup>1</sup> Классической моделью механического фильтра является струна, нагруженная равноотстоящими массами в виде бус; подобную модель исследовал Лагранж еще в XVIII столетии в работе «Аналитическая механика».

амплитуд колебаний небольшое; полоса затухания — это полоса частот, в зоне которой затухание амплитуд колебаний большое.

Значение частот, соответствующих границам полос пропускания и полос затухания, носит название граничных частот фильтра.

В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры бывают (рис. 5.4) для низких и высоких частот, полосовые (одна полоса пропускания), заграждающие (две полосы пропускания и одна полоса затухания).

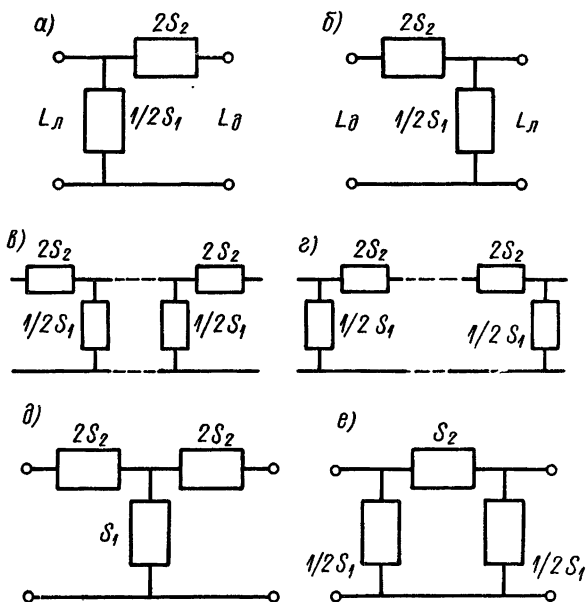


Рис. 5.5. Согласование фильтров

Наименьшее число элементов, из которых может быть образован механический фильтр, соответствует двум; это может быть прямое или обратное Г-образное звено; кроме того, фильтр может состоять из трех элементов и в простейшем виде образующих Т- и П-образные звенья (рис. 5.5).

Характеристические сопротивления для двухэлементных Г-образных механических четырехполюсников (рис. 5.5, а, б) со стороны последовательного и параллельного элементов цепи. Пусть  $L_n$  — характеристическое сопротивление со стороны элемента, находящегося в последовательном соединении и  $L_d$  — характеристическое сопротивление элемента, находящегося в параллельном соединении цепи. В таком случае для прямого Г-образного четырехполюсника, помня, что  $B_{11} = (S_1 + S_2)/S_2$ ;  $B_{12} = S_1$ ;  $B_{21} = 1/S_2$ ;  $B_{22} = 1$ :

1) на основании (5.14) имеем, помня, что  $L'_n = \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}}$ ;

$$L'_n = \sqrt{\frac{\left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) S_1}{\frac{1}{S_2}}} = \sqrt{S_1(S_1 + S_2)}.$$

Подставляя значения  $S_1 \equiv \left(\frac{1}{2} S_1\right)$  и  $S_2 \equiv (2S_2)$  по рис. 5.5, а, имеем:

$$\begin{aligned} L'_n &= \sqrt{\frac{S_1}{2} \left(\frac{S_1}{2} + 2S_2\right)} = \sqrt{\frac{S_1^2}{4} \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)} = \\ &= \pm \frac{S_1}{2} \sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}; \end{aligned}$$

2) на основании (5.15) имеем, помня значения коэффициентов:

$$L'_d = \sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}} = \sqrt{\frac{S_1}{\left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) \frac{1}{S_2}}} = \sqrt{\frac{S_1 S_2^2}{S_1 + S_2}}.$$

Подставляя значения для  $S_1$  и  $S_2$  по рис. 5.5, а, имеем:

$$\begin{aligned} L'_d &= \sqrt{\frac{S_1 S_2^2}{S_1 + S_2}} = \sqrt{\frac{\frac{S_1}{2} (2S_2)^2}{\frac{S_1}{2} + 2S_2}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{2} S_1 S_2^2}{\frac{S_1 + 4S_2}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{4S_1 S_2^2}{S_1 + 4S_2}}; \end{aligned}$$

$$L'_d = \sqrt{\frac{4S_1 S_2^2}{S_1 \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)}} = \sqrt{\frac{4S_2^2}{1 + \frac{4S_2}{S_1}}};$$

$$L'_d = \pm \frac{2S_2}{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}.$$

При расчете механических фильтров, когда соединяются два Г-образных четырехполюсника, целесообразно обозначать коэффициент распространения через  $\gamma/2$ , чтобы при согласованном последовательном соединении получился бы Т- или П-образный четырехполюсник с коэффициентом распространения  $\gamma$  (рис. 5.5, в, з). Из (5.26) имеем, подставляя вместо  $S_1 \equiv 1/2 S_1$  [и  $S_2 \equiv (2S_2)$ ]

$$\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{B_{11}B_{22}}{B_{12}B_{21}}} = \sqrt{\left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) 1} = \sqrt{\frac{\frac{S_1}{2} + 2S_2}{2S_2}};$$

$$\operatorname{ch} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{S_1 + 4S_2}{4S_2}} = \sqrt{1 + \frac{S_1}{4S_2}}.$$



Из (5.27) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{r}{2} &= \sqrt{B_{12}B_{21}} = \sqrt{S_1 \frac{1}{S_2}} = \sqrt{\frac{S_1}{2} \frac{1}{2S_2}}; \\ \operatorname{sh} \frac{r}{2} &= \sqrt{\frac{S_1}{4S_2}}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Произведем определение характеристических сопротивлений для обратного Г-образного четырехполюсника на основании (5.15), помня, что  $L''_д = L'_л$  и что  $B_{11} = 1$ ;  $B_{12} = S_1$ ,  $B_{21} = 1/S_2$ ;  $B_{22} = (S_1 + S_2)/S_2$ ;

$$L''_д = \sqrt{\frac{B_{11}B_{12}}{B_{21}B_{22}}} = \sqrt{\frac{1 \cdot S_1}{\frac{1}{S_2} \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right)}} = \sqrt{\frac{S_1 S_2^2}{S_1 + S_2}}.$$

Подставляя значения для  $S_1 \equiv \left( \frac{1}{2} S_1 \right)$  и  $S_2 \equiv (2S_2)$

$$L''_д = \sqrt{\frac{\frac{S_1}{2} (2S_2)^2}{\frac{S_1}{2} + 2S_2}} = \sqrt{\frac{2S_1 S_2^2}{\frac{S_1 + 4S_2}{2}}} = \sqrt{\frac{4S_1 S_2^2}{S_1 \left( 1 + \frac{4S_2}{S_1} \right)}};$$

$$L''_д = \sqrt{\frac{4S_2^2}{1 + \frac{4S_2}{S_1}}} = \pm \frac{2S_2}{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}.$$

Помня, что  $L''_л = L'_д$ , имеем:

$$L''_л = \sqrt{\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{21}}} = \sqrt{\frac{S_1 \left( \frac{S_1 + S_2}{S_2} \right)}{1 \cdot \frac{1}{S_2}}} = \sqrt{S_1 (S_1 + S_2)}.$$

Подставляя значения для  $S_1$  и  $S_2$ , имеем:

$$\begin{aligned} L''_л &= \sqrt{\frac{S_1}{2} \left( \frac{S_1}{2} + 2S_2 \right)} = \sqrt{\frac{S_1^2}{4} \left( 1 + \frac{4S_2}{S_1} \right)} = \\ &= \pm \frac{S_1}{2} \sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего использования запишем значение матрицы для прямого и обратного Г-образного четырехполюсника при выбранных значениях  $S_1 \equiv (1/2 S_1)$  и  $S_2 \equiv (2S_2)$ , удобных для получения симметричных Т- и П-образных четырехполюсников. Для прямого Г-образного МЧП

$$\|B\| = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left( 1 + \frac{S_1}{4S_2} \right) & \frac{S_1}{2} \\ \frac{1}{2S_2} & 1 \end{vmatrix}$$

Для обратного Г-образного МЧП

$$\|B\| = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{S_1}{2} \\ \frac{1}{2S_2} & \left(1 + \frac{S_1}{4S_2}\right) \end{vmatrix}$$

**Характеристическое сопротивление для трехэлементных четырехполюсников. Т-образный МЧП.** Воспользуемся ранее выведенными соотношениями (5.14) и (3.77)  $L_1 = \sqrt{B_{11}B_{12}/(B_{21}B_{22})}$ ;

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\frac{\frac{(S_1 + S_3)}{S_3} S_1}{\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_2 S_3}\right) \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{S_1 S_2^2 (S_1 + S_3)}{(S_1 + S_2) (S_1 + S_2 + S_3)}}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Подставляя выбранные значения по рис. 5.5,  $\partial S_1 \equiv S_1$ ;  $S_2 \equiv 2S_2$ ;  $S_3 \equiv 2S_2$ , получаем

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\frac{S_1 (2S_2)^2 [S_1 + 2S_2]}{(S_1 + 2S_2) (S_1 + 2S_2 + 2S_2)}} = \sqrt{\frac{4S_1 S_2^2}{S_1 + 4S_2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(2S_2)^2 S_1}{S_1 \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)}}; \\ L_1 &= \pm \frac{2S_2}{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Для дальнейшего использования, согласно выбранных по рис. 5.5,  $\partial$  значений  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , напишем матрицу симметричного Т-образного МЧП:

$$\|B\| = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{S_1 + 2S_2}{2S_2}\right) & S_1 \\ \left(\frac{S_1 + 4S_2}{4S_2^2}\right) & \left(\frac{S_1 + 2S_2}{2S_2}\right) \end{vmatrix} \quad (5.49)$$

**П-образный МЧП.** Воспользуемся ранее выведенными соотношениями (5.14) и (3.80)  $L_1 = \sqrt{B_{11}B_{12}/B_{21}B_{22}}$ ;

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\frac{\left(\frac{S_1 + S_2}{S_2}\right) \left(\frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2}\right)}{\left(\frac{1}{S_2}\right) \left(\frac{S_2 + S_3}{S_2}\right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{(S_1 + S_2) (S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)}{(S_2 + S_3)}}. \end{aligned}$$

Подставляя выбранные значения по рис. 5.5,  $e S_1 = S_3 \equiv \frac{S_1}{2}$ ;  $S_2 \equiv S_2$ ,

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \sqrt{\frac{\left(\frac{S_1}{2} + S_2\right) \left[\frac{S_1 S_2}{2} + \left(\frac{S_1}{2}\right)^2 + \frac{S_1 S_2}{2}\right]}{S_2 + \frac{S_1}{2}}} = \\
 &= \sqrt{S_1 S_2 + \frac{S_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{4S_1 S_2 + S_1^2}{4}}; \\
 L_1 &= \sqrt{\frac{S_1^2}{4} \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)} = \pm \frac{S_1}{2} \sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}. \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего использования согласно выбранным по рис. 5.5,  $e$  значениям  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  напомним матрицу симметричного П-образного МЧП:

$$\|B\| = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{S_1}{2S_2}\right) & \left[\left(1 + \frac{S_1}{4S_2}\right) S_1\right] \\ \frac{1}{S_2} & \left(1 + \frac{S_1}{2S_2}\right) \end{vmatrix} \quad (5.51)$$

Условие существования полосы пропускания механического фильтра рассматривается в предположении, что фильтр работает на согласованную нагрузку.

Из (5.23) при  $\mu = 1$  имеем

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_1}{v_2} = e^\gamma \quad \text{или} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{v_2}{v_1} = e^{-\gamma}.$$

При наличии  $n$  звеньев

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= Q_1 e^{-\gamma}; \quad Q_3 = Q_2 e^{-\gamma} \dots \dots \dots Q_n = Q_{n-1} e^{-\gamma} \\
 \text{или } Q_3 &= Q_2 e^{-\gamma} = Q_1 e^{-\gamma} \cdot e^{-\gamma} = Q_1 e^{-2\gamma}; \\
 Q_n &= Q_1 e^{-(n-1)\gamma} \quad \text{или} \quad Q_1 = Q_n e^{(n-1)\gamma}. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Такая же зависимость существует для скоростей  $v_1 = v_n e^{(n-1)\gamma}$ . Если Г-образный или симметричный Т- или П-образный четырехполюсник состоит из одних масс и упругостей, то  $S_1 = \pm j\sigma_1$ ;  $S_2 = \pm j\sigma_2$ . При этом  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — абсолютные значения сопротивлений будут для массы положительные  $+\omega m$ , а для упругости отрицательные  $-k/\omega$ .

Для того чтобы четырехполюсник мог выполнять функции фильтра и имел бы полосу пропускания, необходимо, чтобы элементы его были разными: знаки у  $S_1$  и  $S_2$  должны быть разными. Действительно, согласно (5.43), (5.45)  $\gamma = a_1 + ja_2$ ;  $a_1 = \ln Q_1/Q_2$ ;  $a_2 = \zeta$ . В таком случае  $\text{sh } \gamma/2 = \text{sh} (a_1/2 + ja_2/2)$ . Из теории гиперболических функций известно, что  $\text{sh} (x + y) = \text{sh } x \times$

$\times \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$ , поэтому  $\operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} jy + \operatorname{ch} x \times \operatorname{sh} jy$ . Помня, что  $\operatorname{sh} jy = j \sin y$  и  $\operatorname{ch} jy = \cos y$ , получаем

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \operatorname{sh} \left( \frac{a_1}{2} + j \frac{a_2}{2} \right) = \operatorname{sh} \frac{a_1}{2} \cos \frac{a_2}{2} + j \operatorname{ch} \frac{a_1}{2} \sin \frac{a_2}{2}.$$

Принимая во внимание (5.46), что  $\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{S_1/4S_2}$ ,

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = \operatorname{sh} \frac{a_1}{2} \cos \frac{a_2}{2} + j \operatorname{ch} \frac{a_1}{2} \sin \frac{a_2}{2} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{4\sigma_2}}.$$

Допустим

$$\operatorname{sh} \frac{a_1}{2} \cos \frac{a_2}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_1}{4\sigma_2}}, \quad (5.53)$$

тогда

$$\operatorname{ch} \frac{a_1}{2} \sin \frac{a_2}{2} = 0. \quad (5.54)$$

Гиперболический косинус от действительного аргумента всегда больше нуля ( $\operatorname{ch} a_1/2 \geq 1$ ), то на основании (5.54)  $\sin a_2/2 = 0$ , и в таком случае  $\cos a_2/2 = \pm 1$ , и уравнение (5.53) примет вид:  $\operatorname{sh} a_1/2 = \sqrt{\sigma_1/4\sigma_2}$ . Здесь  $a_1 > 0$  и четырехполюсник не имеет полосы пропускания и не является фильтром. Для того чтобы четырехполюсник становился фильтром, необходимо, чтобы  $S_1$  и  $S_2$  имели бы разные знаки:  $S_1 = \pm j\sigma_1$ ;  $S_2 = \mp j\sigma_2$ . В таком случае выражения (5.53) и (5.54) должны иметь обратные значения, а именно:

$$\operatorname{sh} \frac{a_1}{2} \cos \frac{a_2}{2} = 0. \quad (5.55)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a_1}{2} \sin \frac{a_2}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_1}{4\sigma_2}}. \quad (5.56)$$

Исходя из этих выражений,

$$\operatorname{sh} \frac{\Gamma}{2} = j \left( \operatorname{ch} \frac{a_1}{2} \sin \frac{a_2}{2} \right) = \pm j \sqrt{\frac{\sigma_1}{4\sigma_2}}.$$

Зависимость (5.55) может иметь два решения, когда  $\operatorname{sh} a_1/2 = 0$  или  $\cos a_2/2 = 0$ ; в первом случае согласно графику функций (рис. 5.6) при  $a_1 = 0$   $\operatorname{ch} a_1/2 = 1$  и поэтому из (5.56)  $\sin a_2/2 = \pm \sqrt{\sigma_1/4\sigma_2}$ .

Это очень важный вывод; по такой зависимости изменяется величина  $a_2$  — коэффициент фазы четырехполюсника в полосе пропускания. Во втором случае выражение (5.55)  $\cos a_2/2 = 0$  соответствует полосе затухания. При этом  $a_2 = \pm \pi$ , в выражении (5.56)  $\sin a_2/2 = \pm 1$  и  $\operatorname{ch} a_1/2 = \sqrt{\sigma_1/4\sigma_2}$ . По такой зависимости происходит затухание фильтра в полосе затухания.

Итак, необходимыми и достаточными условиями существования полосы пропускания являются два положения: 1) сопротивления  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должны иметь разные знаки; 2) по абсолютной величине  $\sigma_1$  должна быть меньше  $4\sigma_2$ , то есть  $\sigma_1 < 4\sigma_2$ .

**Определение ширины пропускания механического фильтра.**  
 Ранее найдено, что сопротивление мгновенной остановки (5.38)  $S_{м.о} = L \operatorname{th} \gamma$  и сопротивление холостого хода (5.39)  $S_{x.x} = = L \operatorname{cth} \gamma$ .

Для симметричного Т-образного четырехполюсника сопротивление (5.48)  $L_1 = \pm (2S_2)/\sqrt{1 + 4S_2/S_1}$ . Для симметричного

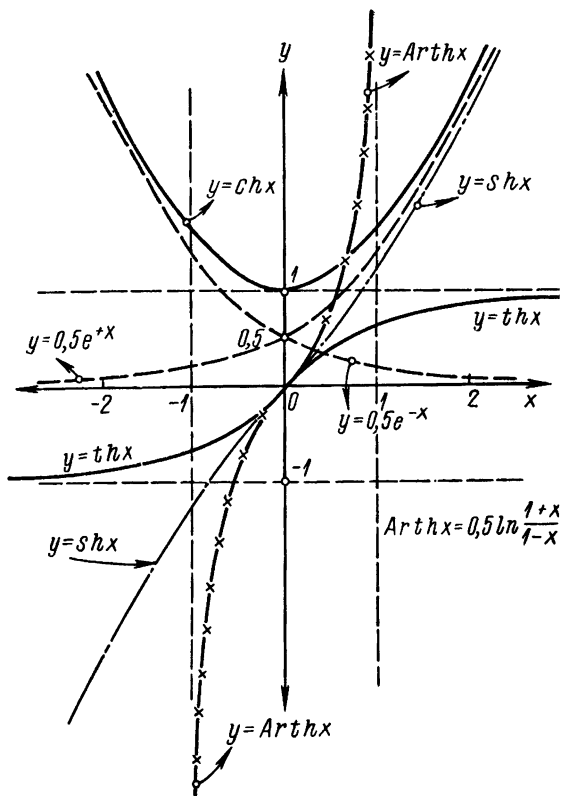


Рис. 5.6. Экспоненциальные и гиперболические функции

П-образного четырехполюсника (5.50) сопротивление  $L_1 = = \pm S_1/2\sqrt{1 + 4S_2/S_1}$  Сопротивление мгновенной остановки для симметричного Т-образного МЧП из (5.3) и (5.49)  $S_{м.о} = = B_{12}/B_{22} = 2S_1S_2/(S_1 + 2S_2)$  Сопротивление холостого хода из (5.4) и (5.49)  $S_{x.x} = B_{11}/B_{21} = 2S_2(S_1 + 2S_2)/(S_1 + 4S_2)$ .

Для симметричного П-образного МЧП из (5.3) и (5.51)

$$S_{м.о} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \frac{(4S_2 + S_1) S_1 2S_2}{4S_2 (2S_2 + S_1)} = \frac{S_1 (4S_2 + S_1)}{2(2S_2 + S_1)}$$

также из (5.4) и (5.49)

$$S_{x. x} = \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{(2S_2 + S_1) S_2}{2S_2} = \frac{2S_2 + S_1}{2}.$$

Из (5.38) известно, что  $S_{M. o} = L \operatorname{th} \gamma$  и  $S_{x. x} = \frac{L}{\operatorname{th} \gamma}$ , откуда

$$\operatorname{th} \gamma = \frac{S_{M. o}}{L} = \frac{S_{M. o}}{S_{x. x} \operatorname{th} \gamma};$$

$$\operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{S_{M. o}}{S_{x. x}}}.$$

Для симметричного Т-образного МЧП

$$\operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{S_{M. o}}{S_{x. x}}} = \sqrt{\frac{2S_1 S_2 (S_1 + 4S_2)}{(S_1 + 2S_2)(S_1 + 2S_2) 2S_2}} = \sqrt{\frac{S_1 (S_1 + 4S_2)}{(S_1 + 2S_2)^2}};$$

$$\operatorname{th} \gamma = \frac{\sqrt{S_1^2 \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)}}{(S_1 + 2S_2)} = \frac{S_1 \sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{S_1 \left(1 + \frac{2S_2}{S_1}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{1 + \frac{2S_2}{S_1}}.$$

Для симметричного П-образного МЧП  $\operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{S_{M. o}}{S_{x. x}}}$ ;

$$\operatorname{th} \gamma = \sqrt{\frac{S_1 (S_1 + 4S_2) 2}{2 (S_1 + 2S_2) (S_1 + 2S_2)}} = \sqrt{\frac{S_1^2 \left(1 + \frac{4S_2}{S_1}\right)}{(S_1 + 2S_2)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{\left(1 + \frac{2S_2}{S_1}\right)}.$$

Выражение для  $\operatorname{th} \gamma$  получается одинаковым для обоих видов звеньев (Т- и П-образных).

Для определения границ полосы пропускания коэффициент  $\gamma$  должен быть мнимым на том основании, что  $\operatorname{Arth} jx = j \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ . Если

$$\gamma = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{1 + \frac{2S_2}{S_1}}, \quad (5.57)$$

то выражение под корнем должно быть отрицательным  $1 + 4S_2/S_1 < 0$ .

Вторым пределом будет значение  $(-\infty)$ :

$$-\infty \leq 1 + \frac{4S_2}{S_1} \leq 0$$

или

$$-\infty \leq \frac{4S_2}{S_1} \leq -1. \quad (5.58)$$

Это неравенство представляет собой зависимость для определения ширины полосы пропускания для фильтра, составленного из симметричных Т- или П-образных звеньев и нагруженного на характеристическое сопротивление.

Частотными характеристиками фильтра являются зависимости  $a_1(\omega)$  — амплитудно- и  $a_2(\omega)$  — фазо-частотная характеристики. В полосе пропускания фильтра затухания  $a_1 = 0$  и частотная характеристика  $a_1(\omega)$  сливается с осью частот. Найдем вид функции  $a_1(\omega)$  в полосе затухания.

Из теории гиперболических функций известно, что  $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$ , поэтому  $\operatorname{ch} g = \operatorname{ch}(a_1 + ja_2) = \operatorname{ch} a_1 \times \times \operatorname{ch} ja_2 + \operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} ja_2$ , известно, что  $\operatorname{ch} jx = \cos x$  и  $\operatorname{sh} jx = = j \sin x$ , поэтому  $\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} a_1 \cos a_2 + j \operatorname{sh} a_1 \sin a_2$ .

Для Т- и П-образных МЧП (5.34), (5.49), (5.51)  $\operatorname{ch} g = B_{11} = = 1 + S_1/(2S_2)$ . Следовательно,  $\operatorname{ch} g = \operatorname{ch} a_1 \cos a_2 + j \operatorname{sh} a_1 \sin a_2 = = 1 + S_1/(2S_2)$ . Известно, что  $S_1 = j\sigma_1$ ,  $S_2 = j\sigma_2$  — величины мнимые, а  $1 + S_1/(2S_2)$  — величина вещественная. Для того чтобы  $\operatorname{ch} g = 1 + (j\sigma_1)/j2\sigma_2 = 1 + (\sigma_1)/2\sigma_2$ , необходимо, чтобы  $\operatorname{sh} a_1 \sin a_2 = 0$  и  $\operatorname{ch} a_1 \cos a_2 = 1 + S_1/(2S_2)$ .

**Механический фильтр нижних частот.** Рассмотрим динамическую систему, состоящую из масс и упругостей (рис. 5.7, а) и ее механическую цепь (рис. 5.7, б). Из (5.58) известна зависимость для определения ширины пропускания фильтра —  $-\infty \leq 4S_2/S_1 \leq \leq -1$ .

Для рассматриваемого случая  $S_1 = j\omega m$ ,  $S_2 = -j(k/\omega)$  и  $S_2/S_1 = -jk/\omega/(j\omega m) = -k/(\omega^2 m)$ . Пусть  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

В таком случае

$$S_2/S_1 = -\omega_0^2/\omega^2. \quad (5.59)$$

Определим границы полосы пропускания фильтра. Нижняя граница полосы пропускания  $\omega_1$  определится из зависимости

$$4S_2/S_1 = -4\omega_0^2/\omega_1^2 = -\infty,$$

откуда

$$\omega_1 = 0. \quad (5.60)$$

Верхняя граница полосы пропускания  $\omega_2$  определится из выражения —  $4\omega_0^2/\omega_2^2 = -1$ , откуда

$$\omega_2 = \pm \sqrt{4\omega_0^2} = |2\omega_0|. \quad (5.61)$$

Итак, для фильтра нижних частот (ФНЧ)  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = = 2\sqrt{k/m}$ . Следовательно, в интервале частот от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_2$  у такого фильтра будет полоса пропускания, а при  $\omega > \omega_2$  будет полоса затухания. В неравенстве  $0 < \omega < \omega_2$  коэффициент распространения  $\gamma$  имеет мнимое значение; вещественное значение он принимает в полосе затухания, т. е. когда  $\omega > \omega_2$ . В полосе пропускания амплитуды сил и скоростей при следовании волны вдоль фильтра остаются постоянными; в полосе затухания амплитуды сил и скоростей уменьшаются с каждым звеном, составляющим фильтр.

Из выражений (5.52) и (5.58)

$$\frac{Q_1}{Q_n} = e^{(n-1)r} = e^{(n-1) \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{1 + \frac{2S_2}{S_1}}} \quad (5.62)$$

Эта зависимость возрастает тем быстрее, чем больше число звеньев  $n$ , составляющих фильтр. Для того чтобы не было смы-

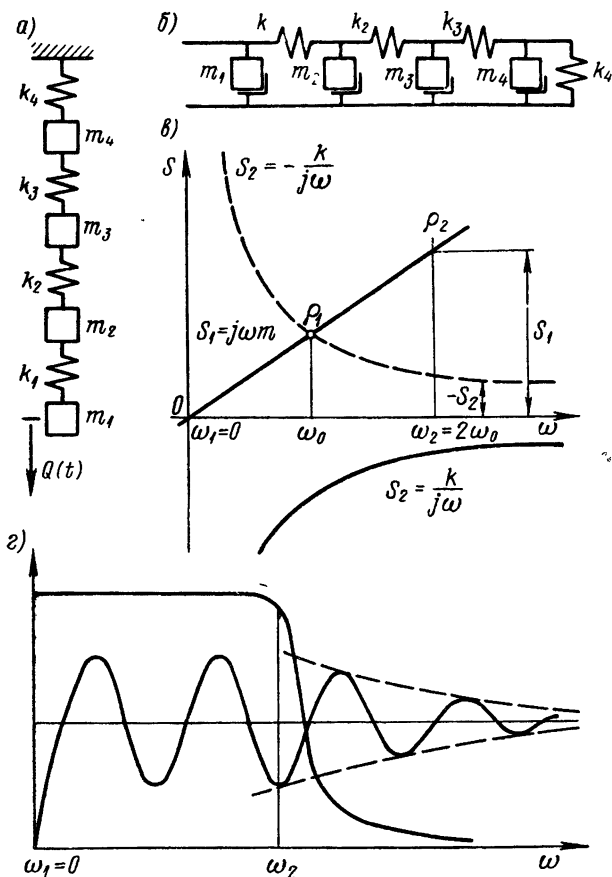


Рис. 5.7. Механический фильтр нижних частот

вания, нерезкости на границе пропусканий и затуханий, следует: конструировать фильтры из большего числа звеньев (на рис. 5.7,  $c$  показаны амплитуды колебаний постоянных в полосе пропускания и убывающих в полосе затухания); вводить пассивные элементы в параллельные ветви механической цепи фильтра нижних частот (массы с наименьшими сопротивлениями на нижних



частотах и с наибольшими на верхних) и в последовательные сопротивления (упругости с малой подвижностью на нижних частотах и с большой подвижностью на верхних).

Графическое определение (рис. 5.7, в) полосы пропускания МФНЧ производится построением изменений функций сопротивления элементов, составляющих фильтр — в данном случае  $S_1 = |\omega m|$ , и другого сопротивления, взятого с обратным знаком,  $S_2 = |-k/\omega|$ ; точка пересечения  $\rho_1$  двух кривых определяет частоту резонанса  $\omega_0$ ; верхняя граница ФНЧ  $\omega_2 = 2\sqrt{k/m}$ ; естественно, что нижней границей фильтра будет  $\omega_1 = 0$ .

В настоящей работе рассматриваются фильтры только для симметричных Т- и П-образных, а также несимметричных Г-образных четырехполюсников.

**Пример 2.** Пусть дана система (рис. 1.13, а).  $Q_1 = 10$  кгс;  $m_1 = m_2 = m_3 = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $k_1 = k_2 = k_3 = 1000$  кгс/м. Нужно определить границы пропускания фильтра:  $S_1 = j\omega m_1 = j2\omega$ ;  $S_2 = k_1/(j\omega) = 1000/(j\omega)$ , известно, что  $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1} = \sqrt{\frac{1000}{2}} \cong 22,4$  1/с.

Нижняя граница полосы пропускания определяется из условия (5.60)  $\omega_1 = 0$ ; верхняя граница полосы пропускания определяется из условия (5.61)  $4\omega_0^2/\omega_2^2 = 1$ , при этом  $\omega_2 = 2\omega_0 = 2 \cdot 22,4 \cong 45$  1/с. Затухание силы для третьего звена определится из уравнения (5.62)

$$\frac{Q_1}{Q_3} = e^{(n-1) \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1 + \frac{4S_2}{S_1}}}{1 + \frac{2S_2}{S_1}}} = e^{2 \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 1000}{j\omega \cdot j2\omega}}}{1 + \frac{2 \cdot 1000}{j\omega \cdot j2\omega}}};$$

$$\frac{Q_1}{Q_3} = e^{2 \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1 - \frac{4000}{2\omega^2}}}{1 - \frac{2000}{2\omega^2}}}$$

$\omega_1 = 50$  1/с,  $Q_3 = 3,88$  кгс;  $\omega_2 = 75$  1/с,  $Q_3 = 1,59$  кгс,  $\omega_3 = 100$  1/с,  $Q_3 = 0$  кгс.

**Механический фильтр верхних частот.** Теоретически механическая цепь фильтра верхних частот должна бы иметь вид, изображенный на рис. 5.8, а. Однако осуществить подобную схему не просто из-за того, что масса имеет один неподвижный конец и не может соединяться цепочкой, если число элементов массы более одного.

В полученной схеме в качестве параллельной ветви включена упругость, которая будет представлять большое сопротивление для низких частот и, таким образом, способствовать их удержанию. В последовательную ветвь включена масса, которая будет увеличивать подвижность на низких частотах и уменьшит подвижность на высоких частотах. Таким образом, в фильтре верхних частот  $S_1 = \kappa/(j\omega)$ ;  $S_2 = j\omega m$ .

Графическое определение (рис. 5.8, б) полосы пропускания механического фильтра верхних частот производится построением

изменения функций сопротивления элементов составляющих фильтр — в данном случае  $S_1 = k/(j\omega)$  и другого сопротивления, взятого с обратным знаком  $S_2 = -j\omega m$ . Точка пересечения  $\rho_2$  двух кривых определяет частоту резонанса  $\omega_0$ ; нижняя граница ФВЧ определяется так:  $-4S_2 = -4\omega m$ ;  $4\omega_1 m = k/\omega_1$ ;  $\omega_1^2 =$

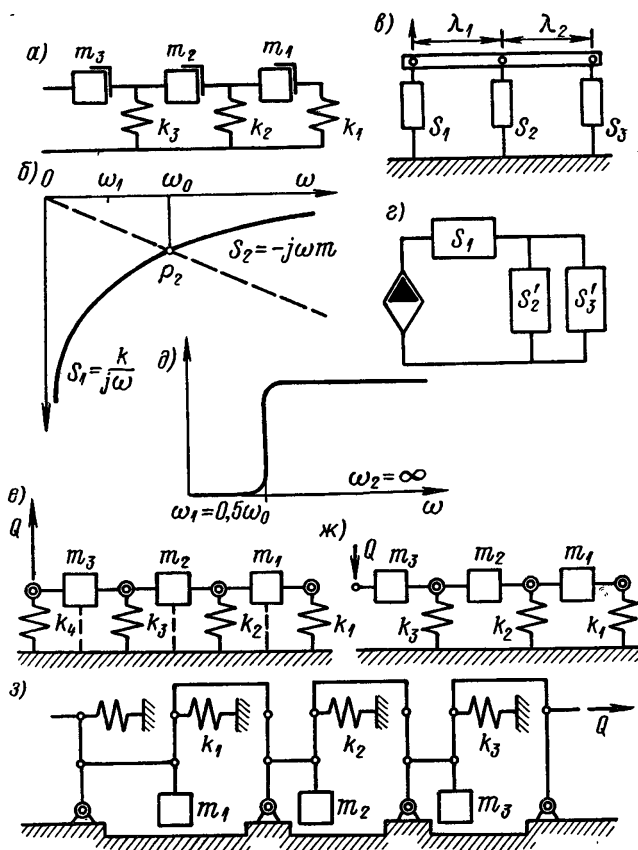


Рис. 5.8. Механический фильтр верхних частот

$= k/4m$ ;  $\omega_1 = 0,5\sqrt{k/m}$ . На всех более высоких частотах  $|S_1| < < |4S_2|$ ; поэтому все частоты, превышающие  $\omega_1$ , относятся к полосе пропускания; полоса в пределах от  $\omega = 0$  до  $\omega_1$  есть полоса затухания.

Ранее в п. 1.8 было установлено, что свободный рычаг, нагруженный тремя сопротивлениями (рис. 5.8, б)  $S_1, S_2, S_3$ , может быть заменен механической цепью (рис. 5.8, в), при этом сопротивлениями могут быть любые пассивные элементы, в частности и массы. Исходя из этого, можно представить механический фильтр верхних частот (рис. 5.8, в, ж, з) в виде подпружиненной шарнир-

ной системы, у которой между шарнирами расположены массы. В таком конструктивном выполнении механическая цепь будет изображена на рис. 5.8, а. Также исходя из ранее выполненных решений (1.8), для фильтра (рис. 5.8, в) можем написать для схемы на рис. 5.8, з

$$S'_2 = [\lambda_2^2 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2] S_2 \quad \text{и} \quad S'_3 = (\lambda_2 / \lambda_1)^2 S_3. \quad (5.63)$$

Для того чтобы приведенное сопротивление каждого последующего рычага равнялось действительному его сопротивлению

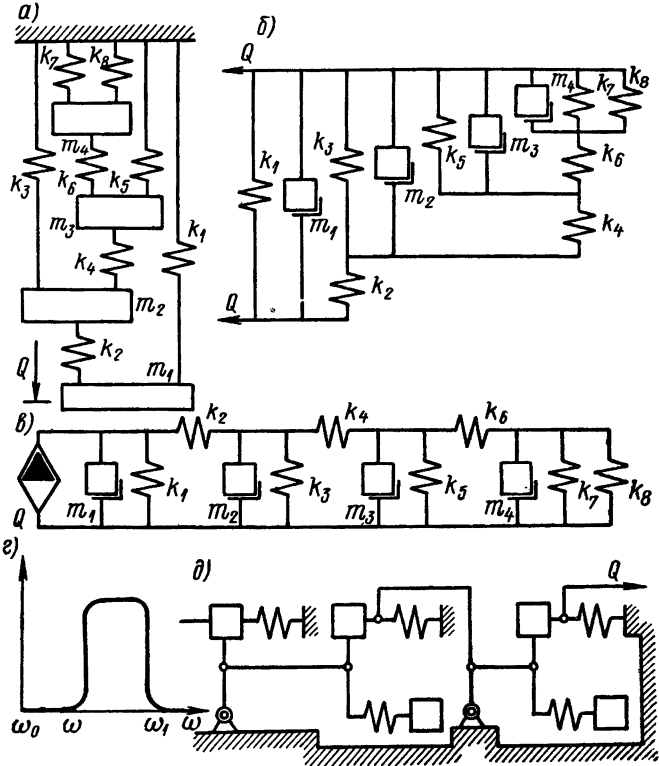


Рис. 5.9. Механический полосовой фильтр

( $S'_3 = S_3$ ), достаточно сделать рычаги равными, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Следует отметить, что собственно длина плеч не имеет значения, а в рассматриваемую схему входят приведенные, а не истинные значения масс, расположенные в середине рычагов. Из (5.63) можем написать:  $S'_2/S_2 = \lambda_2^2 / (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = m'_1/m_1 = 1/4$ ,  $m_1 = 4m'_1$ .

Последняя, очень важная зависимость показывает, что истинное значение масс нужно брать в четыре раза больше того значения, которое рассчитано, исходя из граничной частоты по экви-

валентной схеме фильтра. Эта граничная частота определяется согласно (5.59)  $S_2/S_1 = (j\omega m) j\omega/k = (j\omega^2) m/k = -\omega^2/\omega_0^2$ ; при этом для нижней границы  $4\omega_1^2/\omega_0^2 = 1$ , откуда  $\omega_1 = \omega_0/2$ . Для верхней границы  $4\omega_2^2/\omega_0^2 = \infty$ , откуда  $\omega_2 = \infty$ . На рис. 5.8,  $\delta$  показан график изменения частот фильтра.

**Механический полосовой фильтр.** Ранее на рис. 5.4,  $\nu$  отмечен механический фильтр, у которого имеется по несколько полос пропускания и затухания. Представленная динамическая система (рис. 5.9,  $a$ ), состоящая из масс и упругостей, причем в отличие от фильтра нижних частот (рис. 5.7,  $a$ ) в данной конструкции дополнительные упругости  $k_1, k_3, k_5$  соединяют соответствующие массы с основанием. Эта система представляет собой механический полосовой фильтр. Соответствующее преобразование динамической системы (рис. 5.9,  $b$ ) позволяет получить механическую цепь этого полосового фильтра (рис. 5.9,  $\nu$ ).

Граничные частоты будем определять так:

$$S_1 = j\omega m_1 + \frac{k_1}{j\omega} = j\omega m_1 - j\frac{k_1}{\omega} = j\left(\omega m_1 - \frac{k_1}{\omega}\right); \quad S_2 = \frac{k_2}{j\omega};$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{k_2}{j\omega}}{j\left(\omega m_1 - \frac{k_1}{\omega}\right)} = \frac{k_2\omega}{j\omega j(m_1\omega^2 - k_1)} = -\frac{k_2}{(m_1\omega^2 - k_1)}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{1}{\omega^2 \frac{m_1}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}}; \quad \text{если принять } \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_1}}, \quad \text{то}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_{02}^2} - \frac{k_1}{k_2}}.$$

Нижняя граница  $\omega_{01}$  полосового фильтра находится из условия

$$\frac{4S_2}{S_1} = \infty; \quad \frac{4S_2}{S_1} = -\frac{4}{\frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - \frac{k_1}{k_2}} = \frac{4}{0} = \infty; \quad \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} - \frac{k_1}{k_2} = 0.$$

Поэтому

$$\omega_1^2 = \omega_{02}^2 \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_2}{m_1} \cdot \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1}{m_1} = \omega_{01}^2.$$

Верхняя граница  $\omega_2$  полосового фильтра находится из условия

$$\frac{4S_2}{S_1} = 1; \quad \frac{4}{\frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} - \frac{k_1}{k_2}} = 1; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} - \frac{k_1}{k_2} = 4;$$

$$\omega_2^2 = \left(4 + \frac{k_1}{k_2}\right) \omega_{02}^2 = 4\omega_{02}^2 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{k_2}{m_1} = 4\omega_{02}^2 + \frac{k_1}{m_1};$$

$$\omega_2^2 = 4\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2.$$

Таким образом, учитывая выражения для  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , установим полосу пропускания полосового фильтра (рис. 5.9, з)

$$\omega_1 < \omega < \omega_2; \quad \omega_{01} < \omega < \sqrt{4\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}.$$

На рис. 5.9, д показана конструктивная схема полосового механического фильтра.

**Механический заграждающий фильтр.** Для контроля колебаний в динамических системах при различных частотах, когда

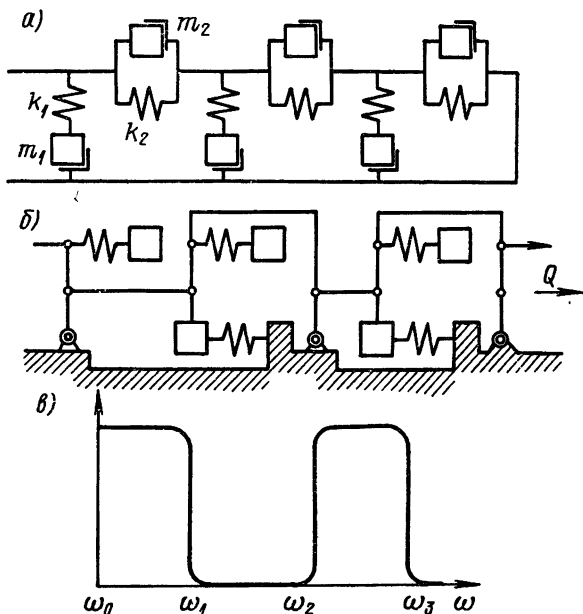


Рис. 5.10. Механический заграждающий фильтр

вероятно появление нескольких полос колебаний и, следовательно, возникает необходимость в подавлении этих колебаний, наиболее реальным устройством для этих целей является использование заграждающих фильтров. Такие заграждающие фильтры подавляют скорости линейные или угловые, частоты которых находятся между двумя предельными частотами и пропускают скорости всех частот, не входящие в эту полосу. Как было выяснено ранее, ширина пропусканий фильтра  $-\infty < 4S_2/S_1 < -1$ .

Следовательно, подавление частот происходит когда  $S_2/S_1$  по абсолютной величине не меньше четырех и, наоборот, будут пропускать скорости с частотами, имеющими отношение  $S_2/S_1$  в пределах от нуля до минус четырех.

Пусть дан фильтр, механическая цепь которого (рис. 5.10, а) состоит из последовательно включенных в параллельной ветви массы и упругости и параллельно включенных в последователь-

ную ветвь тоже массы и упругости. Одно из возможных конструктивных решений такого фильтра показано на рис. 5.10, б.

Граничные частоты будем определять так:  
Вначале определим  $S_1$  сопротивление для параллельной ветви

$$\frac{1}{S_1} = \frac{1}{j\omega m_1} + \frac{j\omega}{k_1} = \frac{k_1 - \omega^2 m_1}{j\omega k_1 m_1}; \quad S_1 = \frac{j\omega k_1 m_1}{k_1 - \omega^2 m_1}.$$

Определим  $S_2$  для последовательной ветви

$$S_2 = j\omega m_2 + \frac{k_2}{j\omega} = \frac{k_2 - \omega^2 m_2}{j\omega}.$$

Возьмем отношение

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{\frac{k_2 - \omega^2 m_2}{j\omega}}{\frac{j\omega k_1 m_1}{k_1 - \omega^2 m_1}} = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 - \omega^2 m_1)}{j\omega(j\omega k_1 m_1)} = \\ &= \frac{k_2 \left(1 - \frac{m_2}{k_2} \omega^2\right) k_1 \left(1 - \frac{m_1}{k_1} \omega^2\right)}{-\omega^2 k_1 m_1}. \end{aligned}$$

Возьмем  $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$  и  $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$  и пусть  $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2 = \omega_x^2$ .  
В таком случае:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{k_2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_x^2}\right)^2}{-\omega^2 m_1}.$$

Выражение  $k_1/m_1 = k_2/m_2$  умножим на  $k_2/k_1$ , так

$$\frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2}{m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1}; \quad \frac{k_2}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \frac{k_2}{k_1} = \omega_{02}^2 \frac{k_2}{k_1}.$$

В таком случае

$$\frac{S_2}{S_1} = - \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_x^2}\right)^2 \omega_{02}^2 \frac{k_2}{k_1}}{\omega^2} = - \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_x^2}\right)^2 \frac{k_2}{k_1}}{\frac{\omega^2}{\omega_x^2}}.$$

Из этого выражения получают граничные частоты (рис. 5.10, в).

## СРЕДСТВА КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 6.1. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Под передаточной функцией системы будем понимать отношение изображений выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях; передаточная функция дает полное представление о динамических свойствах системы и может быть задана в аналитической форме частотной характеристикой. Обычно при исследовании динамической системы в качестве входной величины используют синусоидальную (гармоническую) функцию, изменяющуюся с определенной частотой: по входной величине наблюдают поведение системы и в частности выходной величины, ее амплитуды и начальной фазы.

Будем считать, что  $A(p)$  изображение выходной величины, а  $B(p)$  изображение входной величины, тогда (4.1) передаточная функция  $K(p) = A(p)/B(p)$ . Частота  $p$  в выражении  $K(p)$  является комплексным числом  $p = \beta + j\omega$ . В частном случае, когда частота изменяется вдоль мнимой оси ( $\beta = 0$ ,  $p = j\omega$ ), передаточная функция равна амплитудно-фазовой частотной характеристике  $K(p) = K(j\omega)$ .

В динамических системах используются последовательные и параллельные соединения.

При последовательном соединении МЧП выходная величина предыдущего четырехполюсника является входной величиной последующего. Пусть известны передаточные функции отдельных четырехполюсников (рис. 6.1, а).

$$K_1(p) = \frac{A_1(p)}{B_1(p)}; \quad K_2(p) = \frac{A_2(p)}{B_2(p)} \cdot \dots \cdot K_n(p) = \frac{A_n(p)}{B_n(p)}.$$

Произведение всех передаточных функций будет

$$K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_n(p) = \frac{A_1(p)}{B_1(p)} \cdot \frac{A_2(p)}{B_2(p)} \cdot \dots \cdot \frac{A_n(p)}{B_n(p)}. \quad (6.1)$$

По определению  $A_1(p) = B_2(p)$ ;  $A_2(p) = B_3(p)$ ;  $A_{(n-1)}(p) = B_n(p)$ .

В таком случае, производя сокращения в (6.1), имеем  $K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_n(p) = \frac{A_n(p)}{B_1(p)}$ ;  $K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_n(p)$ .

Передаточная функция последовательного соединения четырех- полюсников равна произведению передаточных функций отдельных МЧП.

При параллельном соединении МЧП на вход всех четырех- полюсников с передаточными функциями  $K_1(p)$ ,  $K_2(p)$ , ...,  $K_n(p)$  подается общая входная величина  $B(p)$ , а выходная величина  $A(p)$  является суммой выходных величин отдельных четырех- полюсников (рис. 6.1, б), при этом

$$A(p) = A_1(p) + A_2(p) + \dots + A_n(p), \quad (6.2)$$

$$A_1(p) = K_1(p) B(p), \quad A_2(p) = K_2(p) B(p) \dots A_n(p) = K_n(p) B(p).$$

В таком случае из (6.2)

$$A(p) = B(p) [K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p)];$$

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = K_1(p) + K_2(p) + \dots + K_n(p).$$

Передаточная функция параллельного соединения четырех- полюсников равна сумме передаточных функций отдельных МЧП.

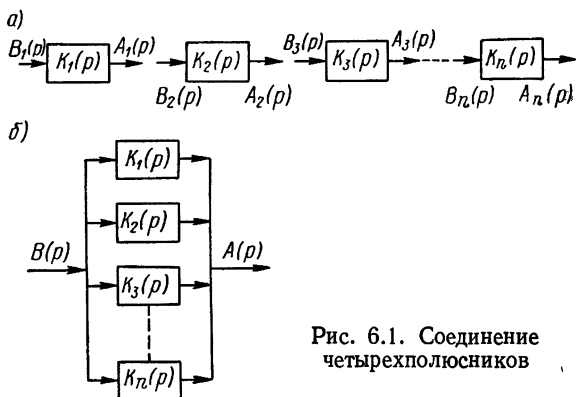


Рис. 6.1. Соединение четырехполюсников

Произведем одновременное исследование изменения амплитуд и фаз проходящих входных и выходных величин в динамической системе, применяя метод комплексных величин.

Пусть комплексное значение входной величины  $B = Be^{j\zeta_1}$ , а комплексное значение выходной величины  $A = Ae^{j\zeta_2}$ .

Отношение комплексных значений выходной и входной величин является также комплексной величиной и называется комплексной передаточной функцией или комплексной подвижностью системы:  $K(j\omega) = A/B$ .

Обычно считают, что начальная фаза входной величины  $\zeta_1$  равна нулю и для упрощения берут  $\zeta_2 = \zeta$ ; в таком случае, помня,



что  $e^{j\zeta_1} = e^{j0} = 1$ , напишем

$$K(j\omega) = Ae^{j\zeta}/B = K(\omega)e^{j\zeta(\omega)}. \quad (6.3)$$

Модуль  $K(\omega)$  комплексной передаточной функции показывает отношение амплитуд выходной и входной величин, а аргумент  $\zeta(\omega)$  отмечает происходящий в динамической системе сдвиг фаз; построение графика зависимости  $K(\omega)$  и  $\zeta(\omega)$  называют соответственно амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристиками динамической системы.

Выражение (6.3) можно преобразовывать следующим образом:

$$K(j\omega) = a_1 + ja_2 = K(\omega)e^{j\zeta(\omega)} = K(\omega)[\cos \zeta(\omega) + j \sin \zeta(\omega)];$$
$$K(\omega) = K(\omega) \cos \zeta(\omega) + jK(\omega) \sin \zeta(\omega).$$

Здесь первый член правой части  $a_1$  вещественная частотная характеристика, а второй член  $a_2$  мнимая частотная характеристика, при этом

$$K(\omega) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad (6.4)$$
$$\zeta(\omega) = \arctg \frac{a_2}{a_1}.$$

Величина обратная  $K(j\omega)$ , т. е.  $1/[K(j\omega)]$  называется комплексным сопротивлением звена или системы.

## 6.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**Логарифмические координаты.** Для практического применения частотные характеристики удобно наносить в логарифмических координатах. Действительно, ведь десятикратному изменению частоты соответствует изменение логарифма только на единицу; характеристики простых динамических звеньев при этом изображаются в виде отрезков прямых линий. Самое главное, что при использовании логарифмических характеристик можно сравнительно легко оценить качество динамической системы, а также определить, как будет реагировать система на вводимые изменения в соединении элементов и звеньев.

Таким образом, логарифмической называют такую систему координат, в которой по обеим осям координат вместо числовых значений величин откладывают логарифмы этих значений. Система будет полулогарифмической, если логарифмы значений откладывают только по одной оси. Для изменения комплексной передаточной функции в логарифмическом масштабе применяют ранее рассмотренную единицу — децибел. Ординаты логарифмической амплитудной характеристики  $L(\omega)$  (в дБ) определяют следующим образом:  $L(\omega) = 20 \lg A/B = 20 \lg K(\omega)$  или  $20 \lg K$ .

**Пример 1.** Подставляя значения  $K$  (6.4), получим выражения: 1)  $K = 10$ ;  $L(\omega) = 20 \lg 10 = 20 \cdot 1 = 20$  дБ; 2)  $K = 20$ ;  $L(\omega) = 20 \lg 20 =$

$= 20 (\lg 2 + \lg 10) = 20 (0,3 + 1) = 26$  дБ; 3)  $K = 100$ ;  $L(\omega) = 20 \lg 100 = 20 \cdot 2 = 40$  дБ; 4)  $K = 200$ ;  $L(\omega) = 20 \lg 200 = 20 (\lg 2 + \lg 100) = 20 (0,3 + 2) = 46$  дБ.

При анализе частотных характеристик в логарифмическом масштабе применяется новая единица измерения — декада. Декадой называется диапазон частот, в пределах которого частота изменяется в десять раз. При двукратном изменении частоты считается, что частота изменилась на октаву. Таким образом, число октав, расположенных в интервале частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяется соотношением

$$\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 3,32 \lg \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

при этом число декад, расположенных в этом же интервале частот  $\omega_1, \omega_2$  будет  $\lg \omega_2/\omega_1$ .

Логарифмические частотные характеристики определяются выражением для передаточной функции системы или звена (6.3); после логарифмирования при  $\ln e = 1$  имеем:

$$\ln K(j\omega) = \ln K(\omega) + j\zeta(\omega) \ln e = \ln K(\omega) + j\zeta(\omega).$$

Кривые, построенные в логарифмическом масштабе частот  $\ln(\omega)$ , соответствующие выражению  $\ln K(\omega)$ , называют натуральной логарифмической амплитудно-частотной, а соответствующие выражению  $\zeta(\omega)$  — натуральной логарифмической фазо-частотной характеристиками.

### 6.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Основными звеньями, которые позволяют осуществлять определенные физические явления, являются следующие: инерционное; безынерционное; форсирующее; дифференцирующее; интегрирующее; колебательное.

Инерционное звено образуется в результате соединения элемента, способного запастись энергией, и элемента, создающего потери энергии (рис. 6.2, а).

Рассмотрим построенную схему механического четырехполюсника (рис. 6.2, б). Напишем уравнение четырехполюсника в системе S-параметров:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2; \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2. \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты матрицы обратного Г-образного соединения (3.76)

$$S_{11} = S_2 = \frac{k}{p}; \quad S_{12} = -S_2 = -\frac{k}{p};$$

$$S_{21} = S_2 = \frac{k}{p}; \quad S_{22} = -(S_1 + S_2) = -\left(\frac{k}{p} + r\right).$$

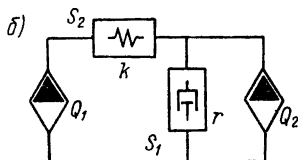
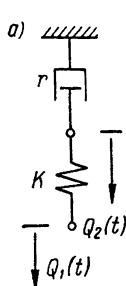
В таком случае

$$Q_1 = S_2 v_1 - S_2 v_2 = \frac{k}{p} (v_1 - v_2);$$

$$Q_2 = S_2 v_1 - (S_1 + S_2) v_2 = \frac{k}{p} v_1 - r v_2 - \frac{k}{p} v_2 =$$

$$= \frac{k}{p} (v_1 - v_2) - r v_2;$$

$$Q_2 = Q_1 - r v_2; \quad \frac{Q_2}{v_2} = S_2; \quad v_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2 p}{k}.$$



В таком случае

$$Q_2 = Q_1 - Q_2 \frac{rp}{k}.$$

Обозначим  $r/k = T$ ,

$$Q_2 + Q_2 T p = Q_1; \quad (6.5)$$

$$K(p) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1}{T p + 1}. \quad (6.6)$$

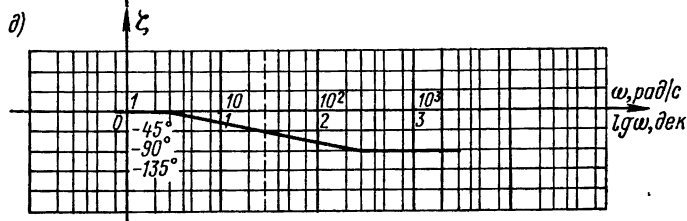
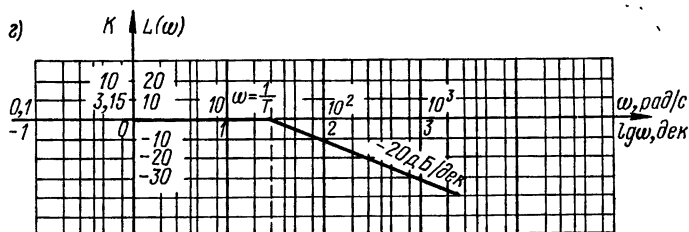
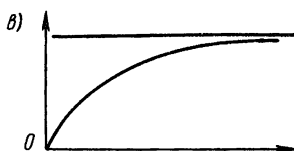


Рис. 6.2. Инерционное звено

Дифференциальное уравнение (6.5) решается так

$$T \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = Q_1; \quad T dQ_2 = -(Q_2 - Q_1) dt;$$

$$-\frac{dt}{T} = \frac{dQ_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{d(Q_2 - Q_1)}{Q_2 - Q_1}.$$

После интегрирования  $(-t/T) + \ln C = \ln(Q_2 - Q_1)$ , здесь  $C$  — постоянная интегрирования.

В таком случае

$$e^{-\frac{t}{T}} e^{\ln C} = e^{\ln(Q_2 - Q_1)},$$

так как

$$e^{\ln C} = C; \quad e^{\ln(Q_2 - Q_1)} = Q_2 - Q_1, \quad \text{то } C e^{-\frac{t}{T}} = Q_2 - Q_1.$$

Значение постоянной  $C$  найдем так:

в момент  $t = 0$  сила на выходе  $Q_2 = 0$  и  $C e^{-\frac{0}{T}} = -Q_1$  ( $e^0 = 1$ ),  
 $C = -Q_1$  и, окончательно,

$$-Q_1 e^{-\frac{t}{T}} = Q_2 - Q_1, \quad Q_2 = Q_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Эта зависимость характеризуется нарастанием по экспоненциальному закону величины  $Q_2$  (от нуля до максимума), имея аperiодический характер (рис. 6.2, в).

Используя (6.6), напишем значение комплексной передаточной функции

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1 - j\omega T}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Это выражение можно представить

$$K(j\omega) = a_1 + ja_2 = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \left( \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right).$$

Модуль

$$|K(\omega)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2};$$

$$|K(\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\right)^{-1} = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (6.7)$$

Фазовая характеристика  $\zeta(\omega) = \arctg a_2/a_1$ ;

$$\zeta(\omega) = \arctg \frac{-\omega T}{\frac{1}{1 + \omega^2 T^2}} = -\arctg \omega T.$$

При  $\omega \ll 1/T$  можно пренебречь величиной  $\omega^2 T^2$  по сравнению с единицей. Из (6.7)  $L(\omega) = -20 \lg 1 = 0$  при  $\omega \gg 1/T$  можно пренебречь единицей по сравнению с величиной  $\omega^2 T^2$

$$L(\omega) = -20 \lg T\omega;$$

при  $\omega = 1/T$ ;  $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{2} = -20 \lg 1,41 = -20 \times 0,15 = -3$  дБ.

Эта частота называется сопрягающей, причем значение ( $-3$  дБ) величина наибольшей ошибки при сопряжении. Поэтому ЛАХ

может быть представлена двумя прямолинейными отрезками (рис. 6.2, з). Точкой пересечения линии с осью абсцисс является частота  $\omega = 1/T$ .

Изменяя частоту на декаду, то есть беря  $\omega$  и  $10\omega$ , имеем:

$$L(10\omega) = -20 \lg T\omega = -20 \lg T \cdot 10\omega = -20 \lg 10T\omega;$$

$$L(\omega) = -20 \lg T\omega, \text{ получаем } L(10\omega) - L(\omega) =$$

$$= -20 \lg 10T\omega - (-20 \lg T\omega) =$$

$$= -20 \left( \lg \frac{10T\omega}{T\omega} \right) = -20 \lg 10 = -20.$$

ЛФХ будет  $\zeta(\omega) = -\text{arctg}(T\omega)$  и изображается на рис. 6.2, д).

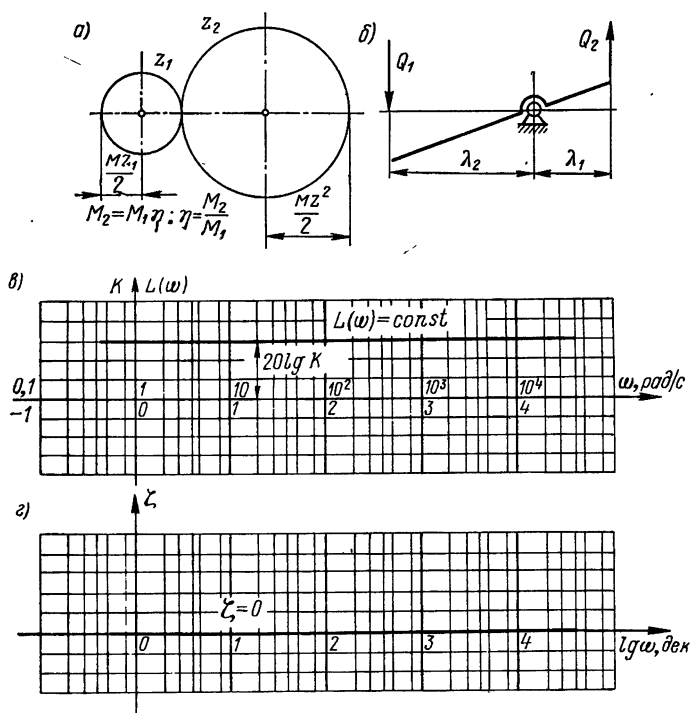


Рис. 6.3. Безынерционное звено

Безынерционное звено представляет собой такое соединение элементов, в котором выходная величина  $Q_2$  без искажений и запаздываний воспроизводит входную величину  $Q_1$ . Отношение этих величин называют коэффициентом усиления

$$Q_2 = KQ_1. \quad (6.8)$$

При этом постоянная времени настолько мала, что ею можно пренебречь. Такое звено не обладает инерционностью и мгновенно дает на выходе пропорциональную величину  $KQ_1$ ; поэтому такие

звенья называют пропорциональными. В общем виде можно было бы зависимость записать в виде дифференциального уравнения для аperiодического процесса  $TdQ_2/dt + Q_2 = KQ_1$ , однако при  $T = 0$  оно принимает вид (6.8), (6.6).

Характерными примерами безынерционных звеньев будут соединения зубчатых колес и рычажные механизмы (6.3, а, б). Из-за жесткости деталей явления переходного процесса, как правило, отсутствуют

Комплексная передаточная функция безынерционного звена при  $t = 0$   $K(j\omega) = Ke^{j0} = K$ . Это означает, что на всех частотах усиление постоянно, а сдвиг фаз

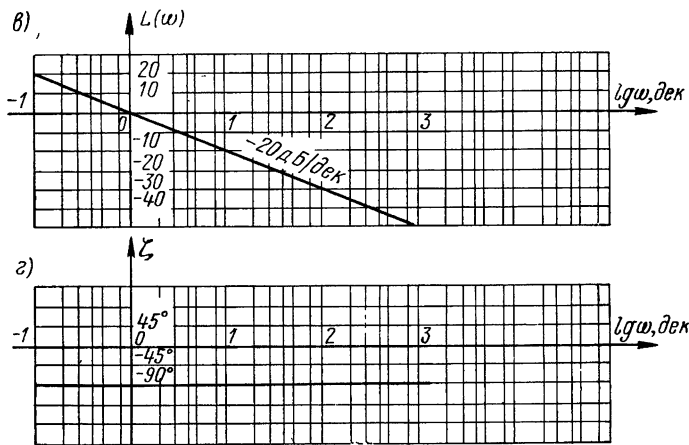
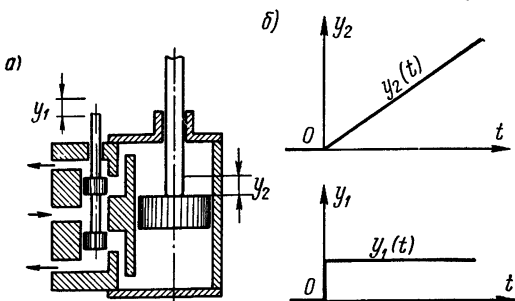


Рис. 6.4. Интегрирующее звено

отсутствует.  $L(\omega) = 20 \lg K$  и  $\zeta = 0$ . Логарифмические характеристики, соответствующие этим величинам, показаны на рис. 6.3, в, г. Если  $K < 1$ , то  $L(\omega) < 0$  — отрицательное число.

В п. 1.8 подробно рассмотрены динамические системы с рычажными передачами и способы построения механических цепей.

Представление о физическом смысле интегрирующего звена дает механизм поступательного перемещения управляющего и исполнительного поршней гидравлического устройства (рис. 6.4, а). В этом механизме в качестве входной величины принят поток жидкости пропорциональный перемещению  $y_1$  управляющего поршня, а выходной величины — путь  $y_2$  исполнительного поршня (рис. 6.4, б)  $dy_2/(dt) = Ky_1$

Эта зависимость представляет собой уравнение интегрирующего звена; где  $K$  — коэффициент усиления; при этом  $K = \dot{y}_2/y_1 = (dy_2/dt)/y_1$ .

В общем виде это уравнение решается так:

$$y_2 = \int_0^t K y_1 dt = K \int_0^t y_1 dt.$$

Передаточную функцию интегрирующего звена получают так:

$$p y_2 = K y_1; \quad K(p) = y_2/y_1 = K/p.$$

Вспомним из введения  $e^{j\omega} = \cos \omega + j \sin \omega$ , что если  $\omega = \pi/2$ , то  $e^{j \frac{\pi}{2}} = 0 + j \cdot 1 = j$ , поэтому

$$K(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{\omega e^{j \frac{\pi}{2}}} = K e^{-j\pi/2}/\omega, \quad (6.9)$$

при  $K = 1$   $K(j\omega) = e^{-j\pi/2}/\omega$ .

Интегрирующее звено создает отставание выходной величины на  $\pi/2$  при всех частотах. Амплитуда выходной величины уменьшается с частотой.

Из приведенного соотношения (6.9) видно, что усиление звена обратно пропорционально частоте, а сдвиг фаз на всех частотах составляет величину  $-\pi/2 \cdot K(\omega) = 1/\omega$ ;  $\zeta(\omega) = -\pi/2$ ; отсюда  $L(\omega) = 20 \lg K(\omega) = 20 \lg \omega^{-1} = -20 \lg \omega$ .

Из этих зависимостей можно сделать вывод, что логарифмическая амплитудная характеристика интегрирующего звена имеет наклон  $-20$  дБ/дек, а логарифмическая фазовая характеристика проходит параллельно оси абсцисс и имеет величину  $-90^\circ$  (рис. 6.4, в, г).

В общем виде для форсирующего звена справедливо дифференциальное уравнение движения в виде:

$$T_1 \frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = K \left( T_2 \frac{dQ_1}{dt} + Q_1 \right) \quad (6.10)$$

или в операционной записи  $Q_2 (T_1 p + 1) = K Q_1 (T_2 p + 1)$ . Проанализируем данное выражение в зависимости от влияния постоянных времени:

1) Пусть  $T_2 = 0$ , тогда  $T_1 = T$  и  $Q_2 (T p + 1) = K Q_1$ ; это выражение соответствует уравнению движения инерционного звена (6.5).

2) Пусть  $T_1 \gg 0$ , тогда  $T_1 p Q_2 \gg Q_2$  и величиной  $Q_2$  можно пренебречь; точно так же, поскольку  $T_1 \gg T_2$ , можно пренебречь величиной  $T_2 p Q_1$ , что дает возможность выражение (6.10) написать так:  $T_1 = T$  и  $T p Q_2 = K Q_1$ . Это выражение соответствует свойствам интегрирующего звена.

3) Пусть  $T_1 = T_2$ , тогда, сокращая  $(Tp + 1)$ , получаем  $Q_2 = = KQ_1$ , что соответствует свойствам безынерционного звена.

4) Пусть  $T_1 = 0$ , тогда  $T_2 = T$  и  $Q_2 = KQ_1(Tp + 1)$ ; получается интересная зависимость, когда выходная величина пропорциональна сумме входной величины и ее производной. Подобные звенья называют форсирующими. Передаточная функция форсирующего звена  $K(p) = Q_2/Q_1 = K(Tp + 1)$ . Это значение является обратным по сравнению со значением передаточной функции инерционного звена.

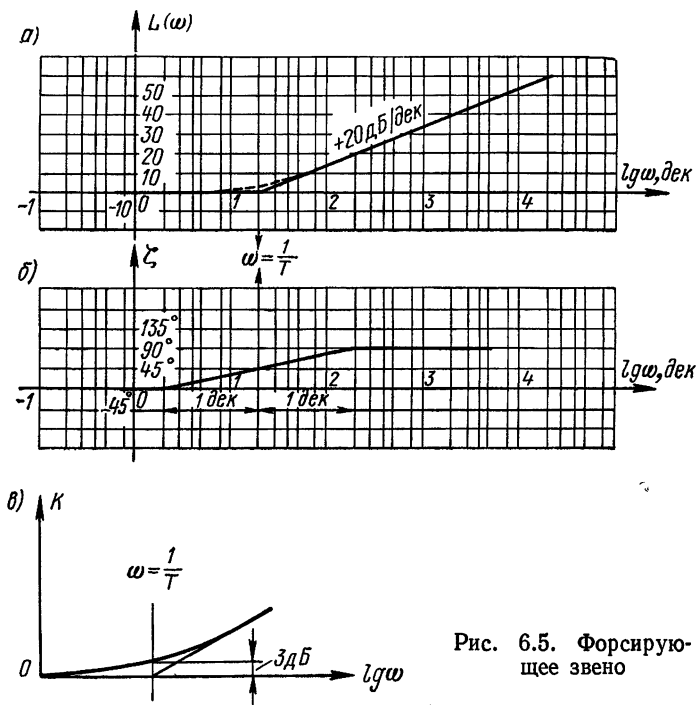


Рис. 6.5. Форсирующее звено

Если применять в конструкции механизма совместно два звена — инерционное и форсирующее, то при равенстве их постоянных времени влияние звеньев будет уравновешено и система станет безынерционной:  $K_2(p) = K_1(p) K_2(p) = K_1/(Tp + 1) \times K_2(Tp + 1) = K_1 K_2 = K$  или  $Q_2 = KQ_1$ . Можно написать, что комплексной передаточной функцией форсирующего звена будет выражение  $K(j\omega) = K(1 + j\omega T)$ . Очевидно  $K(\omega) = \sqrt{a^2 + a_2^2} = \sqrt{K^2 + (K\omega T)^2} = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$  или  $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$  и  $\zeta(\omega) = \text{arctg } \omega T$ .

Произведем анализ характеристик (рис. 6.5, а, б):

1) При очень низких частотах, когда  $\omega \ll 1/T$  или  $\omega T \ll 1$ , можно считать, что  $\omega T \cong 0$ . Тогда  $K(\omega) \cong K$  или  $L(\omega) =$



$= 20 \lg 1 = 0$ ,  $\zeta(\omega) = \arctg 0 = 0$ . На низких частотах амплитудные и фазовые характеристики совпадают с осью абсцисс.

2) При очень высоких частотах, когда  $\omega \gg 1/T$  или  $\omega T \gg 1$ , можно считать, что  $K(\omega) = K \sqrt{\omega^2 T^2} = K\omega T$  или при  $K=1$ ,  $K(\omega) = \omega T$ , или  $L(\omega) = 20 \lg \omega T = 20 \lg T + 20 \lg \omega$ . Это будет сочетание прямой, идущей под наклоном  $+20$  дБ/дек и пересекающей ось абсцисс при  $\omega = 1/T$ ; на этой частоте  $K(\omega) = 1$  и  $L(\omega) = 0$ . Очевидно, что  $\zeta(\omega) = \arctg \infty = \pi/2$ , сдвиг фаз составляет  $90^\circ$ .

3) Интересно уточнить, что вблизи частоты сопряжения  $\omega = 1/T$   $K(\omega) = \sqrt{1 + T^2/T^2} = \sqrt{2}$  и  $L(\omega) =$

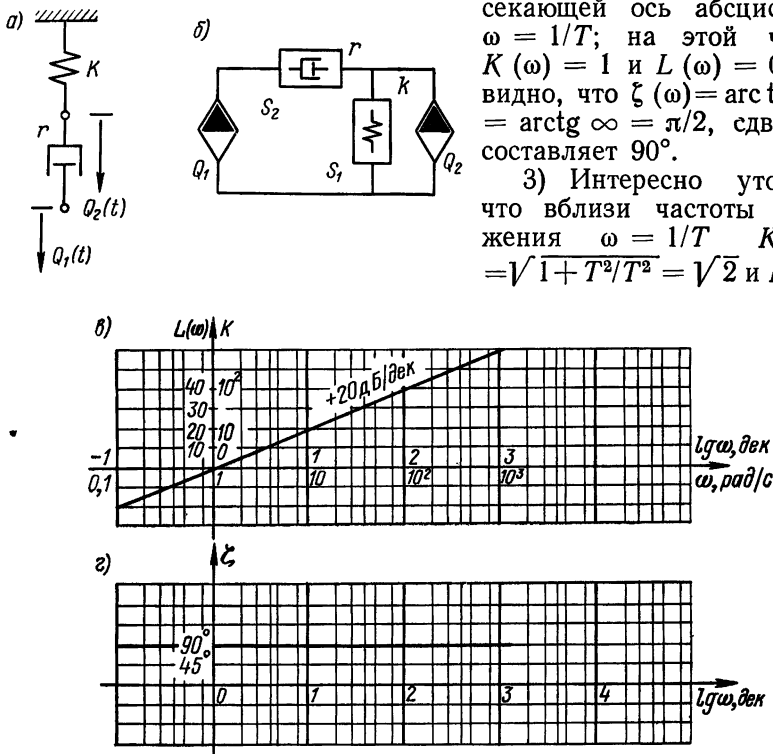


Рис. 6.6. Дифференцирующее звено

$= 20 \lg \sqrt{2} = 20 \lg 2^{0.5} = 10 \lg 2 = 10 \cdot 0,3 = 3$  дБ, что отмечено на рис. 6.5, в.

Таким образом, можно отметить, что форсирующее звено в области высоких частот создает положительный сдвиг фаз и повышает усиление.

Идеальное дифференцирующее звено представляет собой устройство, которое на выходе дает без искажений производную по времени от входной величины, например, под воздействием силы  $Q_1$   $Q_2 = K dQ_1/(dt)$  или под воздействием скорости  $v_1$   $v_2 = K dv_1/(dt)$ . В общем виде  $y(t) = dx(t)/(dt)$ ; в операторной записи можно написать  $A(p) = pB(p)$  и  $K(p) = A(p)/B(p) = p$  или  $K(j\omega) = j\omega = \omega e^{j \frac{\pi}{2}}$ .

Рассмотрим (рис. 6.6, а) динамическую систему, состоящую из упругости и сопротивления. Определим передаточную функцию  $K(p) = Q_2/Q_1$  по механической цепи этой системы (рис. 6.6, б). Уравнение четырехполюсника в системе S-параметров

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_{11}v_1 + S_{12}v_2, \\ Q_2 &= S_{21}v_1 + S_{22}v_2. \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты матрицы обратного Г-образного соединения

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_2 = r; \quad S_{12} = -S_2 = -r; \quad S_{21} = S_2 = r; \\ S_{22} &= -(S_1 + S_2) = -\left(\frac{k}{p} + r\right). \end{aligned}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} Q_1 &= rv_1 - rv_2 = r(v_1 - v_2); \\ Q_2 &= rv_1 - \left(\frac{k}{p} + r\right)v_2 = r(v_1 - v_2) - \frac{k}{p}v_2 = Q_1 - \frac{k}{p}v_2. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{Q_2}{v_2} = S_2$ ;  $v_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{r}$ , поэтому  $Q_2 = Q_1 - \frac{k}{p} \frac{Q_2}{r}$ ; если  $T = \frac{r}{k}$ , то  $Q_2 = Q_1 - \frac{Q_2}{Tp}$ ;  $Q_2\left(1 + \frac{1}{Tp}\right) = Q_1$ ; с учетом коэффициента усиления  $K$

$$K(p) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{K}{1 + \frac{1}{Tp}} = \frac{KTp}{1 + Tp}.$$

Для установившегося процесса

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{j\omega KT}{1 + j\omega T} = \frac{j\omega KT(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{j\omega KT + \omega^2 KT^2}{1 + \omega^2 T^2}; \\ K(j\omega) &= \frac{\omega^2 KT^2}{1 + \omega^2 T^2} + j\left(\frac{\omega KT}{1 + \omega^2 T^2}\right). \end{aligned}$$

Модуль  $K(\omega) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ;

$$\begin{aligned} K(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{\omega^2 KT^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega KT}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2}; \\ K(\omega) &= \sqrt{\frac{(\omega KT)^2}{1 + \omega^2 T^2}} = \frac{\omega KT}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \end{aligned}$$

представляет собой амплитудно-частотную характеристику звена. Аргумент

$$\zeta(\omega) = \text{arctg} \frac{a_2}{a_1} = \text{arctg} \frac{\left(\frac{\omega KT}{1 + \omega^2 T^2}\right)}{\left(\frac{\omega^2 KT^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)} = \text{arctg} \frac{1}{\omega T}.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика представляет собой график прямой пропорциональности — прямая линия, про-

ходящая через начало координат (рис. 6.6, в)  $L(\omega) = +20 \lg \omega$ . Коэффициент усиления возрастает на 20 дБ на декаду. Логарифмическая фазовая характеристика (рис. 6.6, г) представляет собой прямую линию, параллельную оси абсцисс и проходящую через точку  $+\pi/2$ .

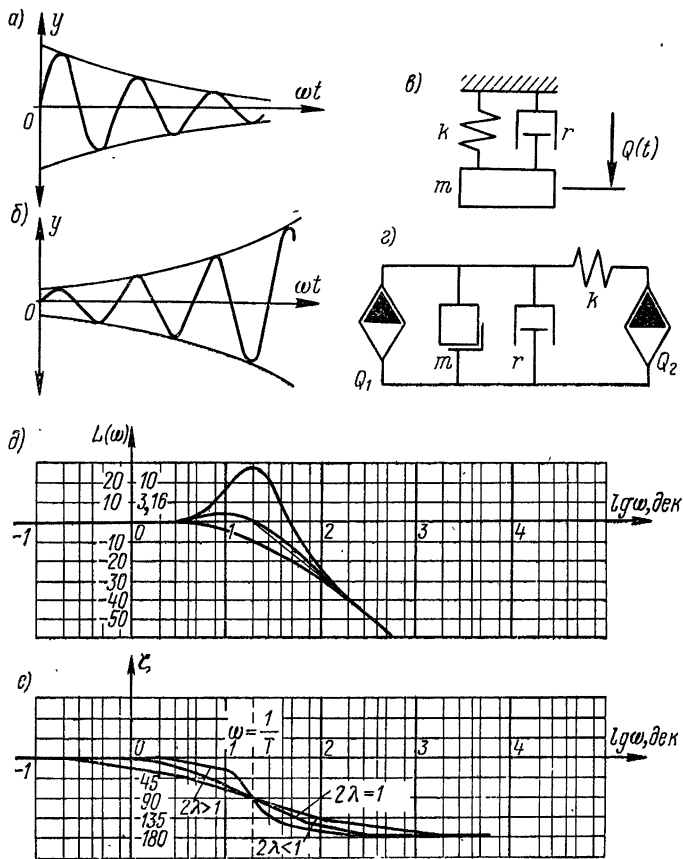


Рис. 6.7. Колебательное звено

Колебательное звено получается в результате соединения, например, массы и упругости, способные запастись энергией и взаимно воздействовать друг на друга. Возникающий в результате обмена энергией колебательный процесс может быть затухающим (рис. 6.7, а) и неустойчивым (рис. 6.7, б).

Пусть дана динамическая система (рис. 6.7, в) и ее механическая цепь (рис. 6.7, г).

Уравнение движения можно записать в виде

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = Q \sin \omega t.$$

Общее решение удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + ky = 0. \quad (6.11)$$

Пусть  $y = y_0 e^{pt}$ , тогда

$$\dot{y} = p (y_0 e^{pt}) = py; \quad \ddot{y} = p^2 y. \quad (6.12)$$

Подставляя (6.11) в (6.12), получаем:  
 $mp^2 y + rpy + ky = 0$ , или помня, что  $ky = Q$ , то

$$mp^2 \frac{Q}{k} + rp \frac{Q}{k} + Q = 0. \quad (6.13)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_c^2 \text{ или } T^2 = \frac{1}{\omega_c^2} = \frac{m}{k}. \quad (6.14)$$

$$\frac{r}{m} = 2\lambda\omega_c \text{ или } \frac{r}{k} = \frac{r}{m} \frac{m}{k} = 2\lambda\omega_c \frac{1}{\omega_c^2};$$

$$\frac{r}{k} = 2\lambda \frac{1}{\omega_c} = 2\lambda T. \quad (6.15)$$

Подставляем (6.14) и (6.15) в (6.13) и получаем

$$T^2 p^2 Q + 2\lambda T p Q + Q = 0.$$

Пусть на входе будет сила  $Q_1$ , а на выходе сила  $Q_2$ , в таком случае

$$T^2 p^2 Q_2 + 2\lambda T p Q_2 + Q_2 = K Q_1.$$

Передаточная функция колебательного звена будет:

$$K(p) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\lambda T p + 1}. \quad (6.16)$$

Передаточную функцию в установившемся режиме возьмем из (6.16) при  $p = j\omega$

$$K(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2\lambda T (j\omega) + 1} = \frac{K}{1 + j2\lambda T\omega - T^2\omega^2}.$$

Временно обозначим  $\Xi = 1 - T^2\omega^2$ ; в таком случае

$$K(j\omega) = \frac{K}{\Xi + j2\lambda T\omega} = \frac{K(\Xi - j2\lambda T\omega)}{(\Xi + j2\lambda T\omega)(\Xi - j2\lambda T\omega)} = \frac{K(\Xi - j2\lambda T\omega)}{\Xi^2 + (2\lambda T\omega)^2};$$

$$K(j\omega) = \frac{K(1 - T^2\omega^2 - j2\lambda T\omega)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2} = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2} - j \frac{2K\lambda T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2}.$$

Здесь  $a_1 = \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2}$ ;  $a_2 = - \frac{2K\lambda T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2}$ .

Амплитудная частотная характеристика  $K(\omega) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ;

$$K(\omega) = \sqrt{\left[ \frac{K(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2} \right]^2 + \left[ - \frac{2K\lambda T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\lambda T\omega)^2} \right]^2};$$

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{K^2 [(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2]}{[(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2]^2}},$$

$$K(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2}}.$$

Фазовая частотная характеристика (рис. 6.7, е):

$$\zeta(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1} = \operatorname{arctg} \frac{-2\lambda T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)} = -\operatorname{arctg} \frac{2\lambda T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)}. \quad (6.17)$$

Амплитудно-фазовую частотную характеристику колебательного звена можно записать в показательной форме

$$K(j\omega) = K(\omega) e^{j\zeta(\omega)} = \left( \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2}} \right) e^{-j \operatorname{arctg} \frac{2\lambda T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)}}.$$

Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика для колебательного звена имеет вид:

$$\begin{aligned} \ln K(j\omega) &= \ln K - \ln \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2} - \\ &- j \operatorname{arctg} \frac{2\lambda T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)} \ln e. \end{aligned}$$

Логарифмическую амплитудную характеристику найдем, пользуясь тем, что  $L(\omega) = 20 \lg K(\omega)$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2}} = \\ &= 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2}. \end{aligned}$$

При  $K = 1$ ;  $20 \lg K = 0$

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\lambda T \omega)^2}. \quad (6.18)$$

Для анализа сделаем такие допущения:

1) При очень низких частотах  $\omega \ll 1/T$  в уравнении (6.18) можно пренебречь членами, содержащими  $\omega T$ ; в таком случае  $L(\omega) = 0$ .

2) На высоких частотах при  $\omega \gg 1/T$  следует считаться только с членом  $T^4 \omega^4$ ; в таком случае  $L(\omega) = -20 \lg T^2 \omega^2$ ;  $L(\omega) = -20 \lg (T\omega)^2 = -40 \lg T\omega$ . Следовательно, на высоких частотах ЛАХ имеет наклон  $-40$  дБ/дек.

Частота сопряжения обеих ветвей характеристики будет при  $\omega = 1/T$ ; при этом  $K(\omega) = 1/(2\lambda)$  и  $L(\omega) = -20 \lg 2\lambda$ . Таким образом, зная значение затухания  $2\lambda$ , можно найти положение характеристики в районе  $\omega = 1/T$ .

Возможны такие случаи:

$2\lambda = 1$ , то  $L(\omega) = 0$ ; кривая приподнимается над осью абсцисс, пересекает ее при частоте  $\omega = 1/T$  (рис. 6.7, д);

$2\lambda > 1$ , то  $L(\omega) < 0$ ; кривая пройдет под осью абсцисс в точке  $\omega = 1/T$  (рис. 6.7, б);  $2\lambda < 1$ , то  $L(\omega) > 0$ ; кривая на частоте сопряжения пойдет вверх над осью абсцисс (рис. 6.7, в);

Кривую логарифмической фазовой характеристики можно определить при анализе уравнения (6.17).

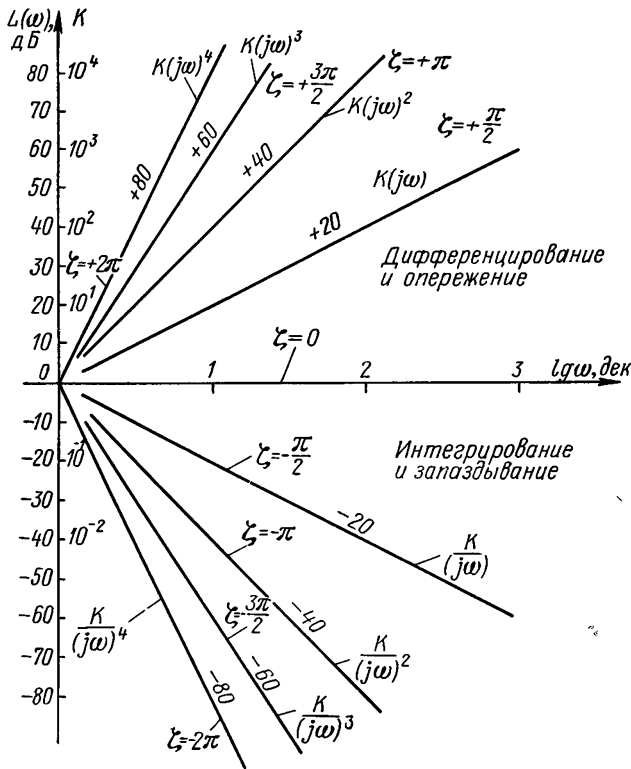


Рис. 6.8. К построению ЛЧХ систем; наклоны, соответствующие ЛЧХ разных звеньев

Возможны такие случаи: при низких частотах, можно принять  $\omega T \approx 0$ , тогда  $\zeta = 0$ ; на частоте сопряжения, когда  $\omega = 1/T$ , то  $\zeta = -\text{arctg } \infty = -\pi/2$ ; на высоких частотах при  $\omega T \gg 1$ , то  $\zeta = -\text{arctg } 0 = -\pi$ ; это наибольший сдвиг фаз, создаваемый колебательным звеном.

Вернемся к уравнению (6.16); если отсутствует затухание, то  $\lambda = 0$  и  $K(p) = K/(T^2 p^2 + 1)$ ; это дифференциальное уравнение гармонических незатухающих колебаний с постоянной амплитудой.

На рис. 6.8 показаны наклоны типовых ЛАХ в децибелах на декаду и фазовые углы в градусах. Член  $j\omega$  в знаменателе передаточной функции соответствуют интегрированию, член  $j\omega$

в числителе соответствует дифференцированию. При синусоидальной входной величине интегрирование приводит к фазовому запаздыванию в системе, а дифференцирование — к опережению фазы.

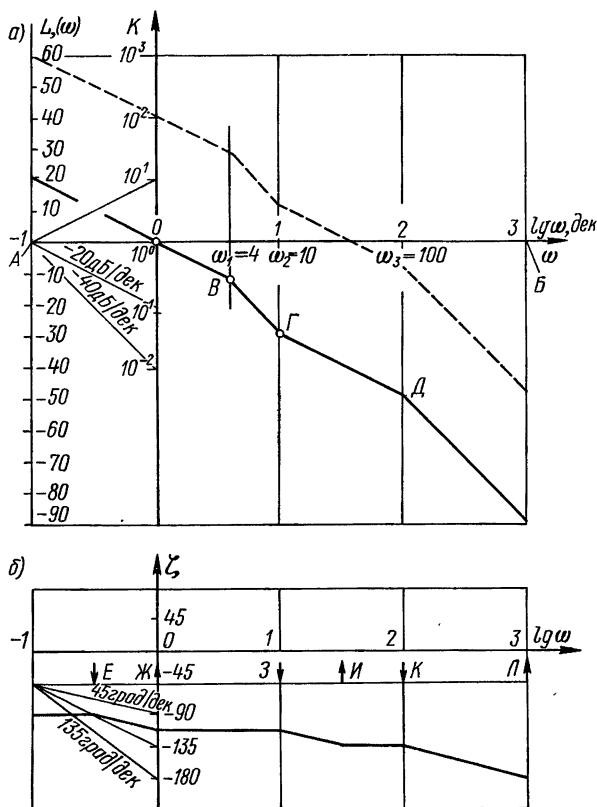


Рис. 6.9. ЛЧХ сложной динамической системы

**Соединение нескольких звеньев динамической системы.** Рассмотрим построение ЛАХ и ЛФХ системы, состоящей из пяти основных механических звеньев: безынерционного, форсирующего, интегрирующего и двух инерционных.

Общая комплексная передаточная функция системы

$$K(j\omega) = \frac{K(j\omega T_2 + 1)}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_3 + 1)}.$$

Возьмем постоянные времени звеньев системы

$$T_1 = 0,25 \text{ с}, T_2 = 0,1 \text{ с}, T_3 = 0,01 \text{ с}.$$

Определим частоты сопряжений

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ 1/с}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ 1/с};$$

$\omega_3 = 1/T_3 = 1/0,01 = 100$  1/с. Расположим последовательно эти частоты на графике (рис. 6.9, а)  $\omega_1 = 4$  1/с — первая частота сопряжений,  $\omega_2 = 10$  1/с — вторая частота сопряжения,  $\omega_3 = 100$  1/с — третья частота сопряжений.

Построение графика выполняется следующим образом: на горизонтальной линии  $AB$  от точки  $O$  вправо откладываем величины декад [расстояния (01), (12), (23), (0, —1)]; на них откладываем в логарифмическом масштабе значения для чисел 2; 3; 4; 5; 8. Это будет ось  $\lg \omega$ . Через точку  $O$  проводим вертикальную линию — ось  $K$  и на ней откладываем равные отрезки в децибелах. Вверх от начала координат плюс 10; 20; 30 дБ; вниз — минус 10; 20; 30; 40; 50; 60. Все эти отмеченные точки соединяем с точкой с координатами —1; 0. Образованное семейство прямых линий показывает наклон в децибелах на декаду. В дальнейшем, проводя на основном графике требуемые линии, параллельные соответственным линиям построенного семейства, получаем требуемый график для ЛАХ. Первой линией от точки  $O$  проведем с наклоном —20 дБ/дек линию для интегрирующего звена до пересечения с линией  $\omega_1 = 4$  1/с; это будет точка  $B$ . Начиная от точки  $B$  под воздействием первого инерционного звена наклон характеристики возрастет до —40 дБ/дек; с таким наклоном линия пройдет до пересечения с линией  $\omega_2 = 10$  1/с; это будет точка  $Г$ . Далее под воздействием форсирующего звена наклон характеристики замедлится и будет составлять —20 дБ/дек; с таким наклоном линия пройдет до пересечения с линией  $\omega_3 = 100$  1/с; это будет точка  $Д$ . Последним будет второе инерционное звено, характеристика которого будет иметь наклон —40 дБ/дек. Похожим образом строится и приближенная ЛФХ. При этом необходимо предварительно найти точки излома приближенной характеристики. Эти точки удалены на декаду вправо и влево от частот сопряжения. Они обозначаются стрелками, перпендикулярными оси абсцисс и имеющими направление вниз, если в данной точке с ростом частоты наклон характеристики возрастает, и вверх, если он убывает (рис. 6.9, б).

Таковыми точками для инерционных звеньев будут соответственно  $E$  и  $И$  для одного и  $З$  и  $Л$  — для другого, а для форсирующего —  $Ж$  и  $К$ . Дальнейшее построение не вызывает каких-либо трудностей.

На начальном участке (до точки  $E$ ) сдвиг фаз будет определяться только наличием интегрирующего звена и будет равен —90°. Характеристика пойдет без наклона. В точке  $E$  за декаду до  $\omega_1$  наклон ЛФХ изменится, увеличившись на 45 град/дек за счет воздействия первого инерционного звена. С наклоном —45 град/дек характеристика пойдет до точки  $Ж$ . В этой точке, отстоящей на декаду от  $\omega_2$ , под воздействием форсирующего звена наклон ЛФХ уменьшится на 45 град/дек и характеристика опять пойдет без наклона. Дальнейшее построение характеристики произведем чисто формально, принимая во внимание лишь стрелки,



проставленные ранее у оси абсцисс. В точке *З* наклон возрастет на 45 град/дек, в точке *И* — уменьшится, в точке *К* — опять возрастет и, наконец, в точке *Л* — опять уменьшится. Далее ЛФХ пойдет параллельно оси абсцисс и сдвиг фаз будет оставаться постоянным и равным  $-180^\circ$ . Этого следовало ожидать, так как интегрирующее и два инерционных звена создадут максимальный суммарный сдвиг фаз в  $-270^\circ$ , а форсирующее  $+90^\circ$ .

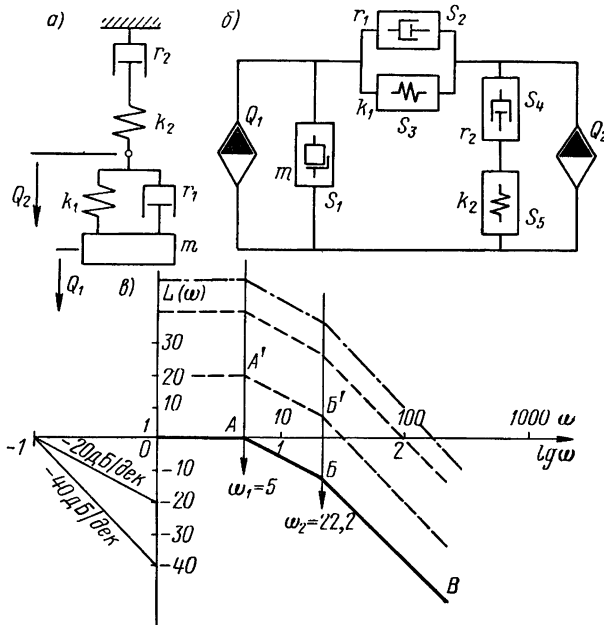


Рис. 6.10. ЛЧХ сложной динамической системы

В зависимости от установленного в системе усиления следует сместить ось абсцисс графика ЛАХ на величину  $20 \lg K$  и уже от этой оси производить отсчет усиления.

**Пример 2.** Найти ЛАХ для динамической системы (рис. 6.10, а), механическая цепь которой изображена на рис. 6.10, б.

По характеру механической цепи имеем для сопротивлений  $S_1, S_2, S_3$  колебательное звено, а для сопротивлений  $S_4, S_5$  — инерционное звено. Общая комплексная передаточная функция будет иметь вид:

$$K(j\omega) = \frac{1}{[1 - j2\lambda T_2\omega + (j\omega)^2 T_2^2] (1 + j\omega T_1)};$$

$$K(j\omega) = \frac{1}{(1 - j2\lambda T_2\omega - \omega^2 T_2^2) (1 + j\omega T_1)}.$$

Пусть  $m = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м;  $k_1 = 1000$  кгс/м;  $k_2 = 500$  кгс/м;  $r_1 = 50$  кгс·с/м;  $r_2 = 100$  кгс·с/м.

Постоянные времени звеньев определим так:  $\omega_c^2 = k_1/m = 1000/2 = 500$ ;  $\omega_2 = \omega_c = 22,2$  1/с;  $r_1/m = 2\lambda\omega_c$ ;  $\lambda = r_1/(2m\omega_c) = 50/(2 \cdot 2 \cdot 22,2) = 0,56$ ;  $T_2 = 1/\omega_2 = 1/22,2 = 0,045$  с;  $T_1 = r_2/k_2 = 100/500 = 0,2$  с.

На рис. 6.10, *в* от начала координат откладываем по оси  $\lg \omega$  (ось абсцисс)  $\omega_2 = 22,2$  1/с и  $\omega_1 = 1/T_1 = 1/0,2 = 5$  1/с. От точки *O* ведем ЛАХ по линии абсцисс до встречи с линией  $\omega_1 = 5$  1/с; от этой точки проводим наклонную линию  $-20$  дБ/дек, соответствующую инерционному звену, до встречи с линией  $\omega_2 = 22,2$  1/с. От точки *B* встречи проводим линию *BV* колебательного звена под наклоном ( $-40$  дБ/дек). Приближенное значение ЛАХ в окрестностях точки *B* получается путем проведения двух прямых линий  $-20$  и  $-40$  дБ/дек; точная аппроксимация строится в соответствии рис. 6.7, *д*; для этого  $\lambda = 0,56$ .

Перемещение ЛАХ параллельно самой себе вверх или вниз вдоль оси *K* обеспечивает лучшую или худшую устойчивость системы; однако эти вопросы выходят за пределы этой работы.

#### 6.4. КОРРЕКЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Замена отдельных элементов и звеньев в динамической системе заметно преобразует схему механической цепи и последовательность решения задачи. Особенность замены элементов и звеньев (изъятие и введение новых) становится понятнее после рассмотрения динамических характеристик основных механических звеньев и их влияния на происходящие процессы

Рассмотрим динамическую систему (рис. 6.11, *а*) и ее механическую цепь (рис. 6.11, *б*); будем подразумевать наличие элементов сопротивлений включенных параллельно, как в звене  $r - k_3$ .

Случай 1.  $k_5 = 0$ ;  $Q_1 = Q_3 = 0$ . В таком случае (рис. 6.11, *в*) механическую цепь можно представить в виде двух сложных двухполюсников (см. 1.4, рис. 1.13).

Случай 2.  $k_1 = r = 0$ ;  $Q_2 = Q_3 = 0$ . Динамическая система представлена на рис. 6.11, *д*, а ее механическая цепь — на рис. 6.11, *ж*.

Случай 3.  $k_2 = r = 0$ ;  $Q_2 = Q_3 = 0$ . В этом случае образуется симметричная дважды связанная динамическая система и ее механическая цепь, изображенные на рис. 6.11, *в*, *е*.

Случай 4.  $k_1 = k_4 = 0$ ;  $Q_2 = Q_3 = 0$ . В этой системе (рис. 6.11, *и*) одна ветвь находится под действием силы  $Q_1$ , а начиная от массы  $m_3$ , вторая ветвь  $k_2 - m_2$  находится под кинематическим возбуждением (под действием скорости от массы  $m_3$ ). Механическая цепь показана на рис. 6.11, *з*.

**Введение корректирующих звеньев и элементов в динамическую систему.** Пусть в механической цепи (рис. 6.12, *а*) будут два сопротивления  $S_1$ ,  $S_3$ , представляющие собой  $S_1$  — входное сопротивление, а  $S_3$  — выходное сопротивление.

Известно, что параметры такой механической цепи при известных  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_3$  будут следующие:

$$S = S_1 + S_3; v = Q/(S_1 + S_3); S = Q/v;$$

$$v_1 = v_3 = Q/(S_1 + S_3) = v; Q_1 = S_1 v_1 = QS_1/(S_1 + S_3);$$

$$Q_3 = S_3 v_3 = QS_3/(S_1 + S_3).$$

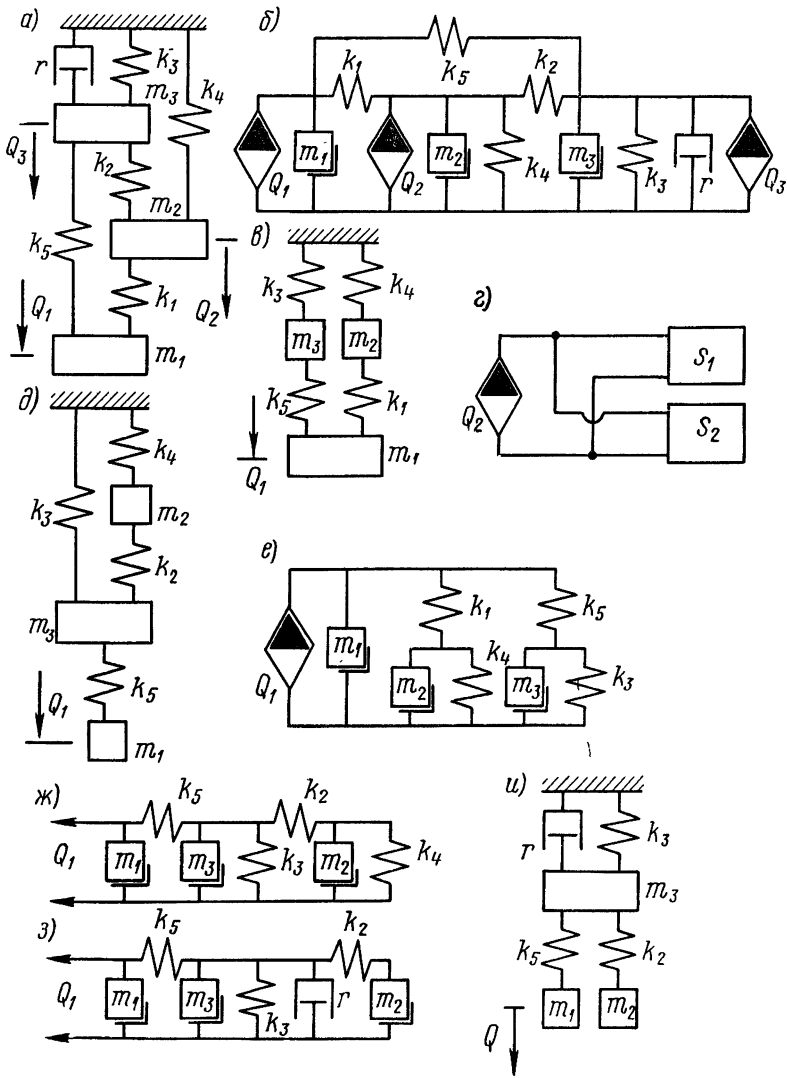


Рис. 6.11. Сложные динамические системы

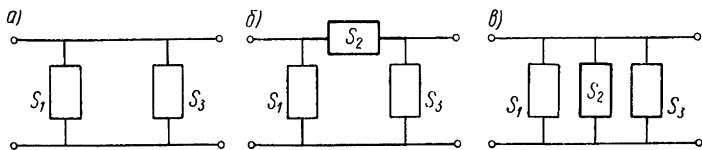


Рис. 6.12. Корригирование динамических систем

При необходимости введения корректирующего звена в простейшем случае возможны два решения (рис. 6.12, б, в).

На рис. 6.12, б изображено введение коррекции в виде сопротивления  $S_2$ , — показанного в общем виде в последовательном соединении с входным сопротивлением  $S_1$  и выходным сопротивлением  $S_3$ .

На рис. 6.12, в изображено введение коррекции также в виде сопротивления  $S_2$ , показанного в общем виде в параллельном соединении с входным сопротивлением  $S_1$  и выходным сопротивлением  $S_3$ .

Для последовательного соединения корректирующего звена параметры механической цепи при известных  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  будут следующие:

$$S_{23} = \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3}; \quad S = S_1 + S_{23} = S_1 + \frac{S_2 S_3}{S_2 + S_3} = \\ = \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_2 + S_3} = \frac{\vartheta}{S_2 + S_3}.$$

Здесь  $\vartheta = S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3$ .

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q(S_2 + S_3)}{\vartheta} = v_1 = v_{23}; \quad Q_1 = S_1 v_1 = \frac{Q S_1 (S_2 + S_3)}{\vartheta}.$$

$$Q_{23} = S_{23} v_{23} = \frac{S_2 S_3}{(S_2 + S_3)} \frac{Q(S_2 + S_3)}{\vartheta} = Q_2 = Q_3 = \frac{Q S_2 S_3}{\vartheta};$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q S_2 S_3}{\vartheta S_2} = \frac{Q S_3}{\vartheta}, \quad v_3 = \frac{Q_3}{S_3} = \frac{Q S_2 S_3}{\vartheta S_3} = \frac{Q S_2}{\vartheta}.$$

Для параллельного соединения корректирующего звена параметры механической цепи при известных  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  будут следующие:  $S = S_1 + S_2 + S_3$ ;

$$v = \frac{Q}{S} = v_1 = v_2 = v_3;$$

$$Q_1 = S_1 v_1; \quad Q_2 = S_2 v_2; \quad Q_3 = S_3 v_3.$$

Если проанализировать возможность введения корректирующих звеньев, то только для массы и упругости существуют следующие варианты (они используются, например, для последовательного соединения; с учетом параллельного соединения эти данные должны быть удвоены): одна масса и одна упругость отдельно — по одному варианту (рис. 6.13, а—з); соединение массы и упругости — четыре варианта (рис. 6.13, д—з). Введение элемента гашения значительно увеличивает возможные варианты: одно сопротивление — один вариант; одно сопротивление и одна масса — четыре варианта; одно сопротивление и одна упругость — четыре варианта. Три элемента в разных сочетаниях дают 17 вариантов. Всего для последовательного соединения теоретически может быть 32 варианта; с учетом параллельного соединения — 64 варианта. Однако ряд вариантов для механических конструкций могут

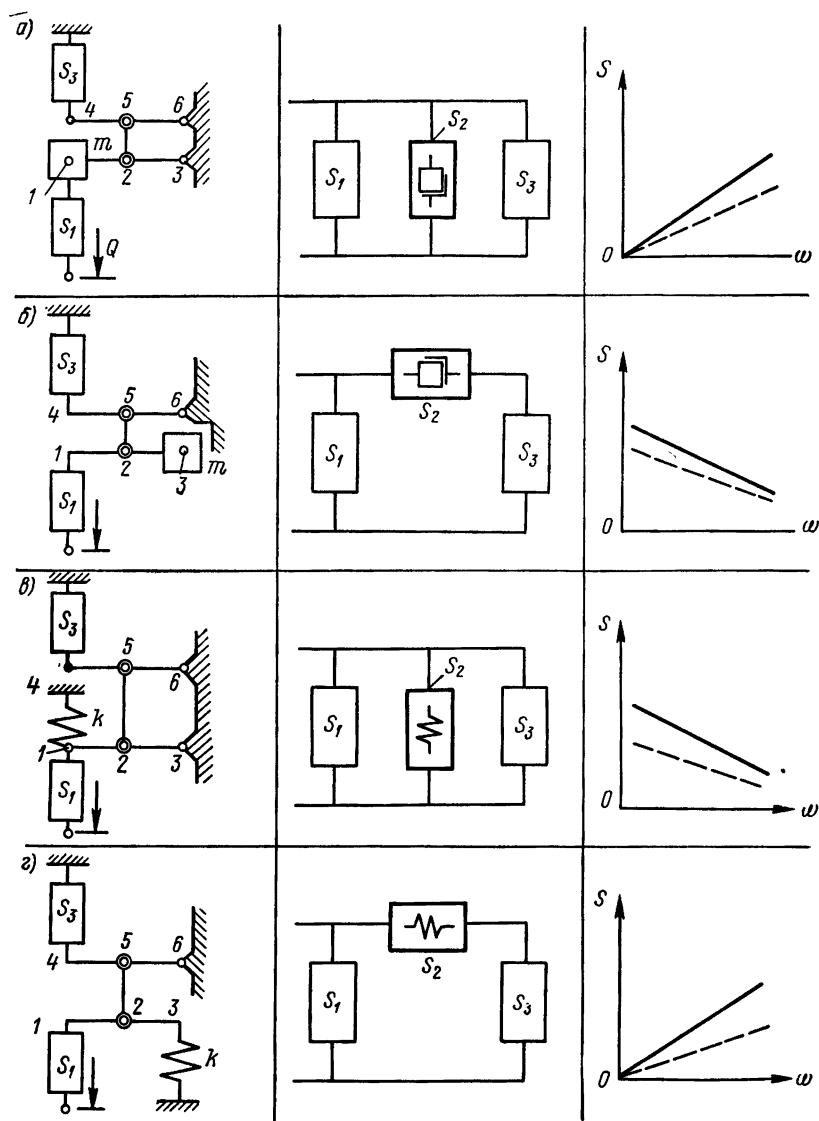
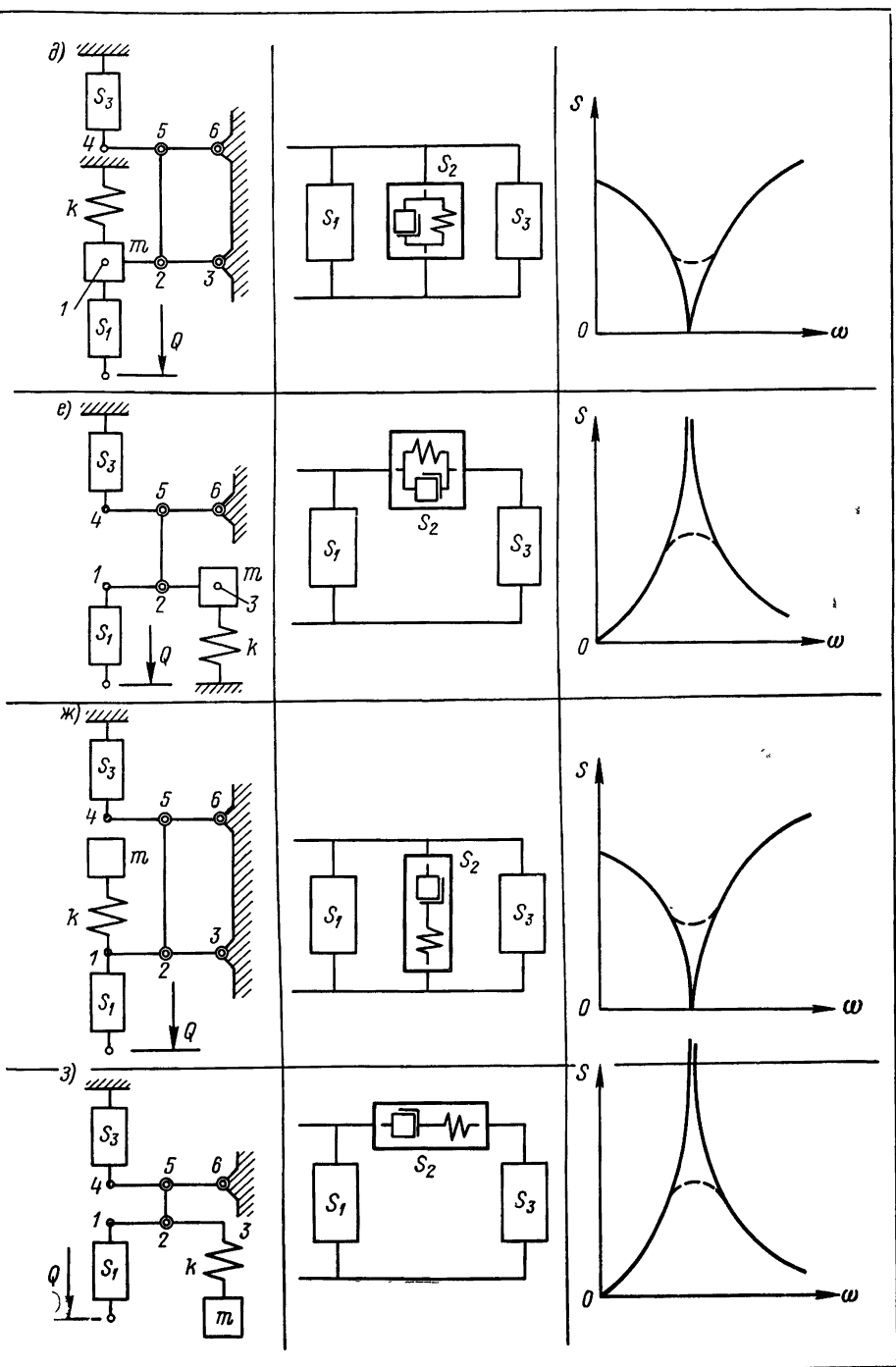


Рис. 6.13. Примеры корригирования:  
 точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 — образующие рычажной системы



не иметь или иметь, но весьма в сложном исполнении, физически реализуемые механические цепи для их дальнейшего преобразования в динамические системы. Линия скругления между ветвями частотных характеристик — следствие влияния элемента сопротивления.

**Ожидаемые результаты от корректирующей цепи.** Рассмотрим рычажную систему (рис. 6.13, а), представляющую собой универсальную модель динамической системы, в которой имеются две группы пассивных элементов  $S_1$  и  $S_3$  под действием внешней силы  $Q(t)$ . При необходимости внесения коррекции в систему ее можно в виде звена пассивных элементов с сопротивлением  $S_2$  вводить или последовательным соединением в точке 3 или параллельным соединением в точке 1.

*Корректирующее звено в виде массы.* Присоединение массы в точке 3 соответствует в механической цепи последовательному соединению (рис. 6.13, б). Если сопротивление массы мало по сравнению с силой  $Q$ , то скорость массы будет большая, а скорость передачи предыдущей нагрузки в точке 4 на сопротивление  $S_2$  меньшая  $v_3 = QS_2/[S_2(S_1 + S_3) + S_1S_3]$ .

Если же сопротивление массы имеет заметную величину, то масса практически остается неподвижной, а скорости перемещения в точках 1 и 4 будут одинаковыми. Передаточная функция будет увеличиваться с частотой, так как сопротивление массы пропорционально частоте. Присоединение массы в точке 1 соответствует в механической цепи параллельному соединению (рис. 6.13, а). Если сопротивление массы мало по сравнению с силой  $Q$ , то увеличение массы вызовет очень небольшое уменьшение скорости, передаваемое на сопротивление  $S_3$   $v_3 = Q/[S_2 + (S_1 + S_3)]$ . Если сопротивление массы имеет большую величину, то масса практически будет неподвижной и скорость, передаваемая на сопротивление  $S_3$ , будет небольшой.

*Корректирующее звено в виде упругости.* Присоединение упругости в точке 3 соответствует в механической цепи последовательному соединению (рис. 6.13, в). При низких частотах скорость упругого элемента будет мала и скорости в точках 1 и 4 будут примерно равными; при высоких частотах скорость упругого элемента будет стремиться гасить перемещение, передаваемое на сопротивление  $S_3$ . Что находит отражение на графике передаточной функции в зависимости от частоты.

Присоединение упругости в точке 1 соответствует параллельному соединению в механической цепи (рис. 6.13, в), когда все скорости в параллельных звеньях  $v_1, v_2, v_3$  одинаковы. При низких частотах скорость на входе упругого элемента небольшая, благодаря чему влияние на перемещение точки 4 скажется незначительно; при больших частотах перемещения точки 4 будут более заметными.

Вывод из сравнения четырех схем включения корректирующих элементов может быть следующий: влияния на изменение

передаточной функции могут быть одинаковыми при включении массы в параллельном или упругости в последовательном соединении и наоборот.

*Корректирующие звенья в виде массы и упругости совместно.* В последовательном соединении (масса и упругость параллельны, и изображены на рис. 6.13, е). При низких частотах влияние упругости будет больше и передаточная функция будет иметь большие значения, при высоких частотах влияние массы будет больше и передаточная функция будет также иметь большие значения; при резонансных частотах будут наименьшие значения передаточной функции, так как в этот момент сила равна нулю;

$$S_2 = j\omega t + k/j\omega.$$

В последовательном соединении (масса и упругость последовательны). В этом случае (рис. 6.13, з) значение передаточной функции будет состоять из двух отрезков соответствующих (рис. 6.13, а, в).

При низких и высоких частотах передаточные функции имеют небольшие значения; при резонансных частотах они достигают наибольших значений.

В параллельном соединении (масса и упругость параллельны) График передаточных функций (рис. 6.13, д) имеет сходство со схемой, когда масса и упругость соединены последовательно, а это звено включено последовательно в механическую цепь.

В параллельном соединении (масса и упругость последовательны). График передаточных функций (рис. 6.13, ж) имеет сходство со схемой, когда масса и упругость соединены параллельно, а это звено включено последовательно в механическую цепь.

Корректирующие звенья с дополнительным включением элемента сопротивления снижают значение передаточной функции, что особенно заметно для звеньев, вызывающих в определенном интервале частот резонансы. На рис. 6.13, а—з эти изменения передаточных функций показаны штриховыми линиями.



## ОСНОВЫ СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### 7.1. СУЩНОСТЬ СИНТЕЗА МЕХАНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Предыдущий материал в большей мере посвящен задачам анализа динамических систем, когда известными величинами являются внешние силы или скорости и собственно динамическая система, а неизвестными величинами являются реактивные силы или скорости, воспринимаемые этой же системой. При этом решение всегда однозначное.

В отличие от этой задачи синтеза являются обратными: в них известны внешние активные, а также реактивные силы или скорости и требуется определить механическую цепь и, на ее основе, динамическую систему и ее параметры. Отличительной особенностью задач синтеза является то, что для них не существует однозначного решения, если вообще такое существует; следовательно, для задач синтеза одним из важных является условие физической реализуемости. Последнее обстоятельство относится к проблеме аппроксимации задаваемых уравнений, к подбору реактивных сил или скоростей, выраженных в виде функций, и поиску из определенного многообразия решений физически реализуемой цепи и системы. Основная идея синтеза линейных механических цепей состоит в реализации такого представления частотных характеристик, при котором каждый член математического выражения характеристики соответствовал бы определенному элементу цепи, а взаимосвязь между этими членами соответствовала бы определенной схеме соединения этих элементов в механической цепи.

Функция  $F(p)$  комплексного переменного  $p = \beta + j\omega$  может быть комплексным сопротивлением  $S(p)$  или комплексной подвижностью  $L(p)$  некоторой пассивной механической цепи с сосредоточенными параметрами, определяющими динамическую систему.

Входное сопротивление  $S(p)$  или подвижность  $L(p)$  обобщаются одним термином «входная функция»  $S(p)$  и могут быть осуществлены в виде механической цепи при условии, что она является дробно-рациональной функцией вида

$$S(p) = H \frac{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}{(p - p_3)(p - p_4) \dots (p - p_m)}. \quad (7.1)$$

При этом  $H = a_n/b_m$  постоянно и представляет собой масштабный коэффициент; все полюсы  $p_m = \beta_m + j\omega_m$  лежат в левой части комплексной полуплоскости, т. е.  $\beta_m \leq 0$ , в том числе могут лежать на мнимой оси, т. е.  $p_m = j\omega_m$ , будучи простыми (не кратными) полюсами; все нули  $p_n = \beta_n + j\omega_n$  входных функций лежат в левой полуплоскости, в том числе могут лежать на мнимой оси.

Основными свойствами входных функций пассивных механических цепей будет положительность коэффициентов  $a_i, b_i$  (4.3); наибольшие степени числителя и знаменателя отличаются только на единицу.

Итак, входное сопротивление механического двухполюсника  $S(p)$ , как функция оператора  $p$ , представляет собой отношение операторного изображения входной силы к операторному изображению входной скорости  $S(p) = Q(p)/v(p)$

**Метод цепных дробей.** Для определения слагающих отношения  $Q(p): v(p)$  или наоборот  $v(p) : Q(p)$  можно воспользоваться теорией цепных или непрерывных дробей, которая изучает специальный алгоритм, являющийся одним из важнейших орудий математики и механики.

В общем виде простейшая цепная дробь имеет вид

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

и называется конечной или, точнее,  $n$ -членной цепной дробью, при этом очевидно, что она имеет  $n + 1$  элементов. Из уравнения (7.1) после алгебраического деления числителя на знаменатель получаем

$$S(p) = a_1 p + Q'(p)/v(p),$$

причем  $Q'(p)/v(p)$  — остаток;  $Q'(p)$  — полином степени  $(2n - 2)$ , а  $v(p)$  — полином степени  $(2n - 1)$ . Возьмем обратную величину остатка и продолжим деление, тогда

$$S(p) = a_1 p + \frac{1}{b_1 p + v'/Q'}$$

причем  $v'$  — многочлен степени  $(2n - 3)$ , т. е. на единицу меньшей степени полинома  $Q'$ .

Продолжая процесс деления дальше, получаем

$$S(p) = a_1 p + \frac{1}{b_1 p + \frac{1}{a_2 p + \frac{1}{b_2 p + \frac{1}{a_3 p + \dots + a_n p + \frac{1}{b_n p}}}}} \quad (7.2)$$

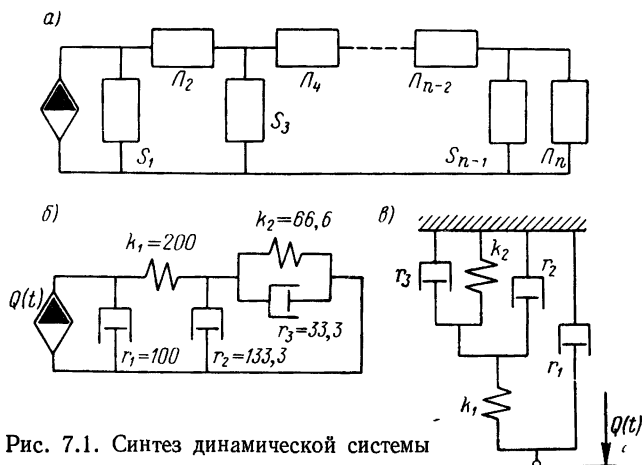


Рис. 7.1. Синтез динамической системы

Такой же вид имеет выражение для входного сопротивления двухполюсника по рис. 7.1, а, имеющего лестничное построение

$$S(p) = S_1 + \frac{1}{L_2 + \frac{1}{S_3 + \frac{1}{L_4 + \frac{1}{S_5 + \frac{1}{L_6}}}}} \quad (7.3)$$

или  $S(p) = S_1 + S_{\Sigma 1}$ ;

$$S_{\Sigma 1} = \frac{1}{\frac{1}{S_2} + S_{\Sigma 2}}; \quad S_{\Sigma 2} = S_3 + S_{\Sigma 3}; \quad S_{\Sigma 3} = \frac{1}{\frac{1}{S_4} + S_{\Sigma 4}}$$

Сравнивая выражения (7.3) и (7.2), получаем  $a_i p = S_i$ ;  $b_i p = L_i$ . Для механической цепи все элементы, включенные параллельно, определяются как прямые сопротивления, а элементы, включенные последовательно, — как обратные сопротивления (или подвижности).

## 7.2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА

Пусть  $S(p) = (p^2 + 6p + 8)/(0,01p^2 + 0,04p + 0,03)$ . Требуется найти динамическую систему и ее параметры.

Для того чтобы понять, какие элементы цепи получаются в результате вычислений, вспомним, что сопротивление массы  $S_m = pt$ , сопротивление упругости  $S_k = k/p$  и сопротивление демфера (сопротивления)  $S_r = r$ . Поэтому коэффициент при умножении на  $p$  есть величина массы с размерностью кгс·с<sup>2</sup>/м, коэффициент при делении на  $p$  есть величина упругости с размерностью кгс/м и коэффициент без использования  $p$  есть величина сопротивления с размерностью кгс·с/м.

Первым шагом разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} p^2 + 6p + 8 & 0,01p^2 + 0,04p + 0,03 \\ \hline p^2 + 4p + 3 & 100 \\ \hline 2p + 5 & \end{array}$$

Следовательно,

$$S(p) = 100 + \frac{2p + 5}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}. \quad (7.4)$$

Поэтому в параллельной цепи (рис. 7.1, б) располагается элемент сопротивления  $S_1 = 100$  кгс·с/м =  $r_1$ .

Вторым шагом из второго члена выражения (7.4) выделим неправильную дробь

$$\frac{2p + 5}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03} = \frac{1}{\frac{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}{2p + 5}}$$

и найдем целую часть

$$\begin{array}{r|l} 0,01p^2 + 0,04p + 0,03 & 2p + 5 \\ \hline 0,01p^2 + 0,025p & 0,005p \\ \hline 0,015p + 0,03 & \end{array}$$

Следовательно,  $L_2 = 0,005p$  или  $\frac{1}{S_2} = \frac{p}{200}$ ;  $S_2 = \frac{200}{p}$ .

Поэтому в последовательной цепи располагается элемент упругости  $S_2 = 200$  кгс/м =  $k_1$ . Выражение

$$S(p) = 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{0,015p + 0,03}{2p + 5}}. \quad (7.5)$$

Третьим шагом из третьего члена выражения (7.5) выделим неправильную дробь

$$\frac{0,015p + 0,03}{2p + 5} = \frac{1}{\frac{2p + 5}{0,015p + 0,03}}$$

и найдем целую часть

$$\begin{array}{r|l} \frac{2p+5}{2p+4} & \frac{0,015p+0,03}{\frac{400}{3}} \\ \hline 1 & \end{array}$$

Следовательно,  $S_3 = 400/3 = 133,3$  кгс·с/м и этот элемент сопротивления располагается в параллельной цепи ( $r_2$ ).

$$S(p) = 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{1}{\frac{400}{3} + \frac{1}{0,015p + 0,03}}}$$

Остаток представлен в виде неправильной дроби

$$\frac{1}{0,015p + 0,03} = \frac{1}{\frac{1}{S_4} + \frac{1}{S_5}}$$

Это означает, что

$$L_4 = \frac{1}{S_4} = 0,015p; \quad S_4 = \frac{1}{0,015p} = \frac{66,6}{p};$$

$$k_2 = 66,6 \text{ кгс/м}; \quad L_5 = \frac{1}{S_5} = 0,03; \quad S_5 = \frac{1}{0,03} = 33,3;$$

$$r_3 = 33,3 \text{ кгс·с/м.}$$

Оба эти элемента  $S_4$  и  $S_5$  соединены параллельно в последовательной цепи, как изображено на рис. 7.1, б. Динамическая система этой цепи изображена на рис. 7.1, в и понятна без пояснений.

Продедаем более сложный пример, в котором необходимо найти динамическую систему и параметры ее по известным комплексной силе  $Q(p) = 1000p^5 + 400p^4 + 340p^3 + 80p^2 + 29p + 2 + 1/2p$  и комплексной скорости  $v(p) = 500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5$ .

Комплексное входное сопротивление будет

$$S(p) = \frac{Q(p)}{v(p)} = \frac{1000p^5 + 400p^4 + 340p^3 + 80p^2 + 29p + 2 + \frac{1}{2p}}{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5}$$

**Первый шаг.** Разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} 1000p^5 + 400p^4 + 340p^3 + 80p^2 + 29p + 2 + \frac{1}{2p} & \frac{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5}{2p} \\ \hline 1000p^5 + 400p^4 + 290p^3 + 60p^2 + 17p & \\ \hline 50p^3 + 20p^2 + 12p + 2 + \frac{1}{2p} & \end{array}$$

Следовательно,

$$S(p) = 2p + \frac{50p^3 + 20p^2 + 12p + 2 + \frac{1}{2p}}{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5} \quad (7.6)$$

Первый член этого выражения  $S_1 = 2p$  показывает, что это сопротивление массы  $m_1 = 2 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}$  и в механической цепи оно находится в параллельном соединении.

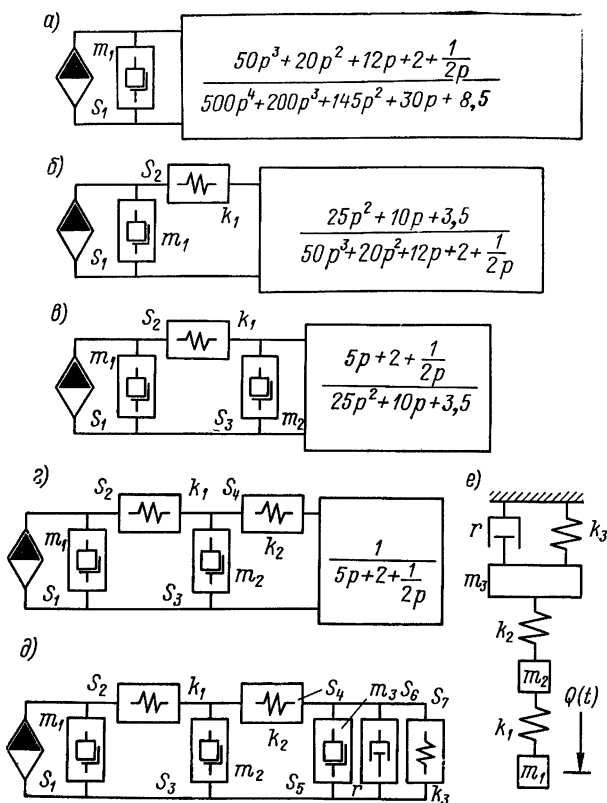


Рис. 7.2. Последовательные операции синтеза

Механическая цепь для первого шага представлена на рис. 7.2, а.

**Второй шаг.** Из выражения (7.6) выделим неправильную дробь и найдем целую ее часть

$$\frac{50p^3 + 20p^2 + 12p + 2 + \frac{1}{2p}}{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5} = \frac{1}{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5} \cdot \frac{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5}{50p^3 + 20p^2 + 12p + 2 + \frac{1}{2p}};$$

$$= \frac{500p^4 + 200p^3 + 145p^2 + 30p + 8,5}{25p^2 + 10p + 3,5} \left| \frac{50p^3 + 20p^2 + 12p + 2 + \frac{1}{2p}}{10p} \right.$$

Следовательно,

$$L_2 = \frac{1}{S_2} = 10\rho; \quad S_2 = \frac{1}{10\rho} = \frac{0,1}{\rho};$$

$$\frac{1}{S_{\Sigma 1}} = \frac{1}{S_2} + \frac{25\rho^2 + 10\rho + 3,5}{50\rho^3 + 20\rho^2 + 12\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}. \quad (7.7)$$

Первый член этого выражения показывает, что это сопротивление  $S_2$  включено последовательно и соответствует элементу упругости  $k_1 = 0,1$  кгс/м. Механическая цепь для второго шага представлена на рис. 7.2, б.

**Третий шаг.** Из выражения (7.7) выделим неправильную дробь и найдем целую ее часть

$$\frac{25\rho^2 + 10\rho + 3,5}{50\rho^3 + 20\rho^2 + 12\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}} = \frac{1}{50\rho^3 + 20\rho^2 + 12\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}};$$

$$\frac{50\rho^3 + 20\rho^2 + 12\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{50\rho^3 + 20\rho^2 + 7\rho} \left| \frac{25\rho^2 + 10\rho + 3,5}{2\rho} \right.$$

$$\frac{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}$$

Следовательно,  $S_3 = 2\rho$ .

$$S_{\Sigma 2} = S_3 + \frac{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{25\rho^2 + 10\rho + 3,5}. \quad (7.8)$$

Первый член этого выражения  $S_3 = 2\rho$  показывает, что это сопротивление массы  $m_2 = 2$  кгс·с<sup>2</sup>/м и в механической цепи включено параллельно. Механическая цепь для третьего шага показана на рис. 7.2, в.

**Четвертый шаг.** Из выражения (7.8) выделим неправильную дробь в третьем члене и найдем целую ее часть.

$$\frac{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{25\rho^2 + 10\rho + 3,5} = \frac{1}{25\rho^2 + 10\rho + 3,5};$$

$$\frac{25\rho^2 + 10\rho + 3,5}{25\rho^2 + 10\rho + 2,5} \left| \frac{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{5\rho} \right.$$

$$\frac{1}{1} \left| \frac{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}{5\rho} \right.$$

Следовательно,

$$L_4 = \frac{1}{S_4} = 5\rho; \quad S_4 = \frac{1}{5\rho} = \frac{0,2}{\rho};$$

$$\frac{1}{S_{\Sigma 3}} = \frac{1}{S_4} + \frac{1}{5\rho + 2 + \frac{1}{2\rho}}. \quad (7.9)$$

Первый член этого выражения показывает, что это сопротивление  $S_4$  включено последовательно и соответствует элементу упругости  $k_2 = 0,2$  кгс/м. Механическая цепь для четвертого элемента показана на рис. 7.2, *г*.

**Пятый шаг.** Из выражения (7.9) возьмем знаменатель, который и соответствует последнему звену цепи: первый член  $S_5$  соответствует массе  $m_3 = 5$  кгс·с<sup>2</sup>/м; второй член  $S_6$  соответствует сопротивлению  $r = 2$  кгс·с/м; третий член  $S_7$  соответствует упругости  $k_3 = 0,5$  кгс/м. Все эти элементы включены в параллельное соединение (рис. 7.2, *д*). Это будет полная механическая цепь, соответствующая заданному комплексному входному сопротивлению. Динамическая система, соответствующая этой механической цепи, показана на рис. 7.2, *е*. Параметры элементов цепи приведены по мере синтеза этой системы.

Рассмотренный способ синтеза динамических систем весьма успешно применяется для механических цепей, имеющих так называемое лестничное построение, когда элементы чередуются в параллельном и последовательном соединении.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Анго А.** Математика для электро- и радиоинженеров. Пер. с фр. М., «Наука», 1964. 772 с.
2. **Атабеков Г. И.** Теория линейных электрических цепей. М., «Советское радио», 1960. 712 с.
3. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Пер. с нем. М., «Наука», 1965. 288 с.
4. **Дружинский И. А.** Методы обработки сложных поверхностей на металло-режущих станках. Изд. 3-е. Л., «Машиностроение», 1965. 600 с.
5. **Жуковский Н. Е.** Аналитическая механика. Л., Госиздат, 1925. 270 с.
6. **Зубков П. И.** Теория электромеханических аналогий.— В кн.: Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах. Пер. с англ. Изд. 3-е. Физматгиз, 1961, с. 408—442.
7. **Кирхгоф Г. Р.** Механика. Пер. с нем. М., Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
8. **Мэнли Р. Дж.** Анализ и обработка записей колебаний. Пер. с англ. М., Машгиз, 1948. 252 с.
9. **Ольсон Г. Ф.** Динамические аналогии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1947. 224 с.
10. **Харкевич А. А.** Электромеханические аналогии. — «Журнал технической физики», 1931, т. 1, вып. 2, с. 136—158.
11. **Харкевич А. А.** Теория электроакустических аппаратов. М., Связьиздат, 1940. 248 с.
12. **Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т.** Механические колебания. Пер. с англ. М., «Машиностроение», 1966. 508 с.
13. **Hecht H.** Schaltschemata und differentialgleichungen elektrischer und mechanischer schwingungsgebilde. Leipzig, J. A. Barth, 1959, S. 176.
14. **Torn R.** The mobility method. — «Machine Design», 1959, N 25, p. 144—157; N 26, p. 104—111.
15. **Jewusiak H., Bigley W.** Mechanical network analysis.— «Machine Design», 1964, N 25, p. 180—183; N 26, p. 182—186; N 27, p. 185—190; N 28, p. 165—171; N 29, p. 159—164.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |            |
|--|------------|
| Условные обозначения . . . . .   | 3          |
| Предисловие . . . . .  | 4          |
| Введение . . . . .   | 6          |
| <b>Глава 1. Построение механических цепей . . . . .</b>  | <b>25</b>  |
| 1.1. Определения и условные обозначения . . . . .  | —          |
| 1.2. Основные теоремы соединения элементов в звенья . . . . .  | 27         |
| 1.3. Построение механических цепей при внешнем воздействии силы или крутящего момента . . . . .                                    | 33         |
| 1.4. Построение механических цепей при внешнем воздействии нескольких одновременно действующих сил или крутящих моментов . . . . . | 40         |
| 1.5. Коррекция динамической системы для вращательного движения и построение механической цепи . . . . .                            | 43         |
| 1.6. Построение механических цепей при внешнем воздействии скорости или ее производных . . . . .                                   | 48         |
| 1.7. Построение механических цепей при одновременном воздействии силы и скорости . . . . .   | 52         |
| 1.8. Построение механических цепей для рычажных динамических систем . . . . .  | 56         |
| <b>Глава 2. Механические двухполюсники . . . . .</b>   | <b>66</b>  |
| 2.1. Определение полных и частных комплексных сопротивлений . . . . .  | —          |
| 2.2. Определение сил и скоростей в системе, звеньях и элементах в общем виде . . . . .   | 71         |
| 2.3. Численные решения основных задач . . . . .  | 77         |
| 2.4. Анализ распределения сил и скоростей в механической цепи и динамической системе . . . . .                                     | 88         |
| 2.5. Одновременное действие двух сил в динамической системе . . . . .  | 90         |
| 2.6. Определение сил и скоростей при воздействии на систему . . . . .  | 94         |
| 2.7. Определение комплексных сопротивлений в непланарных механических цепях . . . . .  | 96         |
| <b>Глава 3. Механические четырехполюсники . . . . .</b>  | <b>104</b> |
| 3.1. Сущность механических четырехполюсников . . . . .   | —          |
| 3.2. Основные уравнения МЧП . . . . .  | 105        |
| 3.3. Первичные параметры МЧП . . . . .   | 111        |
| 3.4. Образование сложных МЧП . . . . .   | 119        |
| 3.5. Матрицы МЧП . . . . .   | 124        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава 4. Частотные характеристики динамических систем . . . . .</b>                              | <b>136</b> |
| 4.1. Нули и полюсы динамических систем . . . . .  | —          |
| 4.2. Частотные характеристики динамической системы, состоящей из одного элемента . . . . .          | 140        |
| 4.3. Частотные характеристики динамической системы, состоящей из двух элементов . . . . .           | 141        |
| 4.4. Частотные характеристики динамической системы, состоящей из трех элементов . . . . .           | 146        |
| 4.5. Частотные характеристики динамической системы, состоящей из четырех элементов . . . . .        | 156        |
| 4.6. Частотные характеристики динамической системы, состоящей из большого числа элементов . . . . . | 162        |
| 4.7. Гашение и возбуждение колебаний . . . . .  | 165        |
| 4.8. Математические выражения процессов затухания . . . . .   | 172        |
| <b>Глава 5. Механические фильтры . . . . .</b>  | <b>174</b> |
| 5.1. Анализ зависимостей МЧП . . . . .  | —          |
| 5.2. Вторичные параметры МЧП . . . . .  | 175        |
| 5.3. Затухание четырехполюсников . . . . .  | 182        |
| 5.4. Основные конструктивные решения и расчеты механических фильтров . . . . .                      | 185        |
| <b>Глава 6. Средства коррекции динамических систем . . . . .</b>                                    | <b>202</b> |
| 6.1. Передаточные функции . . . . .   | —          |
| 6.2. Логарифмические частотные характеристики . . . . .   | 204        |
| 6.3. Динамические характеристики основных механических звеньев . . . . .                            | 205        |
| 6.4. Коррекция механической цепи . . . . .  | 221        |
| <b>Глава 7. Основы синтеза динамических систем с использованием механических цепей . . . . .</b>    | <b>228</b> |
| 7.1. Сущность синтеза механических цепей . . . . .  | —          |
| 7.2. Численные решения элементарных задач синтеза . . . . .   | 231        |
| <b>Список литературы . . . . .</b>  | <b>236</b> |