

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет»

И.Э. Келлер, Д.С. Петухов

# КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

*Утверждено*  
*Редакционно-издательским советом университета*  
*в качестве учебного пособия*

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета  
2020

УДК 539.374  
К 342

**Рецензенты:**

канд. техн. наук *И.Л. Гладкий*  
(ОАО «ОДК-Авиадвигатель»);  
д-р физ.-мат. наук *О.А. Плехов*  
(Институт механики сплошных сред УрО РАН)

**Келлер, И.Э.**

**К 342** Критерии прочности и пластичности: учеб. пособие / И.Э. Келлер, Д.С. Петухов. — Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2020. — 157 с.

**ISBN 978-5-398-02429-6**

Рассматриваются классические и современные феноменологические модели перехода материалов в пластическое или предельное состояние при разнообразных механических воздействиях с учётом анизотропии и зависимости от вида напряженного состояния. Пособие предназначено для постановки задач деформирования и прочности деталей машин, конструкций и сред, в том числе с применением пакетов прикладных программ, и экспериментальной идентификации моделей.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика» (профиль «Динамика и прочность машин»).

УДК 539.374

ISBN 978-5-398-02429-6

© ПНИПУ, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	6
ГЛАВА 1. Критерии прочности и пластичности при статическом нагружении . . . . .	8
1.1 Классические теории прочности . . . . .	8
1.1.1 Теории максимальных напряжений . . . . .	8
1.1.2 Теории максимальных деформаций . . . . .	9
1.1.3 Энергетические теории . . . . .	9
1.1.4 Условия максимальных приведенных напряжений и полной пластичности . . . . .	11
1.2 Анизотропные критерии текучести . . . . .	13
1.2.1 Квадратичный критерий Хилла Hill48 . . . . .	14
1.2.2 Степенной критерий Хилла Hill79 . . . . .	18
1.2.3 Степенной критерий Хилла Hill90 . . . . .	19
1.2.4 Кубичный критерий Хилла Hill93 . . . . .	22
1.2.5 Критерий Барлата Yld89 . . . . .	23
1.2.6 Критерии Yld94 и Yld96 Барлата и критерий Karafillis и Воусе . . . . .	24
1.2.7 Критерий Барлата Yld2000-2d . . . . .	26
1.3 Критерии текучести с зависимостью от среднего напряжения	27
1.3.1 Ранние теории, обобщающие теорию Кулона . . . . .	27
1.3.2 Кэп-модели . . . . .	29
1.3.3 Обобщения функции Хубера – Мизеса . . . . .	31
1.3.4 Функции текучести, зависящие от угла вида . . . . .	33
1.3.5 Неассоциированные законы . . . . .	35
1.4 Законы упрочнения . . . . .	37
1.5 Критерии вязкого разрушения . . . . .	40

1.5.1	Несвязанные модели . . . . .	40
1.5.2	Связанные модели . . . . .	44
1.5.3	Об анизотропной поврежденности . . . . .	47
1.5.4	Учет температуры и скорости деформации . . . . .	47
1.5.5	Метод Марциньяка – Кучинского . . . . .	48
1.6	Задачи к главе 1 . . . . .	53
ГЛАВА 2. Усталостное разрушение . . . . .		58
2.1	Введение . . . . .	59
2.1.1	Факторы усталостного разрушения . . . . .	60
2.1.2	Типы истории нагружения и спектр нагружения . . .	60
2.1.3	Диаграмма Вёлера и типы усталости . . . . .	64
2.1.4	Предел выносливости и диаграмма Хейга(Гудмана) .	69
2.1.5	Разброс усталостной прочности . . . . .	73
2.1.6	О физических основах усталости . . . . .	76
2.2	Линейное суммирование повреждений . . . . .	80
2.2.1	Гипотеза Пальмгрена – Майнера . . . . .	80
2.2.2	Оценка времени жизни на блочном нагружении . . .	80
2.2.3	Сведение к отнулевому циклу . . . . .	82
2.2.4	Методы схематизации истории нагружения . . . . .	89
2.2.5	Модификации гипотезы Пальмгрена – Майнера . . .	96
2.2.6	Критика гипотезы Пальмгрена – Майнера . . . . .	102
2.2.7	Алгоритм оценки времени жизни детали . . . . .	103
2.3	Метод локальной истории деформации . . . . .	105
2.4	Напряжения и деформации в концентраторе напряжений .	107
2.4.1	Упругий случай . . . . .	107
2.4.2	Пластические деформации в концентраторе напряже- ний . . . . .	110
2.5	Усталость при многоосном нагружении . . . . .	112
2.5.1	Пропорциональное многоосное нагружение . . . . .	112

2.5.2	Непропорциональное многоосное нагружение . . . .	118
2.6	Эволюционная модель усталостных повреждений . . . . .	123
2.6.1	Об эволюционных уравнениях накопления повре- ждённости с зависимостью от $D$ . . . . .	127
	Список литературы . . . . .	130
	Предметный указатель . . . . .	152

# ВВЕДЕНИЕ

Адекватные модели деформирования и разрушения материалов необходимы в численных расчетах прогнозирования прочности и ресурса средств транспорта, авиационных и ракетных двигателей, турбин, атомных электростанций, к которым предъявляются высочайшие требования по надежности и безопасности эксплуатации и разработка которых находится в сильно конкурентной среде. В отличие от уравнений состояния упругих тел данные модели обладают большим разнообразием и всегда нелинейны.

Поведение различных материалов в предельных состояниях очень многообразно и зависит от характера механических воздействий. Горные породы, грунты, сыпучие среды, порошки, металлы, керамики, композиционные полимерные и пористые материалы, метаматериалы, выращенные аддитивным производством, подверженные пропорциональному или циклическому нагружению с различными характерными временами воздействий, обеспечивают огромное многообразие сценариев перехода в пластичное состояние или потери несущей способности материала. Соответствующие модели развивались в XVII–XIX веках параллельно с теорией упругости и сопутствующими ей разделами прикладной механики; в 20-х годах XX века уже различали 9 гипотез прочности [1]; к 20-м годам XXI века из этого раздела механики деформируемого твердого тела теория так и не сформировалась. Есть отдельные более или менее богатые аппроксимации предельных точечных многообразий в пространствах напряжений и деформаций, объединенных в группы по учету того или иного параметра нагружения или материала, чаще всего ориентированные на базовые эксперименты и удобство численной реализации. Такому же плану изложения следует настоящее учебное пособие. Предполагается, что параллельно с курсом критериев прочности и пластичности ведется

курс теории пластичности, в котором даются теория и практика решения задач традиционных основных разделов этой дисциплины.

Рукопись представляет собой аналитический обзор классических и современных критериев статической и усталостной прочности и критериев текучести с учетом анизотропии, дилатансии и зависимости от вида напряженного состояния, необходимый для использования в численных расчетах в пакетах прикладных программ механики деформируемого твердого тела, в документации к которым они изложены довольно бегло. Особое внимание уделено вопросам идентификации моделей и требуемым для этого испытаниям. В учебном пособии не затронуты вопросы разрушения тел с концентраторами напряжений, механики хрупкого разрушения, длительной прочности, коррозионной стойкости, износа, традиционные для механика-прочности, которые появятся в следующем издании. В охваченных пособием разделах обзор современных моделей, вероятно, является одним из самых полных и несомненно будет полезным для подготовки студентов.

# ГЛАВА 1. КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

## 1.1 Классические теории прочности

К началу XX века утвердился ряд теорий (гипотез) прочности [1, 2], которые принято разделять на три группы. При дальнейшем изложении полагается общепринятая в прочности и пластичности нумерация главных напряжений  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$  и наименования  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  максимальным, промежуточным и минимальным главными напряжениями. Среднее напряжение будет обозначаться следующим образом:  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ .

### 1.1.1 Теории максимальных напряжений

Первая группа выделяет теории максимальных напряжений. *Первая теория прочности*, восходящая к трактату Галилея 1638 года, связывает разрушение материала с достижением максимальным нормальным напряжением  $\sigma_1$  предельного значения  $\sigma_u$  :

$$\sigma_1 = \sigma_u, \quad (1.1)$$

причем оригинальная формулировка критерия предусматривает различие предельных напряжений при растяжении и сжатии. *Третья теория прочности*, восходящая к трактату Кулона 1773 года, связывает разрушение материала с достижением максимальным касательным напряжением  $\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  предельного значения  $\tau_*$  :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_*. \quad (1.2)$$

Это же условие использовал Треска в 1868 году в качестве критерия пластического течения. Условие (1.2) описывает правильную шестигранную

призму в пространстве главных напряжений, называемую призмой Треска – Кулона. Предел текучести при сдвиге  $\tau_*$  согласно этой теории должен составлять половину предела текучести при одноосном растяжении или сжатии  $\sigma_u$ . Если не учитывать нумерацию главных напряжений, условие (1.2) записывается в виде

$$\tau_m = \frac{1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \tau_*. \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Теории максимальных деформаций

Вторая группа выделяет теории максимальных деформаций. *Вторая теория прочности* восходит к работе Мариотта 1662 года и связывает разрушение материала с достижением максимальным нормальным удлинением  $\epsilon_1$  предельного значения:

$$\epsilon_1 = \epsilon_u, \quad (1.4)$$

где  $\epsilon_u = \sigma_u/E$  — предельное значение на сжатие и растяжение,  $E$  — модуль Юнга. Оригинальная формулировка критерия предусматривает различие предельных напряжений при растяжении и сжатии. Выражая деформации через напряжения с помощью закона Гука, можно переписать (1.4) в напряжениях

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_u, \quad (1.5)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

### 1.1.3 Энергетические теории

Третья группа выделяет энергетические теории. *Четвертая теория прочности* принадлежит Бельтрами, который в 1885 году рассмотрел энергию упругих деформаций в качестве критериальной функции:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_u^2, \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) описывает эллипсоид вращения в пространстве напряжений с центром в его начале координат.

Для того чтобы описать прочность материалов вплоть до очень высоких значений гидростатического давления, Хубер в 1904 году исключил из (1.6) часть, отвечающую за энергию объемной деформации, в результате чего критерий приобрел вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_u^2. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.6) описывает круговой цилиндр в пространстве напряжений с гидростатической осью в качестве оси симметрии, описанный вокруг призмы Треска. Данная теория, связывающая предельное состояние с достижением энергией формоизменения критической величины, имеет название *пятой теории прочности* или теории Хубера – Мизеса. Последним показано, что (1.7) может быть интерпретировано как условие достижения касательного напряжения на «октаэдрической» площадке, равнонаклоненной к главным осям тензора напряжений, критической величины. Предел текучести при сдвиге  $\tau_*$ , согласно этой теории, должен составлять  $1/\sqrt{3}$  предела текучести при одноосном растяжении или сжатии  $\sigma_u$ . Инвариант тензора напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) / 2}$$

носит название эквивалентного напряжения по Мизесу либо (в русскоязычной литературе) интенсивности напряжений. При одноосном растяжении интенсивность напряжений  $\sigma_i = \sigma_1$ , и в момент выполнения критерия (1.7)  $\sigma_1 = \sigma_u$ .

#### 1.1.4 Условия максимальных приведенных напряжений и полной пластичности

Условие максимальных приведенных напряжений (Ишлинского – Ивлева) [3–5]

$$\sigma_1 - \sigma = 2\sigma_u/3, \quad (1.8)$$

также относится к простейшим и описывает правильную шестигранную призму, огибающую цилиндр Хубера – Мизеса. Это условие не зависит от среднего напряжения и может быть записано в виде

$$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 2\sigma_u \quad (1.9)$$

либо

$$\begin{aligned} \sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)/2 = \sigma_u, \quad \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ (\sigma_1 + \sigma_2)/2 - \sigma_3 = \sigma_u, \quad \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

демонстрирующем учет промежуточного главного напряжения ( $\sigma_2$ ), в отличие от критерия Треска (1.2). Согласно этой теории предел текучести при чистом сдвиге должен составлять  $2/3$  предела текучести при одноосном растяжении. Если не учитывать нумерацию главных напряжений, условие (1.8) записывается в виде

$$\max(|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|) = 2\sigma_u/3. \quad (1.11)$$

Условия (1.2) и (1.9) можно встроить в семейство кусочно-линейных функций [6]

$$\begin{aligned} \sigma_1 - (b\sigma_2 + \sigma_3)/(1 + b) = \sigma_u, \quad \sigma_2 \leq (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ (\sigma_1 + b\sigma_2)/(1 + b) - \sigma_3 = \sigma_u, \quad \sigma_2 \geq (\sigma_1 + \sigma_3)/2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Это условие сводится к критерию Треска (1.2) при  $b = 0$  и условию максимальных приведенных напряжений (1.8)–(1.10) при  $b = 1$ . При

$b = (\sqrt{3} - 1)/2$  из него следует критерий Соколовского [7], представляющий собой кусочно-линейную аппроксимацию условия Хубера – Мизеса. Параметр  $b$  в (1.12) зависит от отношения  $\alpha = \tau_*/\sigma_u$  пределов текучести при чистом сдвиге и одноосном растяжении:

$$b = (2\alpha - 1)/(1 - \alpha), \quad \alpha = (1 + b)/(2 + b). \quad (1.13)$$

Отсюда следуют известные отношения  $\alpha$  для критериев Треска и максимальных приведенных напряжений. Экспериментальные значения  $\alpha$  для ряда конструкционных металлических сплавов лежат в пределах  $0,58 - 0,7$  [6, 8].

В 1909 году Хаар и Карман указали, что условие течения на ребре призмы Треска

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_*, \quad (1.14)$$

называемое *условием полной пластичности* и описывающее течение пластических сред и предельное состояние грунтов, обеспечивает статическую определенность пространственной задачи. Напряженное состояние, принадлежащее одновременно двум граням призмы, удовлетворяет двум (а не одному) уравнению.

Более сложные, комбинированные, модели вместе с их обобщениями будут рассмотрены в разделе 1.3.

## 1.2 Анизотропные критерии текучести

В рамках ассоциированного закона пластического течения определяющие уравнения задаются а) скалярной функцией тензора напряжений (называемой функцией текучести), выступающей в качестве потенциала для тензора приращения пластических деформаций, и б) законом трансформации этой функции в зависимости от истории изменения пластических деформаций и текущих значений переменных состояния — температуры, интенсивности скоростей деформации, внутренних микроструктурных переменных (называемого законом упрочнения). Далее будут рассматриваться функции текучести для случая плоского напряженного состояния, имеющие приложения для листовой штамповки, часть которых продолжают на произвольное напряженное состояние. При математическом моделировании процессов обработки пластическими деформациями листовых материалов, полученных прокаткой, важно учесть анизотропию их пластических свойств, что оказывается весьма тонкой и сложной задачей. В оригинальных работах [9–24] предложены различные варианты функций текучести, подходящих для пластически анизотропных листовых металлических материалов. Довольно подробный обзор критериев текучести содержат монографии [25, 26]. Для идентификации критериев текучести обычно проводятся испытания на одноосное растяжение плоских образцов, вырубленных из листового металла под углами  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$  и  $90^\circ$  относительно направления прокатки согласно стандарту ASTM E8 [27]. По данным испытания с  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$ , где  $\sigma_1, \sigma_2$  — главные напряжений в плоскости образца, для каждого из углов ориентации образца определяется напряжение течения  $\sigma_\alpha$ , а также коэффициент анизотропии (коэффициент Ланкфорда)  $r_\alpha = \epsilon_2/\epsilon_3$ , где  $\epsilon_1, \epsilon_2$  — главные деформации в плоскости образца, согласно стандарту [28] (индексом 1 обозначено направление вдоль образца, а 2 и 3 — в попереч-

ном направлении в плоскости образца и нормально к этой плоскости). С учетом того, что в процессах листовой штамповки пластические деформации существенно превышают упругие и условия пластической несжимаемости  $\epsilon_3 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ , для определения коэффициента анизотропии в испытании достаточно измерять продольную и поперечную деформации:  $r_\alpha = -\epsilon_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . Для случая изотропии в плоскости листа данные одноосных испытаний  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}$ , необходимые для описания ортотропных пластических свойств, сводятся к следующей паре констант:  $\sigma_u$  и  $r$ . Для многоконстантных критериев требуется регистрация коэффициента двухосной анизотропии  $r_b = \epsilon_2/\epsilon_1$  в испытании на сжатие диска,  $\sigma_b$  — предела текучести при двухосном растяжении ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ),  $\tau_c$  и  $\tau_n$  — пределов текучести при напряженном состоянии  $\sigma_1 = -\sigma_2$  и ориентации осей анизотропии под углами  $0^\circ$  и  $45^\circ$  к главным осям 1 и 2 тензора напряжений. В случае изотропии в плоскости листа имеем  $\tau_c = \tau_n = \tau_*$ .

Для алюминиевых сплавов регистрируются два тонких эффекта аномального проявления пластической анизотропии [25]. Первый из них наблюдается в случае пластической изотропии в плоскости и заключается в том, что при  $r < 1$  имеет место  $\sigma_b > \sigma_u$  либо при  $r > 1$  выполняется  $\sigma_b < \sigma_u$ , где  $\sigma_b$  напряжение течения, определяемое из эксперимента на двухосное растяжение с  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ . Второй заключается в том, что при  $\sigma_0 = \sigma_{90}$  имеет место  $r_0 \neq r_{90}$ , или при  $\sigma_0 \neq \sigma_{90}$  наблюдается  $r_0 = r_{90}$ . Далее в данной главе принимается

$$\sigma_0 \geq \sigma_{90}. \quad (1.15)$$

### 1.2.1 Квадратичный критерий Хилла Hill48

Для случая плоской ортотропии, оси которой  $x$  (направление прокатки) и  $y$  не совпадают с главными осями тензора напряжений, этот

критерий записывается в виде [9]

$$(G + H) \sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H) \sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1. \quad (1.16)$$

Функция текучести (1.16) содержит четыре независимые константы  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $N$ ; ее выпуклость обеспечивается при

$$F + G > 0, \quad N > 0, \quad FG + GH + HF > 0. \quad (1.17)$$

Эти условия предполагают  $F + H > 0$ ,  $G + H > 0$ , при этом одна из констант  $F$ ,  $G$ ,  $H$  может быть отрицательной. Полагая  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$  равным  $(\sigma_0, 0)$ ,  $(0, \sigma_{90})$ ,  $(\sigma_b, \sigma_b)$ , из (1.16) можно получить выражения

$$\sigma_0 = (G + H)^{-1/2}, \quad \sigma_{90} = (F + H)^{-1/2}, \quad \sigma_b = (F + G)^{-1/2}. \quad (1.18)$$

Из первых двух из них и соглашения (1.15) дополнительно следует  $F \geq G$ . Полагая  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ ,  $\sigma_{xy} = \tau_n$  и  $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \tau_c$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ , из (1.16) также следует

$$\tau_n = (2N)^{-1/2}, \quad \tau_c = (F + G + 4H)^{-1/2}. \quad (1.19)$$

Из закона пластического течения, ассоциированного с функцией (1.16), вытекает

$$r_0 = H/G, \quad r_{90} = H/F, \quad r_{45} = N/(F + G) - 1/2. \quad (1.20)$$

Для определения констант достаточно иметь коэффициенты  $r_0$ ,  $r_{45}$ ,  $r_{90}$  и напряжение течения  $\sigma_\alpha$  для одного любого угла  $\alpha$ . Тогда искомые константы могут быть найдены по следующим формулам, следующим из (1.18), (1.20):

$$H = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{r_0}{1 + r_0}, \quad G = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{1}{1 + r_0}, \quad F = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{r_0}{r_{90}} \frac{1}{1 + r_0}, \quad (1.21)$$

$$N = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\frac{1}{2} + r_{45}}{1 + r_0} \left( 1 + \frac{r_0}{r_{90}} \right).$$

В случае изотропии в плоскости листа критерий (1.16) принимает вид:

$$(r + 1) \sigma_{xx}^2 - 2r \sigma_{xx} \sigma_{yy} + (r + 1) \sigma_{yy}^2 + 2(2r + 1) \sigma_{xy}^2 = \sigma_u^2 \quad (1.22)$$

и содержит только две константы  $r, \sigma_u$ . При  $r = 1$  критерий Hill48 переходит в критерий Мизеса.

К положительным качествам данного критерия следует отнести малое число параметров, простоту экспериментов для их определения, а также простоту математической формулировки и использования в численных расчетах. Однако данный критерий не описывает ни один из аномальных эффектов.

Для обобщения функции текучести (1.16) в следующих разделах будут полезны некоторые ее альтернативные записи. Эта функция может быть записана в следующем виде:

$$\frac{F + G}{4} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + \frac{F + G + 4H}{4} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - \frac{F - G}{2} (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2) + 2N \sigma_{xy}^2 = 1. \quad (1.23)$$

Еще одна запись рассматриваемой функции возможна через главные напряжения и угол  $\alpha$  между первой главной осью напряжений и направлением прокатки  $x$  с помощью подстановки

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha, \quad 2\sigma_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha, \quad (1.24)$$

после которой она примет вид

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{\sigma_b^2}{\tau_n^2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos 2\alpha + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2 2\alpha = (2\sigma_b)^2, \quad (1.25)$$

где  $a = (F - G)/(F + G)$ ,  $b = (F + G + 4H - 2N)/(F + G)$ . Условия устойчивости материала (1.17) эквивалентны неравенству

$$b > a^2 - \frac{\sigma_b^2}{\tau_n^2}. \quad (1.26)$$

Из соглашения (1.15) с учетом выражений (1.18) вытекает условие

$$a \geq 0. \quad (1.27)$$

Из (1.25) можно найти выражение предела текучести  $\sigma_\alpha$  при одноосном растяжении вдоль оси под углом  $\alpha$  к направлению прокатки

$$\frac{4\sigma_b^2}{\sigma_\alpha^2} = 1 + \frac{\sigma_b^2}{\tau_n^2} - 2a \cos 2\alpha + b \cos^2 2\alpha. \quad (1.28)$$

Имея  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$ , можно определить

$$a = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_{90}^2} - \frac{\sigma_b^2}{\sigma_0^2}, \quad b = 2\frac{\sigma_b^2}{\sigma_{90}^2} + 2\frac{\sigma_b^2}{\sigma_0^2} - 4\frac{\sigma_b^2}{\sigma_{45}^2}. \quad (1.29)$$

Располагая  $\tau_n, \tau_c, \sigma_b$ , можно найти

$$b = \frac{\sigma_b^2}{\tau_c^2} - \frac{\sigma_b^2}{\tau_n^2}. \quad (1.30)$$

Функция  $\sigma_\alpha$  имеет стационары на краях отрезка  $\alpha \in [0, \pi/2]$ , монотонно убывая от  $\sigma_0$  до  $\sigma_{90}$  при  $|b| \leq a$  ( $G + 2H \leq N \leq F + 2H$ ). При  $|b| \geq a$  ( $N < G + 2H$  или  $N > F + 2H$ ) у функции  $\sigma_\alpha$  на рассматриваемом отрезке появляется нетривиальный экстремум  $\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{a}{b}$ , который является максимумом, превышающим  $\sigma_0$ , при  $b > a$  ( $N < G + 2H$ ), или минимумом, меньшим  $\sigma_{90}$ , при  $b < -a$  ( $N > G + 2H$ ). Эти варианты анизотропии металлического листа определяют различные случаи развития фестонов («ушей») при вытяжке стакана из листа.

Из ассоциированного с функцией (1.25) закона пластического течения для одноосного растяжения вытекают соотношения

$$1 + 2r_\alpha = \frac{\sigma_b^2/\tau_n^2 - a \cos 2\alpha + b \cos^2 2\alpha}{1 - a \cos 2\alpha}, \quad 2(1 + r_\alpha) = \frac{4\sigma_b^2/\sigma_\alpha^2}{1 - a \cos 2\alpha}, \quad (1.31)$$

из которых следует

$$\frac{r_0}{r_{90}} = \frac{1 + a}{1 - a}, \quad a = \frac{r_0 - r_{90}}{r_0 + r_{90}}, \quad r_b = \frac{1 + a}{1 - a}. \quad (1.32)$$

Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Hill48, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_122.

### 1.2.2 Степенной критерий Хилла Hill79

Обобщение критерия Hill48 с использованием однородной функции степени  $m$  предложено в [10]:

$$f|\sigma_1 - \sigma_2|^m + g|\sigma_2 - \sigma_3|^m + h|\sigma_3 - \sigma_1|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + b|2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m = (2\sigma_b)^m. \quad (1.33)$$

Критерий в пространственной формулировке (1.33) содержит 7 констант (с учетом зависимости  $f, g, h, a, b, c$  и  $\sigma_b$ , а также произвольности показателя степени  $m$ , который должен быть положительным для устойчивости материала). Три последних слагаемых в функции текучести позволяют описать первую аномалию пластической анизотропии листовых металлов. Далее критерий (1.33) будет рассмотрен для случая изотропии в плоскости первых двух главных напряжений, для которого  $f = g$ ,  $a = b$ . Для плоского напряженного состояния  $\sigma_3 = 0$ , и последовательно полагая  $(\sigma_1, \sigma_2)$  равным  $(\sigma_u, 0)$  и  $(\sigma_b, \sigma_b)$ , получим

$$\frac{\sigma_b^m}{\sigma_u^m} = \frac{(2^m + 1)a + c + f + h}{2a + 2^m c + 2f}. \quad (1.34)$$

Из соотношений пластического течения, ассоциированных с функцией (1.33) в рассматриваемых ограничениях, следует

$$r = \frac{(2^{m-1} + 2)a - c + h}{(2^{m-1} - 1)a + 2c + f}. \quad (1.35)$$

Преобразовывая (1.34) и (1.35), получаем соотношение

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^m = \frac{1}{2}(1 + r) \left(1 + \frac{(2^{m-1} - 2)(a - c)}{a + 2^{m-1}c + f}\right), \quad (1.36)$$

из которого следует, что аномалия первого типа пропадает, если  $a = b = c$  или  $m = 2$ . Эта аномалия также исчезает при  $f = g = h = 0$ , когда имеют место  $r > 1$ ,  $\sigma_b/\sigma_u > 1$  при  $a > c$  или  $r < 1$ ,  $\sigma_b/\sigma_u < 1$  при  $a < c$ .

Анализ (1.36) позволил Хиллу выделить четыре простейших частных случая функции текучести (1.33), при которых описывается аномалия:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & c|\sigma_1 + \sigma_2|^m + f(|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) = (2\sigma_b)^m; \\
 b) \quad & a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^m + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m) + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m = (2\sigma_b)^2; \\
 c) \quad & a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^m + |2\sigma_2 - \sigma_1|^m) + f(|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) = (2\sigma_b)^2; \\
 d) \quad & c|\sigma_1 + \sigma_2|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m = (2\sigma_b)^2.
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Критерий (d) может быть переписан в терминах трех параметров, измеряемых в испытаниях,

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + (1 + 2r)|\sigma_1 - \sigma_2|^m = 2(1 + r)\sigma_u^m \tag{1.38}$$

или

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + \frac{\sigma_b^2}{\tau_n^2}|\sigma_1 - \sigma_2|^m = (2\sigma_b)^m. \tag{1.39}$$

Из (1.39) следует соотношение

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^m = \frac{1 + r}{2^{m-1}}, \tag{1.40}$$

способное описывать аномалию первого типа, поскольку возможно  $2^{m-1} > 1 + r$ , если  $r > 1$  или  $2^{m-1} < 1 + r$  при  $r < 1$ .

### 1.2.3 Степенной критерий Хилла Hill90

Другое степенное обобщение критерия Hill48 предложено в [12]. В качестве прототипа рассмотрено условие Hill79 для листового материала с изотропией в плоскости листа в форме (1.39), содержащее три константы  $\sigma_b$ ,  $\tau_n^2$ ,  $m$ .

Критерий Hill90 является однородной функцией степени  $m$

$$\begin{aligned}
 & |\sigma_1 + \sigma_2|^m + \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m}|\sigma_1 - \sigma_2|^m + \\
 & + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{\frac{m}{2}-1}(-2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos 2\alpha) \cos 2\alpha = (2\sigma_b)^m \tag{1.41}
 \end{aligned}$$

и содержит 5 констант  $\sigma_b, \tau_n, a, b, m$ . При  $m = 2$  он сводится к критерию Hill48 (1.25), а при  $\alpha = \pi/4$  либо  $a = b = 0$  — к критерию Hill79 (1.39). Условия устойчивости материала (1.26) остаются в силе при любом  $m > 1$ . В осях ортотропии рассматриваемая функция принимает вид

$$|\sigma_{xx} + \sigma_{yy}|^m + \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m} |\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m + |\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2|^{\frac{m}{2}-1} (-2a(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2) + b(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2) = (2\sigma_b)^m. \quad (1.42)$$

Выражение предела текучести  $\sigma_\alpha$  при одноосном растяжении вдоль оси под углом  $\alpha$  к направлению прокатки, при котором компоненты главных напряжений равны  $(\sigma_\alpha, 0)$ , принимает вид

$$\frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_\alpha^m} = 1 + \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m} - 2a \cos 2\alpha + b \cos^2 2\alpha. \quad (1.43)$$

Из него, располагая  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$ , можно выразить константы

$$4a = \frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_{90}^m} - \frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_0^m}, \quad 2b = \frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_0^m} + \frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_{90}^m} - \frac{2^{m+1} \sigma_b^m}{\sigma_{45}^m}. \quad (1.44)$$

Если известны  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_{45}$ , эти же константы определяются следующим образом:

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{45}^m}{\sigma_{90}^m} - \frac{\sigma_{45}^m}{\sigma_0^m} \right) (1 + r_{45}), \quad b = \left( \frac{\sigma_{45}^m}{\sigma_0^m} + \frac{\sigma_{45}^m}{\sigma_{90}^m} - 2 \right) (1 + r_{45}). \quad (1.45)$$

Располагая  $\tau_n, \tau_c, \sigma_b$ , можно найти

$$b = 2^{\frac{m}{2}-1} \left( \frac{\sigma_b^m}{\tau_c^m} - \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m} \right). \quad (1.46)$$

Условие устойчивости материала принимает вид

$$b > a^2 - \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m}. \quad (1.47)$$

Экстремумы функции  $\sigma_\alpha$  на отрезке  $\alpha \in [0, \pi/2]$  так же определяются константами  $a, b$ , как аналогичная функция критерия Hill48.

Из ассоциированного с функцией (1.41) закона пластического течения для одноосного растяжения вытекают соотношения

$$1+2r_\alpha = \frac{\sigma_b^m/\tau_n^m - a \cos 2\alpha + \frac{m+2}{2m}b \cos^2 2\alpha}{1 - a \cos 2\alpha + \frac{m-2}{2m}b \cos^2 2\alpha}, \quad (1.48)$$

$$2(1 + r_\alpha) = \frac{2^m \sigma_b^m / \sigma_\alpha^m}{1 - a \cos 2\alpha + \frac{m-2}{2m}b \cos^2 2\alpha},$$

из которых следует

$$a = \frac{(r_0 - r_{90})(1 - \frac{m-2}{2}r_{45})}{r_0 + r_{90} - (m-2)r_0r_{90}}, \quad b = \frac{m(2r_0r_{90} - r_{45}(r_0 + r_{90}))}{r_0 + r_{90} - (m-2)r_0r_{90}} \quad (1.49)$$

и

$$1 + 2r_{45} = \frac{\sigma_b^m}{\tau_n^m}, \quad 2(1 + r_{45}) = \frac{2\sigma_b^m}{\sigma_{45}^m}, \quad r_b = \frac{2^{\frac{m}{2}-1} + \frac{2a}{m}}{2^{\frac{m}{2}-1} - \frac{2a}{m}}. \quad (1.50)$$

Записанные формулы позволяют выбирать различные системы базовых экспериментальных параметров для нахождения материальных констант, однако модель не позволяет одновременно удовлетворить более чем пяти из них (например  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}$ ).

Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Hill90, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_243.

Шестиконстантное обобщение функции Hill90 предложено Lin и Ding [15]

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + (1 + 2R)|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{\frac{m}{2}-1}(-2a(|\sigma_1|^s - |\sigma_2|^s) + b|\sigma_1 - \sigma_2|^s \cos 2\alpha) \cos 2\alpha = (2\sigma_b)^m. \quad (1.51)$$

Функция (1.51) не является однородной. Константы  $a, b$  определяются выражениями (1.44) с учетом

$$2(1 + R) = \frac{2^m \sigma_b^m}{\sigma_{45}^m}, \quad (1.52)$$

а показатель степени выражается как

$$s = \frac{m((b - 2a)r_0 + 2(r_0 - r_{45}))}{(1 + r_0)b}. \quad (1.53)$$

Для идентификации модели требуется шесть параметров  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, \sigma_b$ , определяемых из трех испытаний на одноосное растяжение и одного — на двухосное растяжение.

Леасок в [14] предложил семиконстантное обобщение функции Hill90, остающееся однородной функцией степени  $m$  :

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + A^m |\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{\frac{m}{2} - 2} ((\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(H(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + I(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos 2\alpha) + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 (J(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + K(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos 2\alpha) \cos 2\alpha) = (2\sigma_b)^m, \quad (1.54)$$

параметры которого  $A, H, I, J, K, m, \sigma_b$  определяются по экспериментальным данным  $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, r_0, r_{45}, r_{90}, \sigma_b$ .

#### 1.2.4 Кубичный критерий Хилла Hill93

В случае совпадения главных осей тензора напряжений и осей ортотропии этот критерий записывается в виде [13]

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} + \left( c - \frac{p\sigma_1 + q\sigma_2}{\sigma_b} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_0\sigma_{90}} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{90}^2} = 1. \quad (1.55)$$

Для определения пяти констант необходимо знать величины  $\sigma_0, \sigma_{90}, r_0, r_{90}, \sigma_b$ . Тогда

$$p = \frac{\sigma_0\sigma_{90}\sigma_b}{\sigma_b\sigma_0 + \sigma_b\sigma_{90} - \sigma_0\sigma_{90}} \cdot \left( \frac{2r_0(\sigma_b - \sigma_{90})}{\sigma_0^2(1 + r_0)} - \frac{2r_{90}\sigma_b}{\sigma_{90}^2(1 + r_{90})} + \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma_{90}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} - \frac{\sigma_0\sigma_{90}}{\sigma_b^2} \right) \right), \quad (1.56)$$

$$q = \frac{\sigma_0\sigma_{90}\sigma_b}{\sigma_b\sigma_0 + \sigma_b\sigma_{90} - \sigma_0\sigma_{90}} \cdot \left( \frac{2r_{90}(\sigma_b - \sigma_0)}{\sigma_{90}^2(1 + r_{90})} - \frac{2r_0\sigma_b}{\sigma_0^2(1 + r_0)} + \frac{1}{\sigma_{90}} \left( \frac{\sigma_{90}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} - \frac{\sigma_0\sigma_{90}}{\sigma_b^2} \right) \right), \quad (1.57)$$

$$c = p + q + \frac{\sigma_0\sigma_{90}}{\sigma_b^2} - \frac{\sigma_0}{\sigma_{90}} - \frac{\sigma_{90}}{\sigma_0}, \quad (1.58)$$

где  $p, q$  — произвольные константы.

Данный критерий при сравнительно небольшом числе параметров аппроксимирует обе аномалии пластического поведения листовых анизотропных металлов. Однако неоднородность критерия по компонентам тензора напряжений и формулировка его в главных осях этого тензора лимитирует его применение в приложениях.

### 1.2.5 Критерий Барлата Yld89

Для случая плоской ортотропии критерий Барлата Yld89 записывается в форме [16]

$$a |X_1 + X_2|^m + a |X_1 - X_2|^m + (2 - a) |2X_2|^m = 2\sigma_0^m, \quad (1.59)$$

$$X_1 = \frac{\sigma_x + h\sigma_y}{2}, \quad X_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - h\sigma_y}{2}\right)^2 + p^2\sigma_{xy}^2}. \quad (1.60)$$

Показатель степени  $m$  в (1.59) полагается равным 6 для поликристаллов с ОЦК-решеткой и 8 — с ГЦК-решеткой, что заимствовано из работы Хосфорда 1979 года [17], автор которой предложил критерий

$$g|\sigma_1|^m + f|\sigma_2|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m = \sigma_b^m \quad (1.61)$$

с  $f + g = 1$ ,  $f, g, h > 0$ .

Как и (1.16), критерий (1.59)–(1.60) имеет четыре параметра  $a, h, p, \sigma_0$ , которые можно определить из трех экспериментов на одноосное растяжение, в которых необходимо измерить  $r_0, r_{45}, r_{90}, \sigma_0$ . Тогда

$$a = 2 - 2\sqrt{\frac{r_0 r_{90}}{(1 + r_0)(1 + r_{90})}}, \quad h = \sqrt{\frac{r_0(1 + r_{90})}{r_{90}(1 + r_0)}} \quad (1.62)$$

Параметр  $p$  необходимо выразить какими-либо приближенным методом из соотношения  $r_{45} = 2m\sigma_0^m / (\partial F / \partial \sigma_x + \partial F / \partial \sigma_y) - 1$ , где  $F$  есть левая часть критерия текучести (1.59).

В случае изотропии в плоскости критерий принимает вид

$$|X_1 + X_2|^m + |X_1 - X_2|^m + 2r |X_2|^m = (1 + r)\sigma_0^m, \quad (1.63)$$

$$X_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad X_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

В отличие от квадратичного критерия Хилла, критерий Yld89 позволяет описать уплощения поверхности текучести, имеющие место для текстурированных металлических поликристаллов. Данный критерий не обладает простыми выражениями ассоциированного закона пластического течения. Для идентификации одного из параметров критерия в случае ортотропии необходимо приближенное решение задачи. При  $r = 1$ ,  $m = 2$  критерий Yld89 переходит в критерий Мизеса.

Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Yld89, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_036.

### 1.2.6 Критерии Yld94 и Yld96 Барлата и критерий Karafillis и Boyce

Однородная шестиконстантная функция Yld94 [19] в пространственной формулировке в случае совпадения главных осей тензора напряжений с осями анизотропии имеет вид

$$\alpha|X_2 - X_3|^m + \beta|X_3 - X_1|^m + \gamma|X_1 - X_2|^m = 2\sigma_0^m, \quad (1.64)$$

где

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2+c_3}{3} & -\frac{c_3}{3} & -\frac{c_2}{3} \\ -\frac{c_3}{3} & \frac{c_1+c_3}{3} & -\frac{c_1}{3} \\ -\frac{c_2}{3} & -\frac{c_1}{3} & \frac{c_1+c_2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}, \quad (1.65)$$

а показатель степени  $m$  определяется так же, как и для Yld89.

Критерий Yld96 [20], предназначенный для плоского напряженного состояния и произвольной ориентации главных осей тензора напряжений относительно осей анизотропии в плоскости листа, имеет ту же

функцию текучести (1.64), компоненты  $X_1, X_2, X_3$  в которой определяются выражениями

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} \left( X_{11} + X_{22} + \sqrt{(X_{11} - X_{22})^2 + 4X_{12}^2} \right), \\ X_2 &= \frac{1}{2} \left( X_{11} + X_{22} - \sqrt{(X_{11} - X_{22})^2 + 4X_{12}^2} \right), \\ X_3 &= -X_1 - X_2 = -X_{11} - X_{22}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

в которых компоненты вспомогательного тензора определяются выражениями

$$\begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{22} \\ X_{33} \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2+c_3}{3} & -\frac{c_3}{3} & -\frac{c_2}{3} & 0 \\ -\frac{c_3}{3} & \frac{c_1+c_3}{3} & -\frac{c_1}{3} & 0 \\ -\frac{c_2}{3} & -\frac{c_1}{3} & \frac{c_1+c_2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.67)$$

Данный критерий имеет семь констант и показатель степени  $m$ , определяемый как для Yld89.

Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Yld96, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_033\_96.

В 1993 году Karafillis и Boyses [23] для плоского напряженного состояния предложили критерий на основе однородной функции степени  $m$  вида

$$(1 - c)\phi_1 + c\frac{3^m}{2^{m-1} + 1}\phi_2 = 2\sigma_u^m, \quad (1.68)$$

где

$$\phi_1 = |X_1 - X_2|^m + |X_2 - X_3|^m + |X_3 - X_1|^m, \quad \phi_2 = |X_1|^m + |X_2|^m + |X_3|^m, \quad (1.69)$$

а компоненты  $X_1, X_2, X_3$  определяются выражениями (1.66), (1.67). Критерий (1.68) содержит пять материальных констант.

### 1.2.7 Критерий Барлата Yld2000-2d

В работе [21] был предложен восьмикoefficientный критерий для случая плоской ортотропии

$$\phi' + \phi'' = 2\sigma_u^m, \quad (1.70)$$

где

$$\phi' = |X'_1 - X'_2|^m, \quad \phi'' = |2X''_2 + X''_1|^m + |2X''_1 + X''_2|^m, \quad (1.71)$$

а

$$\begin{aligned} X'_1 &= \frac{1}{2} \left( X'_{11} + X'_{22} + \sqrt{(X'_{11} - X'_{22})^2 + 4X'^2_{12}} \right), \\ X'_2 &= \frac{1}{2} \left( X'_{11} + X'_{22} - \sqrt{(X'_{11} - X'_{22})^2 + 4X'^2_{12}} \right), \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{Bmatrix} X'_{11} \\ X'_{22} \\ X'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & 0 \\ c'_{21} & c'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X''_{11} \\ X''_{22} \\ X''_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c''_{11} & c''_{12} & 0 \\ c''_{21} & c''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{12} \end{Bmatrix}. \quad (1.73)$$

Критерий Yld2000-2d содержит восемь независимых констант, определяемых из четырех экспериментов на одноосное и двухосное растяжение (дополнительно к набору измерений  $r_0, r_{45}, r_{90}, \sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$  берутся  $r_b$  и  $\sigma_b$ ). Данный критерий не обладает простыми выражениями ассоциированного закона пластического течения. Закон пластического течения, ассоциированный с критерием YLD2003, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_133.

Следует заметить, что критерии Hill48 и Yld2000-2d продолжимы на пространственный случай с условием независимости от среднего напряжения, а Hill93 и Yld89 — не продолжимы из-за отсутствия равноправия по нормальным напряжениям.

### 1.3 Критерии текучести с зависимостью от среднего напряжения

В настоящем разделе рассматриваются условия текучести, зависящие от среднего напряжения. Различные критерии подобного типа характеризуются предельной кривой в полуплоскости  $\{p, s \geq 0\}$ , где  $p = -J_1$ ,  $J_1 = \sigma_{kk}$ ,  $s = \sqrt{J'_2}$ ,  $J'_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - J_1\delta_{ij}$ , называемой диаграммой Бужинского [8, 29, 30].

#### 1.3.1 Ранние теории, обобщающие теорию Кулона

К началу XX века утвердился ряд теорий прочности, одна из которых (третья) связывает предельное состояние с максимальными касательными напряжениями. Учет в рамках данной теории зависимости от среднего напряжения может приводить к различным ее обобщениям.

В 1882 году Мор [31] предложил связать условие скольжения с достижением критического значения максимальным значением линейной комбинации касательного и нормального напряжений на материальной площадке среди всех возможных ее ориентаций (на манер закона трения Кулона [32], предложенного в 1776 году)  $t_{n\tau} - kt_{nn} = c$ , где  $t_{n\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ,  $t_{nn} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичная нормаль к плоскости и единичный вектор в плоскости. Решение данной задачи ведет к критерию Кулона – Мора [33]

$$k \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \sqrt{1 + k^2} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = c, \quad (1.74)$$

где  $c > 0$  называется коэффициентом сцепления,  $k > 0$  — коэффициентом внутреннего трения, который может быть записан [33] через угол внутреннего трения  $\gamma$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \cos \gamma - \sin \gamma \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad k = \operatorname{tg} \gamma, \quad (1.75)$$

или

$$\sigma_1 - a\sigma_3 = 2b, \quad a = \frac{1 - \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad b = \frac{c \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}, \quad (1.76)$$

через инварианты  $s, \sigma = J_1/3$  и параметр Лоде  $\mu = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$

$$\frac{3 - \mu \sin \gamma}{\sqrt{3}(3 + \mu^2) \sin \gamma} s = \sigma + \operatorname{ctg} \gamma \quad (1.77)$$

либо угол вида напряженного состояния  $\vartheta$ ,  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \vartheta = \mu$

$$s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \vartheta - \sin \gamma \sin \vartheta} (\sigma \sin \gamma + c \cos \gamma). \quad (1.78)$$

В пространстве главных напряжений рассматриваемая поверхность текучести представляет собой неправильную шестигранную пирамиду (называемую пирамидой Кулона – Мора). При  $k = 0$  эта поверхность становится правильным шестигранником Треска. При  $k > 0$  ассоциированный с критерием Кулона – Мора закон пластического течения описывает пластическое разрыхление  $\dot{\epsilon}_{kk}^p \propto k > 0$ , обусловленное девиаторной частью напряжений. Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Кулона – Мора, реализован в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_173.

Другое обобщение критерия максимальных касательных напряжений предложил в 1953 году Друкер, который учел в функции Треска линейную зависимость от среднего напряжения, что привело к поверхности текучести в виде правильной шестигранной пирамиды (называемой пирамидой Треска – Кулона).

Условие Друкера и Прагера [34] 1952 года

$$s = \beta + \alpha p, \quad (1.79)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , предназначенное для описания текучести грунтов, полагает предельную линию прямой, пересекающей ось  $s = 0$  в точке  $p < 0$ ,

что позволяет описывать текучесть среды при всестороннем растяжении и любых комбинированных напряженных состояниях, кроме имеющих направления, лежащие между оси всестороннего сжатия и предельной линии, при которых допускается лишь идеальное упругое поведение. В пространстве главных напряжений условие (1.79) задает поверхность правильного кругового конуса с осью  $p$ . В случае плоской деформации условие (1.79) сводится к критерию Кулона – Мора с параметрами  $k = \alpha/\sqrt{1 - 4\alpha^2/3}$ ,  $c = \beta/\sqrt{1 - 4\alpha^2/3}$ . Ассоциированный с этим условием закон пластического течения прогнозирует пластическое разрыхление — рост объемного растяжения  $\dot{\epsilon}_{kk}^p = \alpha \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p / 2}$ , где  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{kk}^p \delta_{ij} / 3$  при росте сдвиговых деформаций. Такое разрыхление есть частное проявление более общего поведения — дилатансии — изменения объема, вызванного простым сдвигом, открытой Рейнольдсом в 1885 году [35, 36]. Если в металлах порообразование наблюдается при многократных циклических нагружениях, то для грунтов это свойство является фундаментальным и проявляется всегда [37]. Закон пластического течения, ассоциированный с критерием Друкера – Прагера, реализован в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT\_193.

### 1.3.2 Кэп-модели

В работе [38] 1959 года Дженике и Шилд предложили замкнуть пирамиду Треска – Кулона плоской «крышкой» (cap – англ.). Согласно их модели в недеформированном состоянии сцепление отсутствовало, но с увеличением гидростатического давления крышка и грани пирамиды раздвигались вдоль гидростатической оси (не изменяя угла трения), обеспечивая появление и рост сцепления. В рамках ассоциированного закона пластического течения точкам на боковой поверхности пирамиды соответствовало разрыхление, на крышке — уплотнение, а на их стыке могла

существовать несжимаемость.

В работе [39] 1957 года Друкер с соавторами для учета пластического уплотнения и более гибкого описания дилатансии (вплоть до ее полного исчезновения) ограничили открытую часть конуса (1.79) параболической крышкой

$$s = \alpha - \delta \exp(-\beta p), \quad s^2/b^2 + (p - c)^2/a^2 = 1, \quad (1.80)$$

где  $\alpha, \beta, \delta, a, b, c$  — положительные константы, в результате чего поверхность текучести приобрела ребро на стыке конуса и крышки. Деформационное упрочнение за счет уплотнения материала при его сжатии описывалось движением крышки в направлении сжимающего среднего напряжения, при этом мерой уплотнения выступала накопленная объемная пластическая деформация. Упругость в модели описывалась обобщенным законом Гука, в котором модули объемной жесткости и сдвига полагались функциями меры уплотнения.

Димаджио, Сандлером с соавторами [40–42] данная двухинвариантная модель кэп-пластичности была существенно усовершенствована. Линия «разрушения» задается уравнением

$$f_1(s, p) = s - F_1(p) = 0, \quad F_1(p) = \alpha + \gamma p - \delta \exp(-\beta p), \quad p < L(\kappa) \quad (1.81)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — положительные константы; уравнение крышки имеет вид

$$f_2(s, p, \kappa) = s - F_2(p, \kappa) = 0, \\ F_2(p, \kappa) = \sqrt{(X - L)^2 - (p - L)^2}/R, \quad L \leq p \leq X \quad (1.82)$$

где  $R$  — константа. В (1.81), (1.82)  $L = L(\kappa)$ ,  $X = X(\kappa)$  — функции параметра упрочнения  $\kappa$ , задающие отрезок на оси  $p$ , на котором располагается крышка,

$$L(\kappa) = \{\kappa, \kappa > 0; 0, \kappa \leq 0\}, \quad X(\kappa) = L(\kappa) + RF_1(L(\kappa)), \quad (1.83)$$

$$\epsilon_v^p = -\omega(1 - \exp(-\chi(X(\kappa) - X_0))), \quad \epsilon_v^p = \int_0^t \dot{\epsilon}_{kk}^p dt, \quad (1.84)$$

где  $\chi, \omega, X_0$  — положительные константы. Ассоциированный с функциями (1.81), (1.82) закон пластического течения  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \partial f_{1,2} / \partial \sigma_{ij}$  при условии текучести прогнозирует различные виды дилатансии: пластическое разрыхление  $\dot{\epsilon}_v^p = 3(\gamma + \delta \beta \exp(-\beta p)) \dot{\epsilon}^p > 0$ , где  $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p - \dot{\epsilon}_{kk}^p \delta_{ij} / 3$  при  $p < L$  (течение на конической поверхности) и пластическое уплотнение  $\dot{\epsilon}_v^p = -3(p - L) \dot{\epsilon}^p / (R^2 s) < 0$  при  $L \leq p \leq X$  (течение на эллиптической поверхности) при накоплении сдвиговых деформаций  $\epsilon^p = \int_0^t \dot{\epsilon}^p dt$ . Модель реализована в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT\_025 [43].

### 1.3.3 Обобщения функции Хубера – Мизеса

Параллельно с моделями, имеющими составные предельные поверхности в пространстве главных напряжений, развивались гладкие формулировки, существенно упрощающие алгоритмы численного решения задач. Сначала рассмотрим обобщения энергетической теории предельного состояния.

Шлейхер [1] в 1926 году учел зависимость от среднего напряжения в теории предельного состояния, основанной на энергии формоизменения (октаэдрических касательных напряжений). С помощью зависимости  $\tau(\sigma)$

$$s = \sqrt{\kappa + \lambda p - \varsigma p^2}, \quad (1.85)$$

где  $\kappa > 0$ ,  $\lambda > 0$  и  $\varsigma = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, ему удалось описать данные Бейкера и Кармана по текучести мрамора. Бужинский предложил трехпараметрическую аппроксимацию зависимости от среднего напряжения:

$$s = \kappa - \lambda p + \mu p^2, \quad (1.86)$$

где  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  — материальные константы, которые можно подчинить данным испытаний на растяжение, сжатие и кручение. Надаи [44] принадлежит общая запись семейства критериев, обобщающих критерий Хубера – Мизеса на материалы с зависимостью от среднего напряжения:

$$s = f(p), \quad (1.87)$$

где  $f$  — произвольная функция.

Модель Грина [45]

$$3s^2 + \alpha p^2 = \delta \sigma_u^2, \quad (1.88)$$

предназначенная для описания пластичности пористых материалов и популярная в порошковой металлургии, имеет эллиптический вид предельной кривой и в девиаторной плоскости, и в плоскости Бужинского. В (1.88)  $\sigma_u$  — предел текучести материала при отсутствии пористости  $\eta = v_p / (v_p + v_m) = 0$ , где  $v_p$ ,  $v_m$  — объем пор и материала в элементарном объеме среды. Оценка несущей способности пористого материала при сдвиге и гидростатическом давлении позволила вывести зависимость коэффициентов функции текучести от параметра пористости

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{9(1 - \eta^{1/3})^2}{(3 - 2\eta^{1/4})^2 \ln^2 \eta}, \quad \delta = \frac{9(1 - \eta^{1/3})^2}{(3 - 2\eta^{1/4})^2}. \quad (1.89)$$

Модель прогнозирует предел текучести при всестороннем растяжении, не являющемся независимым от пределов текучести на сдвиг и гидростатическое сжатие.

В модели Гарсона – Твергарда – Нидлемана (GTN) [46–48] предложен гладкий неэллиптический вариант критерия текучести с ассоциированным законом пластического течения пористой среды (металлов вблизи предельного состояния)

$$\frac{3}{\sigma_u^2} s^2 + 2\eta q \operatorname{ch}\left(\frac{l}{\sigma_u} \sigma\right) - (1 + (q\eta)^2) = 0 \quad (1.90)$$

Двухпараметрическая функция текучести, зависящая от среднего напряжения и параметра пористости, построена Гарсоном [46] с помощью верхней оценки предельного состояния сферической поры в жестко-идеально-пластическом пространстве. Позже в модель было добавлено уравнение эволюции параметра пористости [47, 48] и еще один параметр в функцию текучести. Модель GTN также присутствует в пакете программ LS-DYNA® под именем MAT\_120 [43]. В [49] Софронис и Макмекинг на основе численного решения задачи о поре в ячейке среды со степенным законом ползучести нашли, что результаты хорошо описываются эллиптической аппроксимацией предельной кривой с одним параметром. Применительно к порошковой металлургии гладкое кубическое условие текучести, зависящее от двух первых инвариантов тензора напряжения, предложено в работе [50]. Зависимость коэффициентов функции текучести от пористости аппроксимирована по данным базовых экспериментов, для чего решены необходимые обратные задачи и получены ограничения, гарантирующие их разрешимость. В работе [51] гладкая двухинвариантная функция текучести аппроксимирована лемнискатой Бернулли. Обзор множества других гладких двухинвариантных функций текучести содержится в [8, 52, 53]. Авторы [54] для описания сложного нагружения порошковых материалов сформулировали квадратичное двухинвариантное условие пластичности с комбинированным упрочнением, где за трансляцию поверхности текучести в девиаторной плоскости отвечает тензорный параметр пористости.

#### ***1.3.4 Функции текучести, зависящие от угла вида***

Кроме кривой на плоскости Бужинского условие текучести характеризуется контуром на девиаторной плоскости, описывающей зависимость от третьего инварианта тензора напряжений. Существует множе-

ство критериев с гладким предельным контуром в девиаторной плоскости и гладким сопряжением конической и эллиптической частей поверхности текучести, отсутствующим в кэп-моделях. Довольно гибкая модель Швера и Мюррей [55] построена заменой функций  $f_1$  и  $f_2$  в (1.81) и (1.82) на следующую

$$f(s, p, \kappa) = s^2 - F_1^2(p)F_3(p, \kappa) = 0, \quad (1.91)$$

где

$$F_3(p, \kappa) = \begin{cases} 1, & p \leq L \\ 1 - \frac{(p-L(\kappa))^2}{(X(\kappa)-L(\kappa))^2}, & p > L \end{cases} \quad (1.92)$$

Для учета зависимости от угла вида напряженного состояния  $\vartheta$  критерий (1.91) предложено модифицировать следующим образом:

$$f(s, p, \vartheta, \kappa) = s^2 - \Lambda(\vartheta)F_1^2(p)F_3(p, \kappa) = 0, \quad (1.93)$$

где  $\Lambda(\vartheta)$  — гладкая материальная функция. Функция (1.93) аппроксимирует коническую часть поверхности текучести более гибко, чем это позволяют конус Друкера – Прагера или пирамиды Кулона – Мора и Треска – Кулона. Данная гладкая кэп-модель также присутствует в библиотеке моделей материалов пакета программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_145 [43].

Другая гибкая формулировка вместе с численной реализацией методом конечных элементов предложена Хоеи в [56] применительно к порошковой металлургии. В [8, 52, 53] приведены подробные обзоры, включающие многие другие модели дилатирующих уплотняемых сред с зависимостью от третьего инварианта. Модель Оттосена [57]

$$a \frac{s^2}{\sigma_u^2} + \lambda \frac{s}{\sigma_u} + b \frac{p}{\sigma_u} = 1, \quad \lambda = k_1 \cos(\arccos(k_2 \sin 3\vartheta)), \quad (1.94)$$

использующая гладкую четырехпараметрическую аппроксимацию, accurately описывает предельное состояние бетона. Модель Эйлера [58] для

геоматериалов с постоянной пористостью

$$2s = \left( \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^{\frac{-m}{m+1}} \left( 1 - \left( \frac{m\eta}{(1 - \eta^{1/m})^m} \right)^{\frac{2}{m+1}} \left( \frac{p}{2m} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (1.95)$$

имеет семь материальных параметров. Майнкен [59] учел в последней эволюцию пористости

$$\sqrt{(1 - g \sin 3\vartheta)^m s^2 + \alpha p^2 + \delta p^4 + \beta p + \epsilon p^2} = \kappa \quad (1.96)$$

и существенно обобщил модель GTN пластического разрушения металлов.

### 1.3.5 Неассоциированные законы

Для описания пластичности дилатирующих материалов также используются модели, не основанные на ассоциированном законе пластического течения. Автор работы [60] использовал двухинвариантную формулировку модели Кэйси и Нагди с поверхностями текучести и нагружения в пространствах напряжений и полных деформаций для описания пластичности пористых металлов. Обнаружено лучшее описание экспериментальных данных для одноосного и всестороннего сжатия пористого вольфрама по сравнению с моделями Грина и GTN. Ананд с соавторами [61] использовали поверхность текучести, составленную из пирамиды Кулона – Мора и эллиптической крышки с неассоциированным законом пластического течения для описания дисторсии и ассоциированным с эллиптической частью поверхности законом для уплотнения. Предложены уравнения эволюции параметров упрочнения для каждого из двух механизмов. Модель удовлетворительно описала процессы одноосного и трехосного сжатия и кручения образцов порошка железа. Выполнена численная реализация в виде пользовательской модели пакета программ ABAQUS<sup>®</sup>, с помощью которой рассчитано прессование конической детали. Автор [62] применил двухинвариантные модели кэп-пластичности с

неассоциированными законами пластического течения для моделирования локализации деформации в горных породах.

Обзор некоторых моделей порошковых материалов с предельными кривыми-многогранниками есть в [54, 63]. В [63] также собраны известные аппроксимации зависимости коэффициентов квадратичной функции текучести от параметра пористости.

## 1.4 Законы упрочнения

Учет деформационного, скоростного и температурного упрочнения и разупрочнения в рамках моделей пластичности, предназначенных для траекторий деформирования, мало отличающихся от прямолинейных, может быть сделан, если предусмотреть зависимость напряжения течения  $\sigma_u$  от накопленной деформации, скорости деформации, температуры и внутренних переменных. Общий вид закона упрочнения записывается в виде  $\sigma_u = h_\alpha(\epsilon_i, \dot{\epsilon}_i, T)$ . В приведенных ниже формулировках константы  $a, b, c, k, p, q, n, m$  и  $\dot{\epsilon}_*$  полагаются уникальными для каждой функции  $h_\alpha$  и материала.

Voce:

$$h_V = a - b \exp(-c\epsilon_i); \quad (1.97)$$

Swift [64]:

$$h_S = a(b + \epsilon_i^n); \quad (1.98)$$

Johnson, Cook [65]:

$$h_{JC} = a(b + \epsilon_i^n) \left(1 + p \ln \frac{\dot{\epsilon}_i}{\dot{\epsilon}_*}\right) \left(1 - \left(\frac{T}{T_*}\right)^q\right) \quad (1.99)$$

(в версии [66] зависимость от температуры в  $h_{JC}$  следует учитывать в виде  $1 - H^m$ ,  $H = (T - T_0)/(T_* - T_0)$  при  $T \geq T_0$ , где  $T_0$  — температура начала активации процесса пластического деформирования);

Schotten [67]:

$$h_{Sc} = a\dot{\epsilon}_i^{m+bT} \exp(qT); \quad (1.100)$$

Grosman [67]:

$$h_G = a\epsilon_i^n \exp(p\epsilon_i)\dot{\epsilon}_i^{m+bT} \exp(qT); \quad (1.101)$$

Khan, Liang (KHL) [68]:

$$h_{KHL} = a \left(1 + b\epsilon_i^n (1 - c \ln \dot{\epsilon}_i)^k \left(\frac{T_* - T}{T_* - T_0}\right)^p\right) \left(\frac{T_* - T}{T_* - T_0}\right)^q \dot{\epsilon}_i^m; \quad (1.102)$$

Zener, Hollomon [67]:

$$h_{ZH} = aZ^m, \quad Z = \exp\left(\frac{k}{T}\right) \dot{\epsilon}_i; \quad (1.103)$$

Sellars, Tegart, Garofalo (STG) [69]:

$$h_{STG} = a + b \operatorname{arcsh}\left(\frac{Z^m}{q}\right), \quad Z = \exp\left(\frac{k}{T}\right) \dot{\epsilon}_i; \quad (1.104)$$

Nemat-Nasser [66]:

$$h_{NN} = a \left(1 - b \left(\ln \frac{\dot{\epsilon}_i}{\dot{\epsilon}_*} + \ln \vartheta(\epsilon_i, T)\right)^q\right)^p \vartheta(\epsilon_i, T) + k\epsilon_i^n, \quad (1.105)$$

$$\vartheta(\epsilon_i, T) = 1 + c \left(1 - \left(\frac{T}{T_*}\right)^2\right) \epsilon_i^{1/2}.$$

Hoff [66]:

$$h_H = a(b + \epsilon_i)^{n(T)} \epsilon_i^{m(T)} \exp\left(\frac{k}{T}\right), \quad (1.106)$$

$$n(T) = n_0 \exp(-p(T - T_0)), \quad m(T) = m_0 \exp(-q(T - T_0));$$

Tong [67]:

$$h_T = a \exp\left(\frac{k}{T}\right) \dot{\epsilon}_i^m (1 + b \exp(-q(\epsilon_i - \epsilon_0)^2)) (1 - c \exp(-p\epsilon_i^n)). \quad (1.107)$$

Другие варианты описания зависимости от скорости деформации, температуры и микроструктуры можно встретить в работах [66, 67, 70, 71].

В работах [67, 69, 72–74] для некоторых алюминиевых и титановых сплавов, а также сталей при повышенных температурах зафиксирована немонотонность диаграмм деформирования, объясняемая явлениями динамического возврата, динамической рекристаллизации и других трансформаций микроструктуры; там же можно встретить аналитические аппроксимации кривых деформирования с ниспадающими участками (одна из которых  $h_T$  представлена выше).

Отметим работу [75], посвященную формулировке широкодиапазонных уравнений состояния для описания процесса ползучести металлов, в которой среди прочего предлагается дробно-линейная форма зависимости напряжения течения от скорости деформации. Данная аппроксимация имеет качественную особенность — существование предельного напряжения при неограниченном увеличении скорости деформации, что имеет принципиальное значение для возможности описания концентрации скорости деформации вблизи поверхностей трения заготовки и рабочего инструмента [76].

## 1.5 Критерии вязкого разрушения

В отличие от механизма хрупкого разрушения, сценарий которого подразумевает образование и рост трещин в местах концентрации напряжений, механизм вязкого разрушения сопровождается локализацией деформации и образованием и ростом микрповреждений. Данный механизм реализуется в пластичных металлах, часто — при низких скоростях деформаций и повышенных температурах (когда абсолютная температура материала составляет более 0,3 температуры плавления). Поэтому критерии вязкого разрушения как правило формулируются в деформациях, а вид напряженного состояния учитывается параметрически. Второй главной особенностью рассматриваемого вида нагружения является его наследственный характер, для учета которого вводятся внутренние микроструктурные переменные (меры поврежденности), для которых формулируются эволюционные уравнения. Вязкое разрушение также называют «пластическим».

### 1.5.1 Несвязанные модели

Объект, допускающий наиболее полное экспериментальное исследование вязкого разрушения — плоский образец на одноосное или двухосное нагружение, вырезанный из пластины. Простейшим условием, определяющим недопустимое развитие локализации деформации в пластине, может быть критическая скорость утонения

$$\frac{\dot{\epsilon}_{3L}}{\dot{\epsilon}_{3B}} \geq k \quad (1.108)$$

в какой-либо точке  $L$  пластины по сравнению с точкой  $B$ . Однако это условие оказывается нелокальным, что не экономично при проведении расчетов. Кроме того, подобные условия оказываются неспособными предсказать особенности поведения кривой предельного деформирова-

ния вблизи оси равных главных деформаций. Поэтому далее будут рассматриваться локальные критерии вязкого разрушения.

В данной главе под деформациями понимаются исключительно пластические деформации. Введем обозначения:  $\sigma_u$  — напряжение течения при одноосном растяжении,  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений,  $\sigma$  — среднее напряжение,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения,  $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ ,  $s_1, s_2, s_3$  — главные значения девиатора напряжений,  $\tau_m = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3|$  — максимальное касательное напряжение,  $\epsilon$  — средняя деформация,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — главные деформации,  $\epsilon_3 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_1$ ,  $e_1, e_2, e_3$  — главные значения девиатора деформаций,  $\epsilon_i$  — интенсивность деформаций,  $\epsilon$  — объемная деформация,  $\epsilon_f$  — интенсивность деформаций в момент разрушения. Отношение  $\eta = \sigma/\sigma_i$  называется параметром трехосности (или показателем жесткости напряженного состояния — в русскоязычной литературе). Внимание далее будет ограничено процессами, сопровождающимися постоянством ориентации главных осей тензора деформаций относительно локального объема пластины и траекториями изменения главных деформаций в плоскости пластины, мало отличающимися от прямых (что при пропорциональности изменения главных деформаций в плоскости пластины имеет место даже при развитии локализации деформации). В таком случае  $\epsilon_i$  будет мало отличаться от деформации  $\int \frac{d\epsilon_i}{dl} dl$ , накопленной вдоль траектории процесса в плоскости главных деформаций, и именно этот параметр будет далее использоваться при записи критериев вязкого разрушения и законов упрочнения (хотя в расчетах рекомендуется использовать накопленную деформацию).

Можно выделить критерии вязкого разрушения по механизму накопления повреждений, не связанные с уравнениями пластического течения среды. Несвязанный критерий вязкого разрушения имеет вид

$$\int_0^{\epsilon_f} g_\alpha d\epsilon_i = I_\alpha, \quad (1.109)$$

причем величина

$$D = \frac{1}{I_\alpha} \int_0^{\epsilon_i} g_\alpha d\epsilon_i \quad (1.110)$$

имеет смысл поврежденности, а критерий (1.5.1) связан с критическим накоплением повреждений, которому соответствует  $D = 1$  и накопленная пластическая деформация  $\epsilon_i = \epsilon_f$  (критерий в записи (1.5.1) допускает траектории малой кривизны; траектории пропорционального деформирования при частных видах деформированного состояния допускают конечную запись критерия разрушения). В приведенных ниже формулировках константы  $a, b, c, k, p, q, n, m$  полагаются уникальными для каждой функции  $g_\alpha$  и материала.

Clift, Freudental [77]:

$$g_C = \sigma_i; \quad (1.111)$$

Cockroft, Latham [78]:

$$g_{CL} = \sigma_1; \quad (1.112)$$

Oh с соавторами [79]:

$$g_{Oh} = \frac{\sigma_1}{\sigma_i}; \quad (1.113)$$

Mc Clintock [80] (Fracture Forming Limit, FFL):

$$g_{MC} = \eta; \quad (1.114)$$

Rice, Tracey [81]:

$$g_{RT} = \zeta \exp\left(\frac{3}{2}\eta\right), \quad (1.115)$$

где  $\zeta = 0,283$  в рамках пластичности Мизеса, а  $\zeta = 0,376$  — в рамках пластичности Треска;

Johnson, Cook [65]:

$$g_{BW} = a + b \exp(k\eta); \quad (1.116)$$

Wierzbicki, Bao [82]:

$$g_{JC} = a \exp(c\eta) - (a \exp(c\eta) - b \exp(k\eta)) (1 - \xi^n)^{1/n}, \quad (1.117)$$

где  $\xi = 27J'_3/(2\sigma_i^3)$ ,  $J'_3 = s_1s_2s_3$ , — параметр вида напряженного состояния;

Бао, Wierzbicki [83]:

$$g_{BW} = (a \exp(k\eta) + b \exp(m\eta) - c \exp(n\eta)) \theta^2 + (a \exp(k\eta) - b \exp(m\eta)) \theta + c \exp(n\eta), \quad (1.118)$$

где  $\theta = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \xi$  — нормализованный угол вида напряженного состояния,  $-1 \leq \theta \leq 1$ ;

Wilkins [82]:

$$g_W = \frac{1}{(1 - a\sigma)^n} (2 - \varsigma)^m, \quad (1.119)$$

где  $\varsigma = \max\{s_2/s_1, s_2/s_3\}$ ;

Brozzo с соавторами [84]:

$$g_B = \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - \sigma)}; \quad (1.120)$$

Оуане с соавторами [85]:

$$g_O = 1 + a\eta; \quad (1.121)$$

Ко, Нuh [86]:

$$g_{KH} = \frac{\sigma_1}{\sigma_i} \langle 1 + 3\eta \rangle, \quad (1.122)$$

где  $\langle x \rangle = \{1, x \geq 0; 0, x < 0\}$ ;

Lou с соавторами [87]:

$$g_L = \left(2 \frac{\tau_m}{\sigma_i}\right)^p \left\langle \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\eta \right\rangle^q; \quad (1.123)$$

Ghosh [88]:

$$g_G = \tau_m \sigma; \quad (1.124)$$

Norris с соавторами [89]:

$$g_N = \frac{1}{1 - a\sigma}; \quad (1.125)$$

Atkins [90]:

$$g_A = \frac{1 + \chi/2}{1 - a\sigma}, \quad (1.126)$$

где  $\chi = d\epsilon_2/d\epsilon_1$ .

Заметим, что для плоского напряженного состояния параметр  $\eta$  оказывается зависимым с  $\xi$ ,  $\theta$  и  $\varsigma$ .

Как правило, перечисленные выше критерии не являются чисто феноменологическими и имеют обоснование механизмами генерации, роста и объединения пор, выполненное методами теории упругости, которое можно найти в указанных первоисточниках, а также [91]. Укажем работы [77, 82, 84, 87, 92–97], посвященные обзору и экспериментальной калибровке известных критериев вязкого разрушения, а также формулировке оригинальных критериев.

В работах Аткинса и Мартинса с соавторами [98–101] показано, что критерий Макклинтока в сочетании с анизотропным законом пластического течения Hill48 порождает предельные прямые FFL и SFFL, описываемые соответствующими уравнениями  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = a$  и  $\epsilon_1 - \epsilon_2 = b$  в плоскости главных деформаций, отвечающими разрушению с ростом трещин отрыва или сдвига в плоскости и являющимися характеристиками материала.

Довольно популярная модель Джонсона – Кука вместе с ее обобщениями присутствует в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именами MAT\_015 и MAT\_107 [43].

### 1.5.2 Связанные модели

**Модель Гарсона – Твергарда – Нидлемана.** Наиболее известной связанной моделью накопления поврежденности по механизму роста сферических пор является модель Гарсона – Твергарда – Нидлемана (GTN) [102, 103], в которой критерий пластического течения Гарсо-

на [104]

$$\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_u}\right)^2 + 2Dq \cosh\left(\frac{3}{2}l\frac{\sigma}{\sigma_u}\right) - (1 + (qD)^2) = 0 \quad (1.127)$$

( $q, l, \sigma_u$  — константы), учитывающий среднее напряжение  $\sigma$  и поврежденность

$$D = \begin{cases} \phi, & \phi \leq \phi_c \\ \phi_c + K(\phi - \phi_c), & \phi > \phi_c \end{cases} \quad K = \frac{1/q - \phi_c}{\phi_* - \phi_c} \quad (1.128)$$

( $\phi$  — объемная плотность пор,  $\phi_c, \phi_*$  — ее значения, соответствующие началу взрывного роста и моменту разрушения), дополняется эволюционными уравнениями для параметра пористости [102, 105, 106], моделирующими зарождение и рост пор, в том числе в условиях чистого сдвига (последнее слагаемое),

$$\dot{\phi} = (1 - \phi)\dot{\epsilon} + \frac{a}{\sqrt{2\pi b}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_i - c}{b}\right)^2\right) \dot{\epsilon}_i + k\phi(1 - \xi^2) \frac{s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3}{\sigma_i}, \quad (1.129)$$

где  $a, b, c, k$  — константы,  $\xi$  — параметр вида напряженного состояния. Критерием вязкого разрушения выступает условие  $\phi = \phi_*$  (или  $D = 1$ ). Модель GTN присутствует в пакете программ LS-DYNA<sup>®</sup> под именем MAT\_120 [43].

**Модель GISSMO.** Связанная модель Generalized Incremental Stress State Dependent Model (GISSMO) [107], предназначенная для описания непропорционального деформирования, предлагает более тонкое описание эволюцию внутренних переменных, отвечающих за вязкое разрушение:

$$\dot{\phi} = \frac{n}{g(\eta)} \phi^{1-1/n} \dot{\epsilon}_i, \quad \dot{\psi} = \frac{n}{h(\eta)} \psi^{1-1/n} \dot{\epsilon}_i, \quad (1.130)$$

рассматривая дополнительную переменную  $\psi$  — «меру нестабильности», причем тензор эффективных напряжений выражается в виде

$$\Sigma = (1 - D)\sigma, \quad (1.131)$$

где

$$D = \begin{cases} 0, & \psi < 1 \\ \left(\frac{\phi - \phi_c}{1 - \phi_c}\right)^m, & \psi \geq 1 \end{cases} \quad (1.132)$$

а тензор напряжений  $\sigma$  определяется из уравнений состояния.

**Модель DIEM.** Связанная модель Damage Initiation and Evolution Model (DIEM) [108] использует несколько параметров поврежденности, отвечающих независимым конкурирующим механизмам вязкого разрушения. Активизация  $j$ -го механизма происходит при достижении соответствующего индикаторного параметра  $\omega_j$  критической величины  $\omega_j = 1$ . Рост параметра подчиняется уравнению

$$\dot{\omega}_j = g_j(\dot{\epsilon}_i, \eta)\dot{\epsilon}_i, \quad (1.133)$$

включение механизма накопления повреждений происходит по следующему сценарию:

$$\dot{\omega}_j = \begin{cases} 0, & \omega_j < 1 \\ l\dot{\epsilon}_i, & \omega_j \geq 1 \end{cases}, \quad (1.134)$$

а эволюция накопления повреждений — согласно уравнению

$$\dot{D}_j = h_j(D_j, \eta)\dot{\omega}_j. \quad (1.135)$$

Далее происходит композиция повреждений, например, согласно правилу

$$D = 1 - \prod_j (1 - D_j) \quad (1.136)$$

и вычисление эффективного напряжения по (1.131).

Учесть связанность типа GISSMO или DIEM для любой несвязанной модели пластического разрушения в пакете программ LS-DYNA® можно с помощью опции \*MAT\_ADD\_EROSION [43].

### 1.5.3 Об анизотропной поврежденности

Процессы развития поврежденности при обработке давлением листовых заготовок могут существенно зависеть от исходной анизотропии механических свойств листа (например, в направлении проката и в поперечном направлении). Анизотропия поврежденности подтверждается экспериментально и особенно проявляется при непропорциональных нагружениях [109]. В связи с указанным обстоятельством получили развитие модели анизотропной поврежденности, в частности, применительно к построению предельной диаграммы деформирования при обработке давлением анизотропной металлической пластинки по критерию наступления неустойчивости деформирования вследствие накопления поврежденности [110]. Более общие связанные теории поврежденности анизотропных материалов, использующие концепции суммирования повреждений и эффективных напряжений, заложенные Качановым и Работновым [111, 112], можно найти в работах [113–119]. В англоязычных источниках механика деформирования твердых тел с учетом накопления повреждений называется „damage mechanics“.

### 1.5.4 Учет температуры и скорости деформации

В моделях вязкого разрушения, представленных выше, внимание было сосредоточено на зависимости критериальной функции от тензора напряжений. Практика учета зависимости от скорости деформаций и температуры заключается в модификации этой функции  $\bar{g}_\alpha = g_\alpha \zeta_\alpha(\dot{\epsilon}_i, T)$ . Например, для критерия Джонсона – Кука его авторами [65] предложено

$$\zeta_{JC} = \left(1 + l \ln \frac{\dot{\epsilon}_i}{\dot{\epsilon}_*}\right) \left(1 + k \frac{T}{T_*}\right), \quad (1.137)$$

где  $l, k, \dot{\epsilon}_*$  — константы,  $T_*$  — температура плавления. Другой вариант учета зависимости от температуры предлагает вместо гомологической

температуры  $T/T_*$  в выражении (1.137) рассматривать функцию  $\{0, T < T_0; (T - T_0)/(T_* - T_0), T_0 \leq T < T_*; 1, T \geq T_*\}$ , где  $T_0$  — температура начала активации механизма разрушения.

### 1.5.5 Метод Марциньяка – Кучинского

Среди различных теорий, позволяющих получить предельные деформации листового металла в зависимости от его пластических свойств, критерия вязкого разрушения и условий нагружения (см. [64, 120–122] и обсуждение в [25]), достаточно гибкий инструмент представляет схема, предложенная Марциньяком и Кучинским [120]. Моделируется двухосное растяжение образца в виде пластины с двумя зонами (рис. 1.1) — толстой  $B$  (Basic) и тонкой  $L$  (Localized), разделенными прямолинейными границами. Направлению, перпендикулярному границам раздела, будет присвоен индекс 1, и оно будет соответствовать наибольшей деформации  $\epsilon_1 > 0$ . Направлению, продольному данным границам, сопоставлен индекс 2, а направлению, перпендикулярному плоскости пластины, — индекс 3. Предполагается, что в испытании контролируются деформации  $\epsilon_{1B}$  и  $\epsilon_{2B}$ . Принимается, что

а) в канавке и вне ее пластинка находится в различных однородных напряженно-деформированных состояниях;

б) плоское напряженное состояние в обеих областях;

в) деформации в направлении вдоль канавки в областях  $B$  и  $L$  равны (нет утонения пластинки по ширине):

$$\epsilon_{2B} = \epsilon_{2L}; \quad (1.138)$$

г) главные оси тензора напряжений в обеих областях совпадают с направлениями вдоль и поперек канавки;

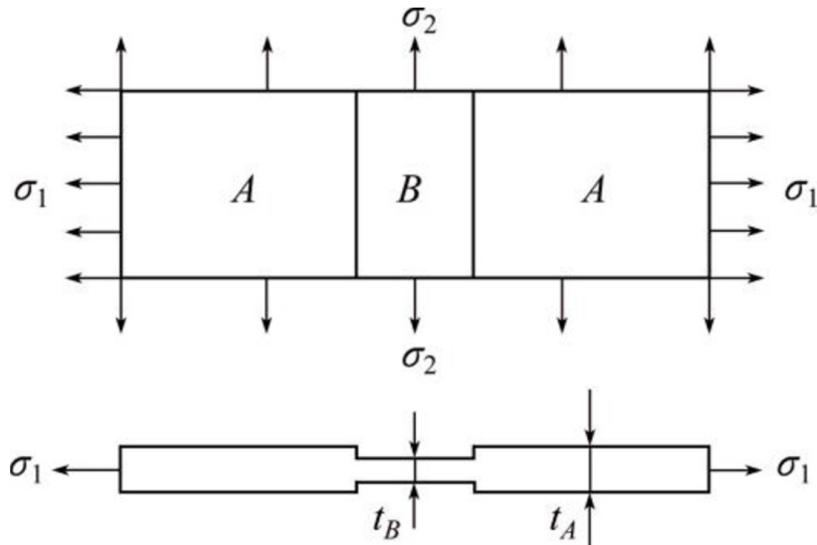


Рис. 1.1. Схема образца Марциньяка – Кучинского

д) в области  $B$  имеет место пропорциональное нагружение, то есть

$$\frac{d\sigma_{1B}}{\sigma_{1B}} = \frac{d\sigma_{2B}}{\sigma_{2B}}. \quad (1.139)$$

е) выполнено условие равновесия сил:

$$t_B\sigma_{1B} = t_L\sigma_{1L}, \quad (1.140)$$

где  $t$  — толщина пластины.

В модели можно выделить три следующих важных элемента.

1. Условие пластического течения  $F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_u) = 0$ . Принимается ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_u)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (1.141)$$

Рассматриваются энергетически сопряженные меры интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и интенсивности приращения деформаций  $(d\epsilon)_i$ , которые определяются равенством  $dA = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} = \sigma_i d\epsilon_i$ , в котором использовано, что при пропорциональном изменении компонент деформаций будет  $(d\epsilon)_i = d\epsilon_i$ .

2. Закон упрочнения или разупрочнения, то есть изменение  $\sigma_u$  в зависимости от накопленной деформации, скорости деформации, температуры или внутренних переменных состояния, описывающих эволюцию микроструктуры.

3. Условие возникновения дефекта (критерий вязкого разрушения), при котором точка с координатами  $(\epsilon_{2B}, \epsilon_{1B})$  отмечается как точка, принадлежащая кривой предельного деформирования.

В области шейки обычно задают меньшую начальную толщину, чем вне ее. Но можно задать ту же начальную толщину и иные пластические свойства материала в шейке или задать повышенную начальную поврежденность материала, если используется модель материала с поврежденностью. Для нахождения кривой предельного деформирования задают характер нагружения  $\chi_B = \sigma_{2B}/\sigma_{1B}$ , затем находится точка на этой кривой, одна для каждого значения  $\chi_B$ . Для нахождения кривой предельного деформирования можно применять итерационный алгоритм, в котором фигурируют следующие два уравнения.

Первое уравнение

$$d\epsilon_{1B} = \frac{d\epsilon_{1L}}{\rho_B} \left( \frac{\partial F(\sigma_{1L}, \sigma_{2L})}{\partial \sigma_{2L}} \right) / \left( \frac{\partial F(\sigma_{1L}, \sigma_{2L})}{\partial \sigma_{1L}} \right) \quad (1.142)$$

следует из ассоциированного закона течения

$$\frac{d\epsilon_{1L}}{d\epsilon_2} = \left( \frac{\partial F(\sigma_{1L}, \sigma_{2L})}{\partial \sigma_{1L}} \right) / \left( \frac{\partial F(\sigma_{1L}, \sigma_{2L})}{\partial \sigma_{2L}} \right)$$

с учетом обозначения

$$\rho_B = \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_{1B}}.$$

Если условие пластического течения есть однородная функция тензора напряжений (что верно почти для всех широко используемых условий), то отношение производных в (1.142) выражается через  $\chi_B$ . Например при использовании трансверсально изотропного условия пластиче-

ского течения Хилла (1.22), (1.142) примет вид

$$d\epsilon_{1B} = \frac{d\epsilon_{1L} (1+r)\chi_L - r}{\rho_B (1+r-r\chi_L)}, \quad (1.143)$$

где  $r$  — параметр анизотропии.

Второе уравнение следует из уравнения равновесия сил (1.140) с учетом определения деформаций

$$\sigma_{1B} = f_0 \exp(\epsilon_{3L} - d\epsilon_{1L} - \epsilon_{3B} + d\epsilon_{1B}) \sigma_{1L}, \quad (1.144)$$

где  $f_0 = t_{0L}/t_{0B}$  — начальное отношение толщин. Здесь также принята малость приращений компонент деформаций и использовано условие несжимаемости  $d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$ . Обозначим величины  $\phi_\alpha = \sigma_{i\alpha}/\sigma_{1\alpha}$ ,  $\beta_\alpha = \epsilon_{i\alpha}/\epsilon_{1\alpha}$  при  $\alpha = \{B, L\}$ . Используя закон упрочнения, можно исключить из уравнения (1.144)  $\sigma_{1B}$  и  $\sigma_{1L}$ , и тогда в нем будут участвовать только деформации и безразмерные величины  $\chi_\alpha, \phi_\alpha, \rho_\alpha, \beta_\alpha$  при  $\alpha = \{B, L\}$ . Например, если использовать степенной закон упрочнения  $\sigma_i = k(\epsilon_0 + \epsilon_i)^n$ , то (1.144) примет вид

$$d\epsilon_{1B} = \frac{1}{\beta_B} \left( \frac{\phi_B}{\phi_L} f_0 \exp(\epsilon_{3L} - d\epsilon_{1L} - \epsilon_{3B} + d\epsilon_{1B}) \right)^{1/n} \cdot (\epsilon_0 + \epsilon_{iL} + \beta_L d\epsilon_{1L}) - \frac{\epsilon_{iB} + \epsilon_0}{\beta_L}. \quad (1.145)$$

Итерационный алгоритм выглядит следующим образом (по версии [68], модифицированной в настоящей работе).

1. Задаётся  $\chi_B = \sigma_{2B}/\sigma_{1B}$ .
2. Решением (1.143), (1.145) определяются значения деформаций, при которых материал в обеих областях перейдет в пластическое состояние. Рассматривается развитое пластическое течение, поэтому высокая точность для этого шага не нужна.

3. Задаётся некоторое малое конечное приращение деформации  $d\epsilon_{1L}$  в области  $L$ .

4. С использованием условия пластического течения и ассоциированного закона течения находятся значения  $\rho_B$ ,  $\phi_B$  и  $\beta_B = (1 + \chi_B \rho_B) / \phi_B$ . Параметры  $\rho_L$ ,  $\phi_L$ ,  $\beta_L$  выражаются через  $d\epsilon_{1B}$ ,  $d\epsilon_{1L}$ ,  $\chi_L$ .  $\rho_L = \rho_B d\epsilon_{1B} / d\epsilon_{1L}$ ,  $\phi_L$  находятся с использованием условия пластического течения и соотношения  $\beta_L = (1 + \chi_L \rho_L) / \phi_L$ .

5. Оставшиеся две неизвестные величины  $\chi_L$  и  $d\epsilon_{1B}$  определяются из решения уравнений (1.142), (1.144).

6. Вычисляются новые значения деформаций.

7. Проверяется выполнение критерия вязкого разрушения. Если условие не выполняется, то переходим к пункту 3.

8. Отмечается точка кривой предельного деформирования  $(\epsilon_{2B}, \epsilon_{1B})$ .

9. Повторяется выполнение алгоритма пункта 1 с другими значениями  $\chi_B$  для получения необходимого числа точек кривой предельного деформирования.

Для моделей, в особенности рассматривающих повреждаемость, здесь была реализована другая численная реализация схемы Марциньяка – Кучинского, основанная на решении системы дифференциальных уравнений модели, записанных в нормальной форме Коши, стандартными средствами пакета Wolfram Mathematica®.

Данная схема многократно использована и модифицирована для теоретического исследования особенностей предельных кривых в зависимости от различных специальных критериев текучести, законов упрочнения и критериев вязкого разрушения [68, 98, 123–146].

## 1.6 Задачи к главе 1

1. Построить на девиаторной плоскости контуры текучести согласно критериям Треска, Мизеса и Ишлинского – Ивлева, подчиняя единственный параметр этих критериев испытанию на одноосное растяжение. Найти отношение пределов текучести при чистом сдвиге и одноосном растяжении, предсказываемое каждым из критериев. Евклидову норму в девиаторной плоскости ввести с помощью интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{kl} s_{kl}}.$$

2. Найти значения параметров трехосности  $\eta$  и Лоде  $\mu$  для напряженных состояний, отвечающих свободному одноосному растяжению цилиндра, свободному одноосному сжатию цилиндра, стесненному одноосному сжатию цилиндра, двухосному растяжению пластины, чистому сдвигу при кручении тонкостенной трубки и осадки параллелепипеда в канале.

3. Получить выражения для  $\sigma_\alpha$  — предела текучести  $r_\alpha$  — коэффициента анизотропии при одноосном растяжении полосы, вырезанной из листа под углом  $\alpha$  к направлению прокатки, для критерия текучести Hill48.

4. Получить выражения для  $\sigma_\alpha$  — предела текучести  $r_\alpha$  — коэффициента анизотропии при одноосном растяжении полосы, вырезанной из листа под углом  $\alpha$  к направлению прокатки, для критерия текучести Hill90.

5. Получить и проанализировать зависимость  $\sigma_0/\sigma_{90}$  от  $r_0/r_{90}$  для критериев текучести Hill48, Hill79, Hill90 и Hill93 на предмет возможности описания аномалии анизотропии второго типа в листовых материалах.

6. Получить и проанализировать зависимость  $\sigma_u/\sigma_b$  от  $r$  для критериев текучести Hill48, Hill79, Hill90 и Hill93 в случае изотропии пластических свойств в плоскости листа на предмет возможности описания аномалии анизотропии первого типа.

8. Исследовать экстремумы функции  $\sigma_\alpha(\alpha)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$  в зависимости от констант критерия текучести Hill48 для листового материала.

9. Определить плоскости и направления в этих плоскостях, на которых достигаются максимальные значения комбинации касательного и нормального напряжений  $t_{n\tau} - \mu t_{nn}$ , где  $t_{n\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ,  $t_{nn} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичная нормаль к плоскости и единичный вектор в плоскости. Привести  $\max_{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}}(t_{n\tau} - \mu t_{nn})$  к левой части критерия Кулона – Мора (1.74). Оригинальное решение этой задачи, принадлежащее Мору [31], приведено во многих учебниках и монографиях (например в [44]).

10. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на всестороннее сжатие в камере высокого давления. Считать известными после каждого испытания с рабочим давлением из заданного ряда необратимое относительное изменение объема образца.

11. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на поперечное сжатие с фиксированными концами. Считать известными ряд давлений и соответствующих необратимых относительных изменений объема образца. Указания: а) последовательно определить компоненты тензора напряжений, его шаровой и девиаторной составляющих, второй инвариант девиатора, записать критерий текучести, б) записать соотношения ассоциированного закона пластического течения  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}(R^2 s_{ij} - 2(p - L)\delta_{ij})$ , в) учесть заданное кинематическое ограничение, получить связь компонент тензора напряжений и применить к критерию текучести.

12. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели

Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на трехосное сжатие по схеме Кармана. Считать известными ряд осевых сжимающих напряжений и боковых давлений, изменяющихся пропорционально, а также соответствующих необратимых относительных изменений объема образца, осевых и поперечных деформаций. Положить, что боковое давление превосходит осевое напряжение по абсолютной величине. Учесть указания (а),(б) к предыдущей задаче, получить из уравнений отношения скоростей деформаций, которые связать с отношениями указанных выше деформаций.

13. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на свободное сжатие. Считать известными ряд осевых напряжений, а также соответствующих необратимых относительных изменений объема образца, осевых и поперечных деформаций. Учесть указания (а),(б) к задаче 11, получить из уравнений отношения скоростей деформаций, которые связать с отношениями указанных выше деформаций.

14. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие конической части поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания при растяжении тонкого кольца полудисками. Учесть указание (а) к задаче 6. Получить из уравнений закона пластического течения  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}(s_{ij}/s + 2F_1' \delta_{ij})$  отношения скоростей окружных и радиальных деформаций, а также окружных и объемных деформаций, которые связать с отношениями соответствующих деформаций, регистрируемых в эксперименте. Получить из соотношений модели отношение деформаций по толщине и ширине кольца. Получить из соотношений модели условие

стыковки конической части поверхности текучести с эллиптической частью в точке экстремума.

15. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на стесненное сжатие. Считать известными ряд осевых напряжений, а также соответствующих необратимых относительных изменений объема образца или осевых деформаций. Учесть указания (а)–(в) к задаче 11, получить связь осевого напряжения с константами и функциями модели, вытекающую из условия текучести.

16. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания цилиндрического образца на сжатие в упругой цилиндрической оболочке. Считать, что тангенциальная деформация образца  $\epsilon_{11}$  измеряется тензодатчиком, приклеенным к упругой оболочке, и связана с соответствующим напряжением  $\sigma_{11}$  соотношением безмоментной теории упругих оболочек

$$\epsilon_{11} = \frac{a \sigma_{11}}{h E}, \quad (1.146)$$

где  $a$ ,  $h$  — радиус и толщина цилиндрической оболочки,  $E$  — модуль Юнга ее материала. Получить из ассоциированного закона пластического течения с учетом (1.146) выражение для отношения приращений осевой и тангенциальной деформаций образца через осевое и тангенциальное напряжения.

17. Получить соотношения, связывающие параметры кэп-модели Димаджио – Сендлера, соответствующие эллиптической крышке поверхности текучести, с контролируемыми и измеряемыми величинами испытания параллелепипеда сжатием в канале. Считая известными сжимаю-

щую и поперечную компоненты деформаций образца в последовательные моменты времени, выразить отношение их скоростей из ассоциированного закона течения, руководствуясь указаниями (а)–(в) к задаче 11.

## ГЛАВА 2. УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ

В данной главе речь пойдёт о металлах. Моделирование усталостного разрушения композитов, дерева, горных пород и т.д. имеет определённые особенности, которые не будут здесь обсуждаться.

За период 1927–1987 гг. зарегистрировано 1885 аварий самолетов и вертолетов, вызванных усталостным разрушением и повлекших за собой 2240 смертей [147]. За последующие годы благодаря развитию науки об усталостном разрушении и её инженерной практике ресурс летательных аппаратов был увеличен примерно в 70 раз, и аварии в результате усталостного разрушения теперь являют собой единичные случаи.

Что же из себя представляет наука об усталостном разрушении? Здесь мы попробуем дать краткий ответ на этот вопрос.

## 2.1 Введение

Детали машин начали использоваться в режиме немонотонной нагрузки, начиная со времен промышленной революции. Длительная эксплуатация этих деталей приводила к поломке, несмотря на то что рабочие напряжения ниже статического предела прочности. Этот феномен был назван усталостным разрушением (eng. fatigue), он был особенно загадочен для инженеров XIX века, так как поломке не предшествовали никакие внешние проявления вплоть до самых последних стадий разрушения.

Первые выдающиеся результаты на тему усталостного разрушения получил немецкий инженер Август Вёлер в 1858–1870 годах, изучая усталостное разрушение железнодорожных осей [148]. Вёлер сделал четыре важных вывода:

1. Разрушение может быть вызвано многочисленным повторением нагрузок, каждая из которых ниже статического предела прочности.

2. Амплитуды повторяющихся нагрузок играют решающую роль в процессе усталостного разрушения. Чем больше амплитуды, тем быстрее произойдет разрушение.

3. Среднее напряжение нагрузки наряду с амплитудой нагрузки влияет на скорость усталостного разрушения. Чем больше среднее напряжение, тем быстрее произойдет разрушение.

4. Небольшие изменения амплитуды нагрузки приводит к сильному изменению времени жизни. Существует граница амплитуды, ниже которой разрушение не наблюдается (такую границу называют пределом выносливости).

Про историю развития науки об усталостном разрушении можно прочитать в [149].

### **2.1.1 Факторы усталостного разрушения**

Основными факторами, влияющими на усталостное разрушение детали являются:

1. Наличие концентраторов напряжений. Общеизвестный факт, что подавляющее большинство усталостных трещин образуются в концентраторах напряжений.

2. Размер зерна, а также химический и фазовый составы [150, 151] сплава из которого изготовлена деталь. Причём для большинства металлов, меньший размер зерна значительно увеличивает время жизни при многоциклового усталости, однако при высоких амплитудах нагрузки, образцы с большим размером зерна зачастую выдерживают большее число циклов [152–156].

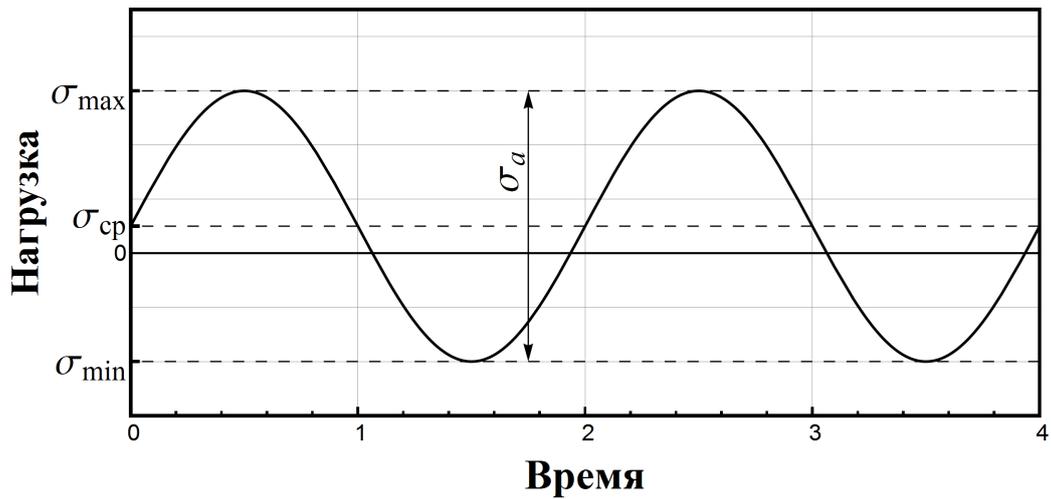
3. Способ изготовления детали. Так, образцы, изготовленные с помощьюковки или штамповки, показывают лучшую усталостную долговечность чем литые [157]. В свою очередь аддитивно произведенные образцы могут показывать как хорошую усталостную долговечность, так и низкую, в зависимости от способа наплавки и оборудования [158].

4. Качество поверхности детали. Снижение шероховатости поверхности может увеличить число циклов до разрушения в разы [159, 160].

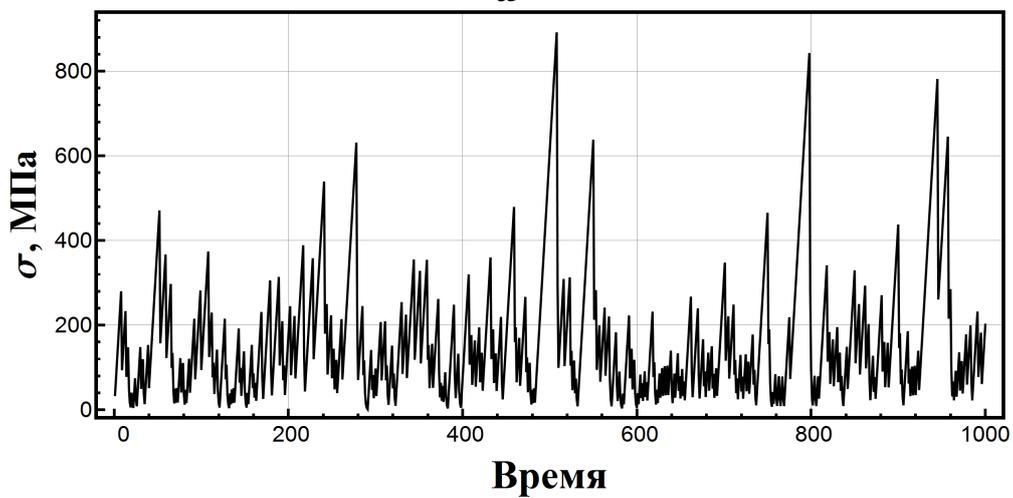
5. Дополнительная обработка детали. Чтобы увеличить время жизни готовой детали, её могут подвергать различным поверхностным обработкам, таким как обдувка дробью, выглаживание, цементация, азотирование, лазерная обработка.

### **2.1.2 Типы истории нагружения и спектр нагружения**

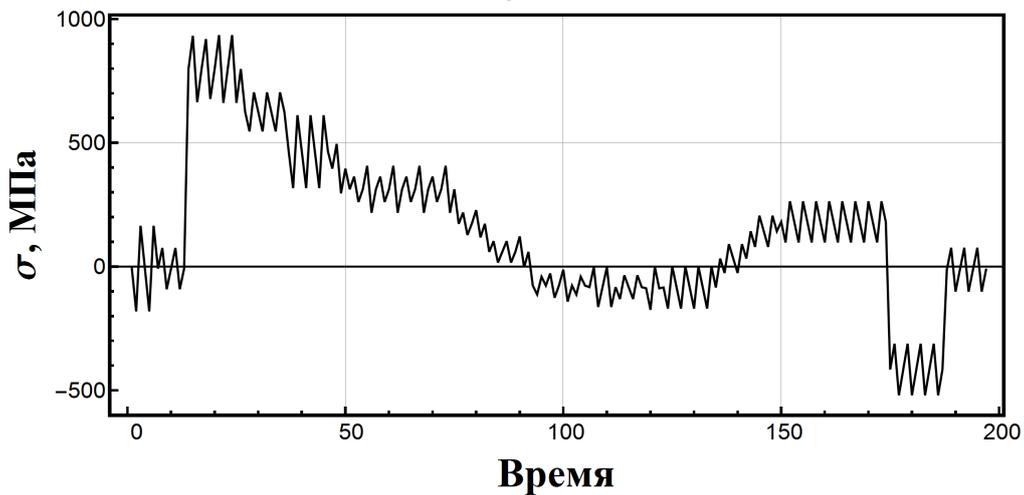
Немонотонную нагрузку, распределенную во времени, называют историей нагружения. Историей нагружения может быть как нагрузка детали в реальной эксплуатации, так и программно заданная нагрузка в



***a***



***б***



***в***

Рис. 2.1. Немонотонная нагрузка различных типов: ***a*** — нагрузка с постоянной амплитудой: на практике схожее нагружение может испытывать, например, деталь электродвигателя; ***б*** — нагружение детали подвески автомобиля, случайное нагружение; ***в*** — нагружение подвески авиадвигателя за время одного полета, нагружение со сложной историей

лабораторных испытаниях. История нагружения состоит из отдельных циклов которые имеют либо постоянную амплитуду (рис.2.1,**а**), либо переменную амплитуду. В первом случае нагрузку называют регулярной, а во втором — нерегулярной. Последний случай подразделяется на случайную нагрузку (рис.2.1,**б**) и нагружение со сложной историей (рис.2.1,**в**).

Нагрузка с постоянной амплитудой является стандартным экспериментом на усталостную прочность. Она привлекательна удобством экспериментальной реализации, а также простотой интерпретации результатов таких экспериментов. Такая нагрузка (см. рис.2.1,**а**) определяется двумя параметрами: амплитудой  $\sigma_a$  и средним напряжением  $\sigma_m$ <sup>1</sup>, либо максимальным  $\sigma_{max}$  и минимальным  $\sigma_{min}$  напряжениями. Эти пары параметров связаны соотношениями  $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ ,  $\sigma_{cp} = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$ , кроме того, выделяют коэффициент асимметрии цикла  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ . Циклы с  $R = -1$  называют **симметричными**, а циклы с  $R = 0$  — **отнулевыми**.

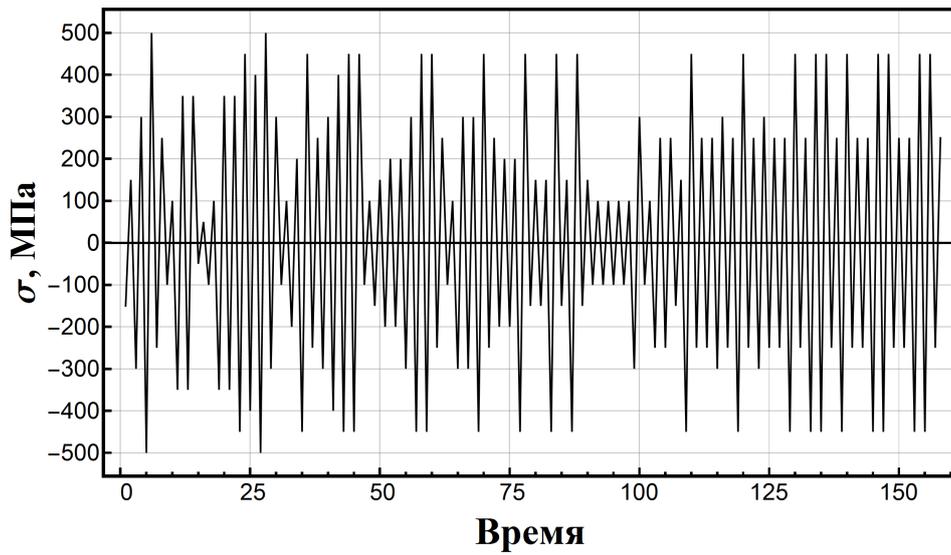
Спектр нагружения является одной из характеристик истории нагружения. Он представляет собой диаграмму с амплитудой<sup>2</sup> цикла  $\sigma_a$  по вертикальной оси и числом циклов, превышающих данную амплитуду (в истории нагружения) по горизонтальной оси. Чтобы найти спектр нагружения необходимо:

1. Схематизировать<sup>3</sup> историю нагружения.
2. Отсортировать полученные циклы по убыванию амплитуды  $\sigma_{ai}$ ,  $i = 1..n$  (примем за  $n$  число различных значений амплитуды), указывая число циклов  $N_i$  для каждого уровня амплитуды.
3. Отметить точки с координатами  $\left\{ \sum_{k=1}^i N_k, \sigma_{ai} \right\}$ ,  $i = 1..n$  на диаграмме спектра.  $i$ -я точка показывает, сколько в истории нагружения было

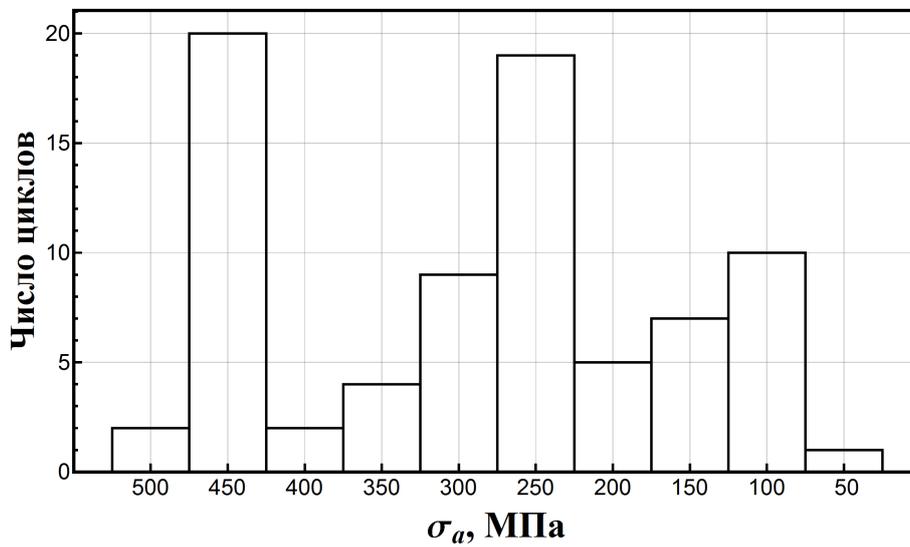
<sup>1</sup> „m“ от слова mean — средний.

<sup>2</sup>Вместо  $\sigma_a$  иногда используют максимальные напряжения  $\sigma_{max}$ .

<sup>3</sup>То есть разобрать историю нагружения на отдельные циклы, алгоритмы схематизации приведены ниже — в подразделе 2.2.4



**а**



**б**



**в**

Рис. 2.2. Нахождение спектра нагружения: **а** — пример истории нагружения; **б** — схематизация истории нагружения изображенной на **а**; **в** — спектр нагружения истории нагружения изображенной на **а**

циклов с амплитудой большей либо равной  $\sigma_{ai}$ . Для удобства отображения эти точки можно соединить прямыми или аппроксимировать кривой.

Приведем пример построения спектра истории нагружения, изображенной на рис. 2.2,*а*. В результате схематизации истории нагружения, получится набор из 79 циклов с 10 различными значениями амплитуд  $\sigma_{ai}$ ,  $i = 1..10$ . Числа  $N_i$  циклов, имеющих амплитуду  $\sigma_{ai}$ ,  $i = 1..10$ , изображены на гистограмме рис. 2.2,*б*, среднее напряжение всех циклов нулевое:  $\sigma_m = 0$ . Подсчитав суммы в пункте №3 алгоритма, можно отметить 10 точек на диаграмме спектра рис. 2.2,*в*. Стоит отметить что при схематизации истории нагружения полученные циклы могут иметь не только различные амплитуды, но и различные коэффициенты асимметрии цикла<sup>4</sup>  $R$ . Как правило, в этом случае найденные циклы приводят к эквивалентным отнулевым ( $R = 0$ ) циклам<sup>5</sup> и уже по ним строят спектр.

Спектр нагружения не является исчерпывающей характеристикой истории нагружения, но для многих методов оценки времени жизни, его достаточно.

Спектром нагружения часто называют просто набор циклов (набор пар значений  $\sigma_{ai}$ ,  $\sigma_{mi}$ ), полученный в результате схематизации истории нагружения. Иногда, по мнению авторов ошибочно, спектром нагружения называют саму историю нагружения.

### 2.1.3 Диаграмма Вёлера и типы усталости

Август Вёлер спроектировал первые экспериментальные машины для усталостных испытаний стержней: вращательно-изгибающую и растягивающе-изгибающую. Эти машины реализовывали циклическую нагрузку с постоянными амплитудой и средним напряжением. Экспери-

---

<sup>4</sup>В примере рис.2.2,*а* ситуация проще, там все циклы имеют одинаковое значение  $R = -1$ .

<sup>5</sup>О сведении к отнулевому циклу см. подраздел 2.2.3.

ментально полученные числа циклов до разрушения образцов при различных амплитудах и средних напряжениях Вёлер записывал в виде таблиц. Позже подобные данные стали наносить на диаграмму, по горизонтальной оси откладывая число циклов до разрушения (обычно в логарифмическом масштабе), а по вертикальной — амплитуду повторяющейся нагрузки. Такие диаграммы называют диаграммами Вёлера (eng. Wöhler diagram или S–N diagram), кривые на таких диаграммах называют кривыми Вёлера или кривыми усталости (Wöhler curve или S–N curve).

Пример диаграммы Вёлера для подшипниковой стали приведен на рис. 2.3. На одной диаграмме может быть изображено несколько кривых Вёлера для различных значений коэффициента асимметрии циклов  $R$  (рис.2.4). Каждая точка на диаграмме Вёлера соответствует результату испытания (число циклов до разрушения) на нагрузке с постоянной амплитудой (см. рис.2.1,а). Если количество экспериментальных точек достаточно велико, то по ним можно провести кривую Вёлера. Условно говоря, деталь сломается за  $N$  циклов с амплитудой  $\sigma_a$ , если точка с такими координатами  $\{N, \sigma_a\}$  лежит выше кривой Вёлера а если лежит ниже — то не сломается.

Различают **малоцикловую усталость** (МЦУ, eng. Low Cycle Fatigue или LCF) и **многоцикловую усталость** (МнЦУ, eng. High Cycle Fatigue или HCF). В случае малоцикловой усталости в материале происходят *макроскопические* пластические деформации на каждом цикле (рис.2.5,а). Такой тип усталости обычно наблюдается вблизи концентраторов напряжений: отверстий, углов, заклёпочных или болтовых соединений и т.д. Количество циклов до разрушения имеет приблизительный диапазон в  $10 - 10^4$  циклов. МЦУ соответствует левый участок кривой Вёлера (см. рис. 2.3).

В случае многоцикловой усталости поведение материала упругое (рис.2.5,б), однако может наблюдаться *микропластичность*, то есть пла-

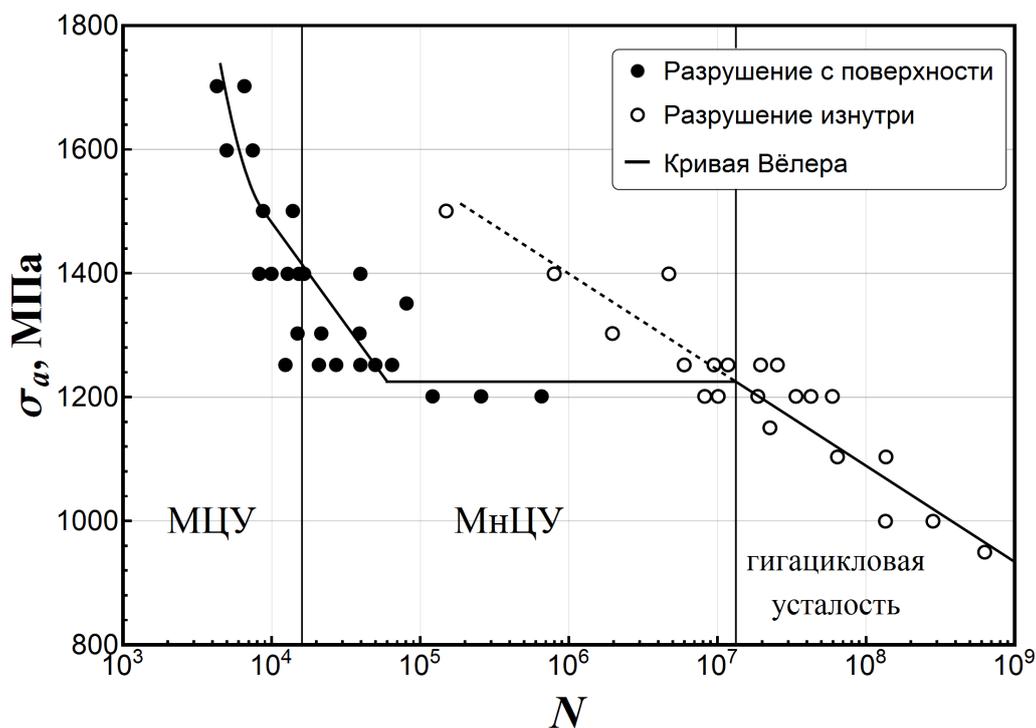


Рис. 2.3. Диаграмма Вёлера ( $R = -1$ ) для подшипниковой стали JIS SUJ2 в широких пределах числа циклов. Экспериментальные данные взяты из [161]

стические деформации в отдельных зернах металла, не заметные на макроуровне. МнЦУ реализуется вблизи слабых концентраторов напряжений или при низких, относительно малоцикловой усталости, рабочих нагрузках. В области МнЦУ находится предел выносливости<sup>6</sup>. Диапазон циклов до разрушения составляет примерно  $10^4 - 10^8$ . МнЦУ соответствует участок кривой Вёлера, лежащий правее МЦУ (см. рис. 2.3). На многоцикловую усталость, качество обработки поверхности влияет намного сильнее чем на малоцикловую.

В обоих случаях МЦУ и МнЦУ, разрушение, как правило<sup>7</sup>, начинается с поверхности, поэтому также выделяют **гигацикловую усталость** (eng. gigacycle fatigue). В этом случае, макротрещина начинает зарождаться изнутри, около дефекта или включения, а количество циклов до

<sup>6</sup>О пределе выносливости см. подраздел 2.1.4.

<sup>7</sup>Разрушение может начаться изнутри при МнЦУ и МЦУ если материал значительно неоднороден, например в случае сварного шва, либо если дефект или включение в объеме материала имеют большой размер, например, кусочек шлака в стали или иной брак.

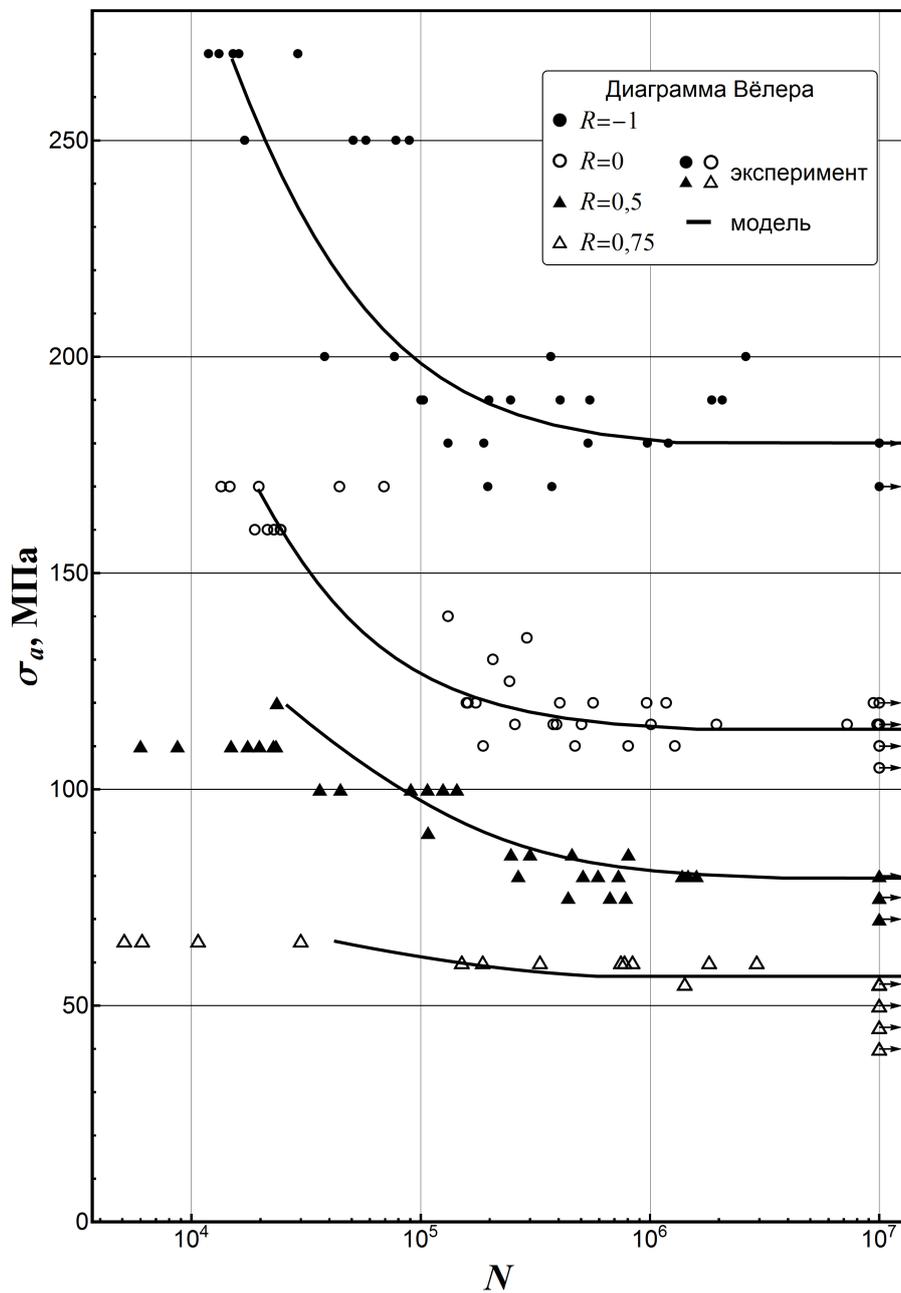


Рис. 2.4. Диаграмма Вёлера для чугуна EN-GJV-450. Изображены четыре кривые Вёлера для различных коэффициентов асимметрии циклического нагружения, экспериментальные данные (точки) взяты из [162], линии есть результат модели из раздела 2.6

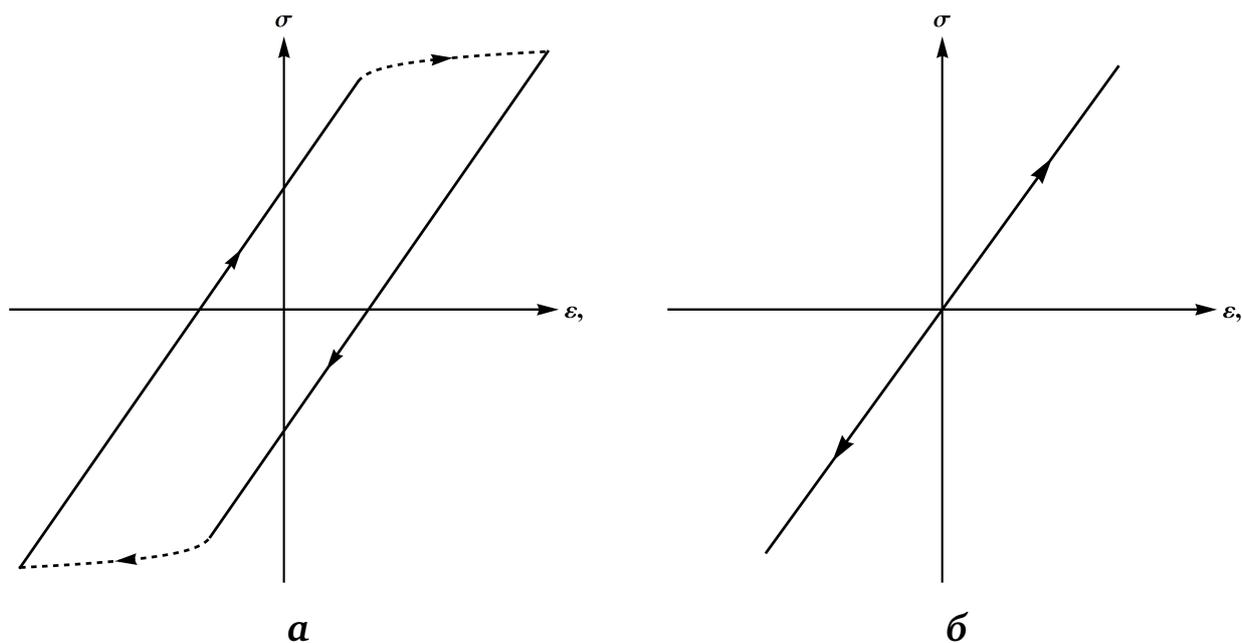


Рис. 2.5.  $\sigma - \varepsilon$  диаграммы установившегося симметричного цикла при МЦУ(а) и Мн-ЦУ(б). На сплошных участках цикла поведение материала упругое, а на пунктирных происходит пластическая деформация

разрушения обычно превышает  $10^8$ . Пример: разрушение обшивки самолета под действием звуковой нагрузки. Участок кривой Вёлера, соответствующий гигацикловой усталости, лежит справа (рис.2.3). Если, конечно, диаграмма Вёлера продолжена на такие высокие значения числа циклов  $N$ , например на диаграмме Вёлера с рис.2.4, нет области гигацикловой усталости. В большинстве случаев, участок гигацикловой усталости не строится, потому что с одной стороны, экспериментально достичь столь высоких  $N$  затруднительно (это либо требует неадекватно долгих экспериментов либо специфического оборудования), а с другой стороны, детали нечасто испытывают настолько большое число циклов за время эксплуатации.

#### 2.1.4 Предел выносливости и диаграмма Хейга(Гудмана)

На рис. 2.4 заметно, что кривые Вёлера с увеличением числа циклов  $N$  стремятся к некоторому пределу. Это же можно увидеть на рис. 2.3, если исключить из рассмотрения гигацикловую усталость<sup>8</sup>: в области МНЦУ кривая Вёлера выходит на константу. Это означает, что при нагрузках с амплитудой ниже некоторого предела, деталь не сломается «никогда»<sup>9</sup>. Этот предел называют **пределом выносливости** или **пределом усталости** (eng. endurance limit или fatigue limit). Предел выносливости различен для различных значений коэффициента асимметрии цикла  $R$  и обозначается как  $\sigma_R$ . Так,  $\sigma_{-1}$  есть предел выносливости при симметричном циклировании,  $\sigma_0$  — при отнулевом, а  $\sigma_1$  это статический предел прочности.

Для того чтобы отобразить предел выносливости  $\sigma_R$  сразу для всех значений  $R$ , используют **диаграмму Хейга** (eng. Haigh diagram) (рис.2.6), где по горизонтальной оси откладывается среднее напряжение  $\sigma_m$ , а по вертикальной — амплитуда  $\sigma_a$ . Если точка лежит ниже кривой на диаграмме Хейга, то деталь, подверженная регулярному нагружению с такими  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ , не разрушится «никогда», а если выше, то разрушится за конечное число циклов.

В качестве альтернативы диаграмме Хейга иногда встречается, очень на нее похожая диаграмма Гудмана (eng. Goodman diagram). На ней вместо амплитуды цикла  $\sigma_a$  по вертикальной оси откладывается максимальное напряжение цикла  $\sigma_{max}$ .

Для экспериментального определения предела выносливости используют итерационный **метод лестницы** (eng. staircase method) [163]. Для этого сначала выбирают: коэффициент асимметрии цикла  $R$ , для ко-

---

<sup>8</sup>В большинстве случаев детали при реальной эксплуатации не испытывают настолько высокое число циклов нагрузки.

<sup>9</sup>Понятие «никогда» может быть различным для разных деталей. Обычно это от  $5 \cdot 10^6$  до  $10^8$  циклов.

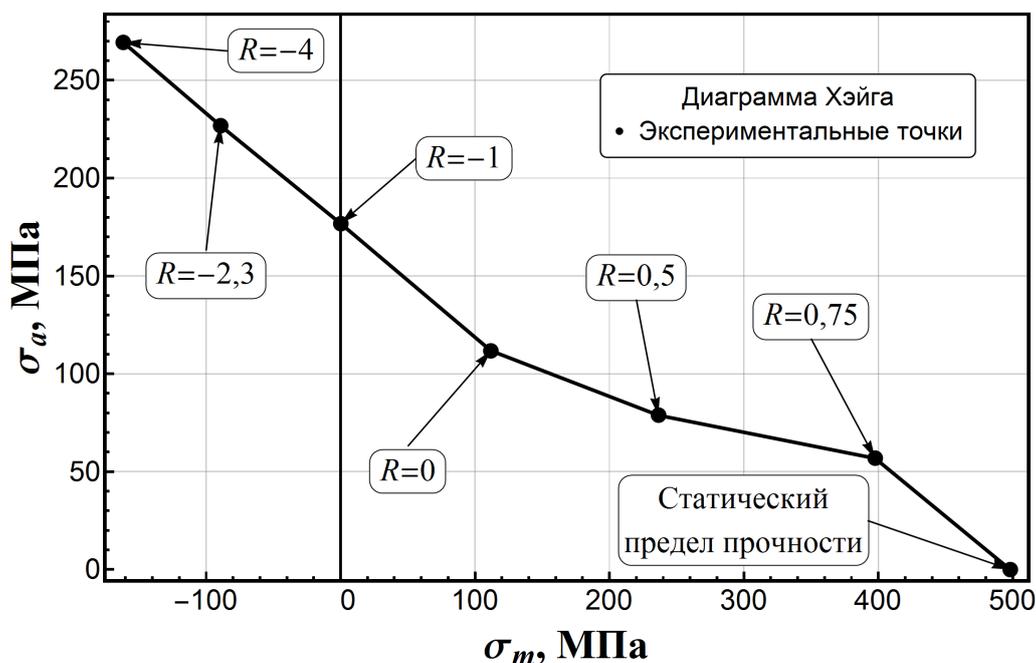


Рис. 2.6. Диаграмма Хейга для чугуна EN\_GJV\_450. Экспериментальные данные (точки) взяты из [162], точки соединены линиями для удобства отображения

торого ищется предел выносливости  $\sigma_R$ ; число циклов  $N_\infty$ , после которого испытание образца прекращается, и образец считается неразрушившимся (обычно это  $5 \cdot 10^6$ — $10^8$  циклов); стартовое значение предела выносливости  $\sigma_R^0$  (желательно близкое к действительному); шаг изменения амплитуды испытания  $\Delta\sigma_a$ . А сам алгоритм метода лестницы выглядит так:

1. Присвоить текущей амплитуде испытания  $\sigma_a^{cur}$  стартовое значение  $\sigma_R^0$ , то есть  $\sigma_a^{cur} := \sigma_R^0$  (знаком «:=» обозначена операция присваивания).
2. Провести испытание образца при амплитуде  $\sigma_a^{cur}$ .
3. Если образец разрушился, то снизить текущую амплитуду:  $\sigma_a^{cur} := \sigma_a^{cur} - \Delta\sigma_a$ , а если не разрушился, то увеличить текущую амплитуду:  $\sigma_a^{cur} := \sigma_a^{cur} + \Delta\sigma_a$ .
4. Записать результат испытания (разрушился/не разрушился) и амплитуду  $\sigma_a^{cur}$ , при которой происходило испытание, а затем вернуться к пункту 2. Один цикл из пунктов 2 → 3 → 4 назовем шагом. Сделать нужное число шагов, в зависимости от требуемой точности.

5. С этого пункта начинается подсчет предела выносливости  $\sigma_R$  по результатам испытаний. Для этого нужно сначала отбросить результаты первых  $m - 2$  шагов, где  $m$  есть номер шага, на котором *сменилось направление изменения*  $\sigma_a^{cur}$ . Например, если первые  $m - 1$  шагов образцы разрушались, а на  $m$ -й шаг не разрушился, то мы первые  $m - 1$  шагов снижали  $\sigma_a^{cur}$ , а на  $m$ -м шаге увеличили, таким образом на  $m$ -том шаге *сменилось направление изменения*  $\sigma_a^{cur}$ . Мы удаляем первые шаги, которые от стартового значения предела выносливости  $\sigma_R^0$  подводят ближе к «действительному» значению.

6. Подсчитать число разрушившихся образцов и число неразрушившихся, а затем выбрать из них минимальное. Обозначим это число  $n$ , далее будем работать только с этими  $n$  образцами.

7. Выбранные в предыдущем пункте  $n$  образцов были испытаны при разных амплитудах  $\sigma_{ai}$  (различающихся на кратное число  $\Delta\sigma_a$ ). Пусть таких амплитуд было  $s$ . Нужно отсортировать их по возрастанию и подсчитать число образцов, испытанных при каждой из амплитуд. Таким образом, при амплитуде  $\sigma_{ai}$  было испытано  $n_i$  образцов,  $i$  пробегает значения от 0 до  $s - 1$ , причем  $\sum_{i=0}^{s-1} n_i = n$ , а  $\sigma_{a0}$  есть минимальная из амплитуд и  $\sigma_{as-1}$  — максимальная.

8. Вычислить следующие выражения:

$$A = \sum_{i=0}^{s-1} i n_i, \quad B = \sum_{i=0}^{s-1} i^2 n_i. \quad (2.1)$$

9. Так как предел выносливости варьируется от образца к образцу, то он является случайной величиной. Найти среднее значение  $\bar{\sigma}_R$  и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_R}$  можно по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_R &= \sigma_{a0} + \Delta\sigma_a \left( \frac{A}{n} \pm \frac{1}{2} \right), \\ S_{\sigma_R} &= 1,62\Delta\sigma_a \left( \frac{nB - A^2}{n^2} + 0,029 \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

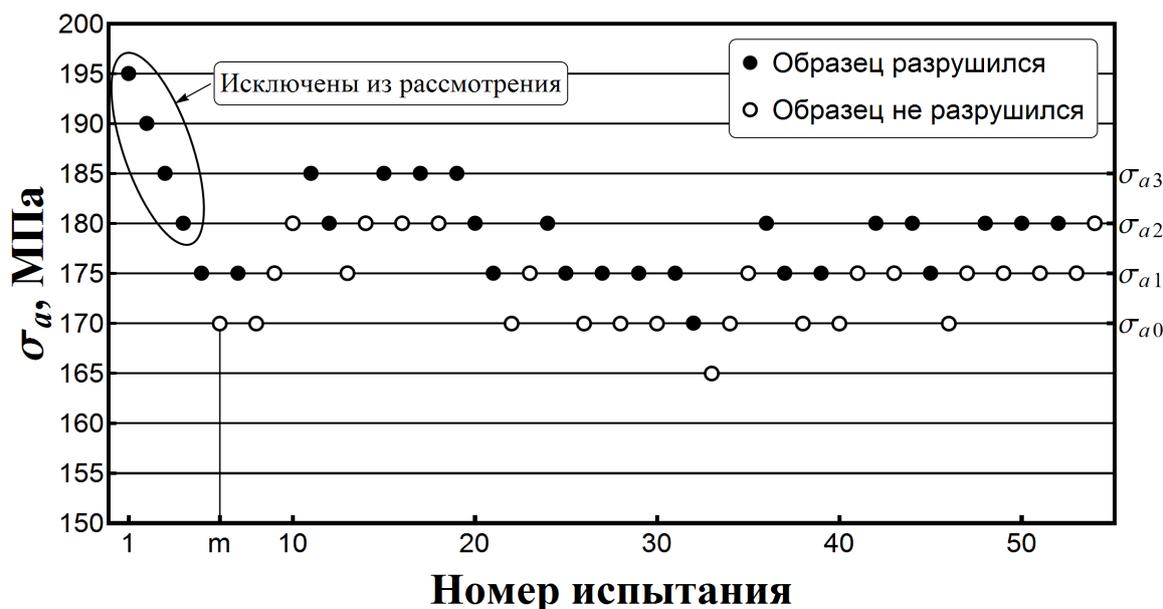


Рис. 2.7. Диаграмма испытаний по методу лестницы

где знак «+» используется, если в пункте б выбраны неразрушившиеся образцы, и «-» если разрушившиеся. Вторая формула в (2.2) является приближительной и имеет хорошую точность<sup>10</sup> пока  $\frac{nB-A^2}{n^2} > 0,3$ .

В качестве примера рассмотрим вычисление предела выносливости по данным испытаний с рис. 2.7. Так как испытания уже проведены, то начинаем с пункта 5. Первым номером испытания, на котором изменение  $\sigma_a^{cur}$  сменяет направление, является  $m = 6$ , поэтому убираем из рассмотрения первые четыре испытания. Число разрушившихся образцов равно 24, а неразрушившихся — 26, значит  $n = 24$ , и дальше будем работать с разрушившимися образцами. Число различных амплитуд испытаний  $s = 4$ , причем минимальная амплитуда  $\sigma_{a0} = 170$  МПа, а максимальная  $\sigma_{a3} = 185$  МПа. Числа испытаний, проведенных при каждом из уровней испытаний, равны  $n_i = 1, 10, 9, 4$ . Подсчитаем  $A$  и  $B$ :

$$A = \sum_{i=0}^3 in_i = 40, \quad B = \sum_{i=0}^3 i^2n_i = 82. \quad (2.3)$$

И, наконец, вычислим среднее значение и среднеквадратичекое отклоне-

<sup>10</sup>Если  $\frac{nB-A^2}{n^2} < 0,3$ , то придется проделать нетривиальные вычисления, приведенные в [163]. К счастью, такие случаи чрезвычайно редки.

ние предела выносливости по формулам (2.2) (в первой формуле выбран знак «–», так как расчет ведется по разрушившимся образцам):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_R &= 170 + 5 \left( \frac{40}{24} - \frac{1}{2} \right) = 175,8, \\ S_{\sigma R} &= 1,62 \cdot 5 \left( \frac{24 \cdot 82 - 40^2}{24^2} + 0,029 \right) = 3,82.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Как правило, стали имеют ярко выраженный предел выносливости, а алюминиевые сплавы — нет, кривая Вёлера последних плавно идёт вниз без выраженной «площадки» при движении от области МнЦУ к гигацикловой усталости.

### 2.1.5 Разброс усталостной прочности

Высокий разброс — это характерная черта усталостной прочности. Времена жизни двух одинаковых деталей, сделанных из одного и того же материала, по одной и той же технологии и подверженных одинаковому нагружению, могут отличаться более чем на порядок [164–166]. Источником этого разброса могут быть как «внутренние» факторы: небольшие различия в химическом составе, случайность зёрненной структуры, колебания концентрации структурных дефектов в объеме материала, так и «внешние»: дефекты поверхности, разница в интенсивности термической, механической и других обработок, неточное закрепление образца и т.д. При этом «внешние» факторы поддаются контролю, тогда как повлиять на «внутренние» значительно сложнее. Статистический аспект при проектировании детали очень важен: нужно контролировать вероятность ее поломки на заданном промежутке времени.

Первых успехов в статистическом описании усталостной прочности достиг немецкий инженер Х. Мюллер-Шток в 1937 году [167], предложив лог-нормальное распределение времени жизни образцов (число циклов  $N$ ), испытанных при одинаковой амплитуде циклирования, которое хо-

рошо легло на несколько сотен усталостных испытаний. Лог-нормальное распределение  $N$ , то есть такое распределение, что случайная величина  $\ln(N)$  распределена нормально, имеет плотность вероятности и функцию распределения соответственно

$$\begin{aligned} f(N) &= \frac{1}{N\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(N) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \\ F(N) &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(N) - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\operatorname{erf}$  — есть функция ошибок, а  $\mu$  и  $\sigma$  — два параметра распределения, являющихся математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением нормально распределенной величины  $\ln(N)$ . Функция распределения  $F(N)$  имеет смысл вероятности разрушения образца за  $N$  или менее циклов.

Параметры  $\mu$  и  $\sigma$  можно вычислить по формулам

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(N_i)}{m}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\ln(N_i) - \mu)^2}{m - 1}}, \quad (2.6)$$

где  $N_i$ ,  $i = 1..n$  — есть количества циклов до разрушения  $n$  образцов, испытанных при некоторой одной и той же амплитуде нагружения.

Позже, в 1951 году, шведский ученый Валодди Вейбулл [168], применив свои наработки на тему статистики статической прочности к усталостной прочности, предложил трёхпараметрическое распределение с плотностью вероятности и функцией распределения

$$\begin{aligned} f(N) &= \frac{b}{a} \left(\frac{N - N_0}{a}\right)^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{N - N_0}{a}\right)^b\right), \\ F(N) &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{N - N_0}{a}\right)^b\right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

параметр  $N_0$  задает минимально возможное значение  $N$ ,  $a$  — масштабирующий параметр,  $b$  отвечает за форму распределения. Это распределе-

ние называют трёхпараметрическим распределением Вейбулла. Распределения (2.5) и (2.7), на сегодняшний день, являются самыми популярными в статистике усталостного разрушения. Распределение (2.7) более гибкое за счет большего числа параметров, поэтому его удобнее использовать при большом числе испытаний, кроме того наличие нижней границы времени жизни ( $F(N) \equiv 0, N \leq N_0$ ) полезно на практике при оценке числа отказов, тогда как для (2.5),  $F(N)$  конечно вплоть до  $N = 0$ .

Для параметров  $a, b, N_0$  не существует явных формул, их можно найти, например, минимизируя невязку с экспериментальными данными. Пусть  $N_i, i = 1..n$  есть количества циклов до разрушения, отсортированные по порядку,  $n$  образцов, испытанных при некоторой одной и той же амплитуде нагружения. Примерно вычислить вероятность  $P(N_i)$  разрушения образца за  $N_i$  циклов или менее можно по формуле<sup>11</sup>

$$P(N_i) = \frac{i - 1/2}{n}. \quad (2.8)$$

Теперь значения параметров  $a, b, N_0$  можно найти из условия минимума невязки

$$X = \sum_{i=1}^n (F(N_i) - P(N_i))^2 \quad (2.9)$$

между экспериментальными данными  $P(N_i)$  и значениями функции распределения  $F(N_i)$ . Здесь в качестве невязки была использована сумма квадратов отклонений.

Рассмотрим пример: пусть на некоторой амплитуде нагружения испытаны восемь образцов и получены времена жизни  $N_i = \{10^5; 1,03 \cdot 10^5; 1,98 \cdot 10^5; 2,47 \cdot 10^5; 4,07 \cdot 10^5; 5,46 \cdot 10^5; 18,6 \cdot 10^5; 20,7 \cdot 10^5\}$ . По формуле (2.8) вычислим  $P(N_i) = \{0,0625; 0,1875; 0,3125; 0,4375; 0,5625; 0,6875; 0,8125; 0,9375\}$ . Наконец, минимизируя невязку получим  $a = 444369, b = 0,555, N_0 = 0,91 \cdot 10^5$ , результаты приведены на рис. 2.8.

<sup>11</sup>В [169] предложена немного иная аппроксимация  $P(N_i) = (3i - 1)/(3n + 1)$ .

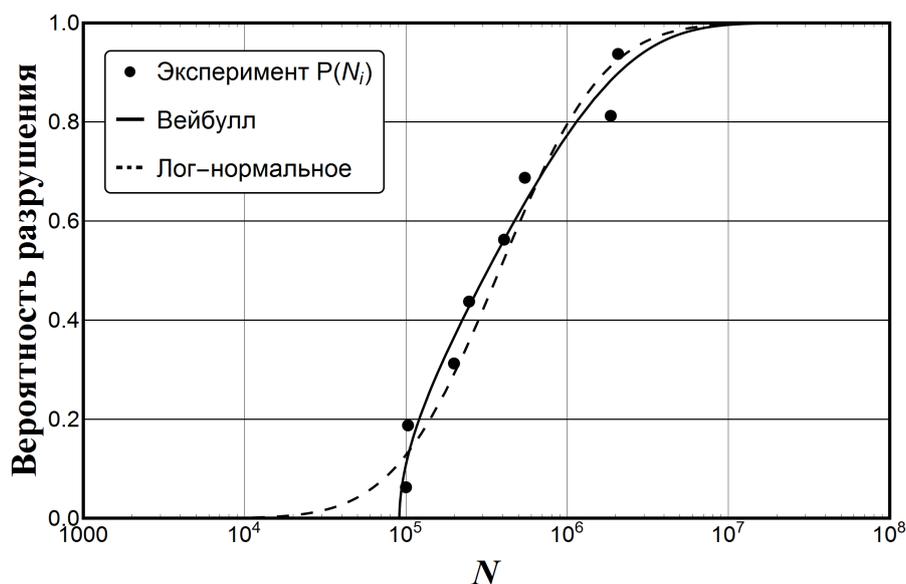


Рис. 2.8. Определение параметров распределения времени жизни по экспериментальным данным. Параметры лог-нормального распределения вычислены по формуле (2.6), параметры распределения Вейбулла получены при минимизации невязки (2.9)

Стоит отметить, что применять экспериментально определенные распределения к реальным деталям нужно с осторожностью. На практике разброс может быть значительно больше чем в эксперименте, потому что, с одной стороны, экспериментальные образцы более похожи друг на друга, чем реальные детали: материал из одной плавки, изготовлены на одном станке, большое внимание к качеству поверхности, и с другой стороны, при реальной эксплуатации присутствуют новые факторы, такие как незапланированные нагрузки, колебания температуры, агрессивная внешняя среда, удары и т.д.

### 2.1.6 О физических основах усталости

Первым исследованием физических изменений материала в ходе усталостного процесса была работа англичан Джеймса Эвинга и Дж. Хамфри [171]. В своих экспериментах они циклически нагружали железные стержни с амплитудами, равными 64 — 100 % предела текучести и наблюдали за зернами на поверхности материала с помощью микроскопа.

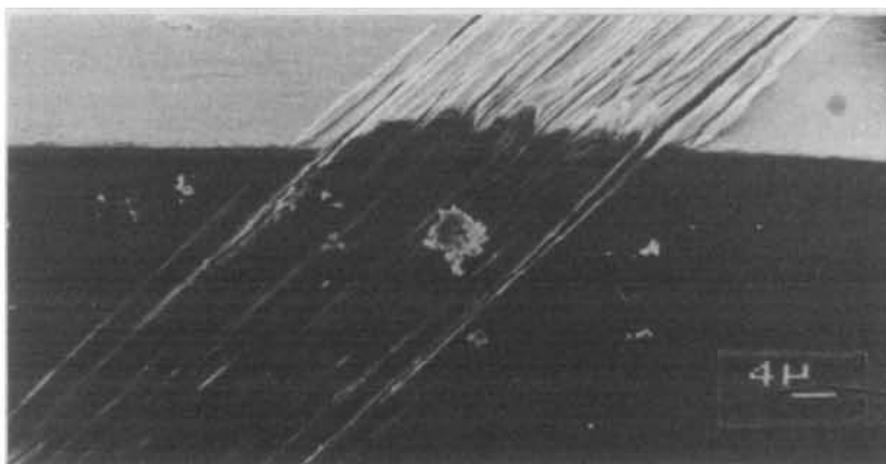
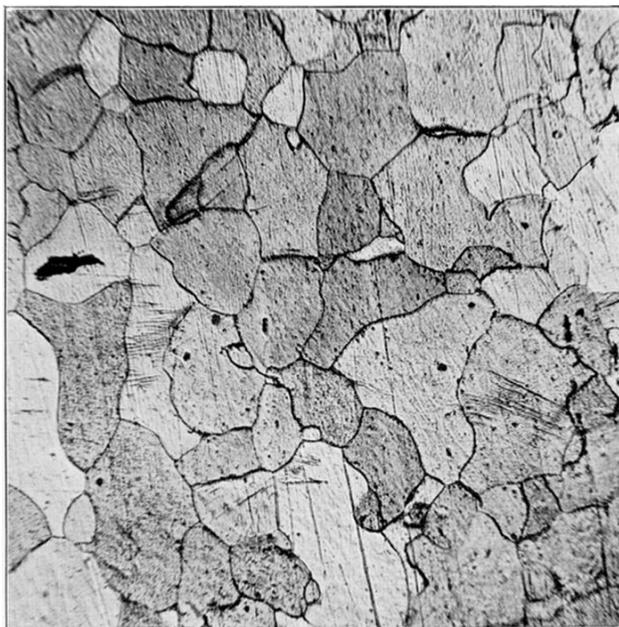


Рис. 2.9. Выход на поверхность системы параллельных плоскостей скольжения. Фотография взята из [170]

Экспериментаторы впервые зафиксировали физические изменения в материале, проявляющиеся уже в первые десятки-сотни циклов.

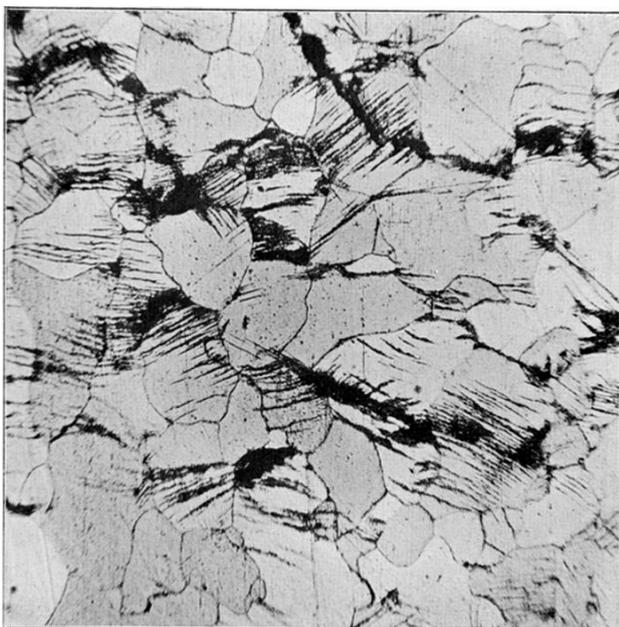
Итак, после нескольких циклов на некоторых зернах наблюдаются линии скольжения наподобие тех, что можно заметить при одноосном растяжении образца выше предела текучести. Эти линии есть выход на поверхность плоскостей скольжения. При продолжении циклирования, появляются новые линии скольжения, а уже существующие визуально расширяются, постепенно превращаясь в полосы с плохо выраженными границами. Видимое расширение линий скольжения происходит вследствие упрочнения материала. Предположим, произошел сдвиг вдоль одной из плоскостей скольжения. Из-за упрочнения материала на следующем цикле нагружения повторное скольжение вдоль этой же плоскости затруднено вследствие классического упрочнения в результате размножения и перемещения дислокаций. Кроме того, в затруднении повторного движения вдоль линии скольжения играет роль геометрическое изменение поверхности, то есть образование «ступенек» в которые «упирается» плоскость скольжения (рис.2.9), на боковых поверхностях этих «ступенек» может расти оксидный слой, дополнительно затрудняющий движение. Из-за упрочнения рядом с первой поверхностью скольжения



*a*



*б*



*в*



*г*

Рис. 2.10. Зарождение трещины при циклическом деформировании железа: *a* —  $5 \cdot 10^3$  циклов; *б* —  $4 \cdot 10^4$  циклов; *в* —  $6 \cdot 10^4$  циклов; *г* —  $7 \cdot 10^4$  циклов; фото взято из [171]

образуется еще одна параллельная поверхность. Процесс повторяется, и толщина исходной линии скольжения визуально растёт. Затем в зерне с широкой полосой из линий скольжения образуется трещина, которая далее начинает распространяться на соседние зерна, тоже ослабленные полосами скольжения. Вскоре после этого трещина на поверхности становится видна невооруженным глазом, а еще через несколько десятков циклов происходит разрушение образца.

На рис. 2.10 изображено зарождение трещины в образце из железа под действием симметричного циклирования с амплитудой 200 МПа. После  $5 \cdot 10^3$  циклов (**а**) видны тонкие линии скольжения на многих зёрнах, а на двух из них видны развитые системы полос скольжения (продолговатое зерно левее центра и зерно правее и чуть ниже центра). Спустя  $4 \cdot 10^4$  циклов (**б**) уже многие зёрна имеют развитые системы полос скольжения, полосы скольжения распространяются на соседние зёрна, начинают образовываться трещины. Следующие  $2 \cdot 10^4$  циклов (**в**) эти процессы развиваются. На  $7 \cdot 10^4$  циклах (**г**) проведены шлифовка и травление, удалившие практически все следы полос скольжения, оставив видными образовавшиеся трещины. Самая крупная из них видна в правой верхней части фотографии, выходя из середины верхней границы, она продолжается вправо и вниз. На этом моменте вне рассматриваемой области произошло разрушение образца.

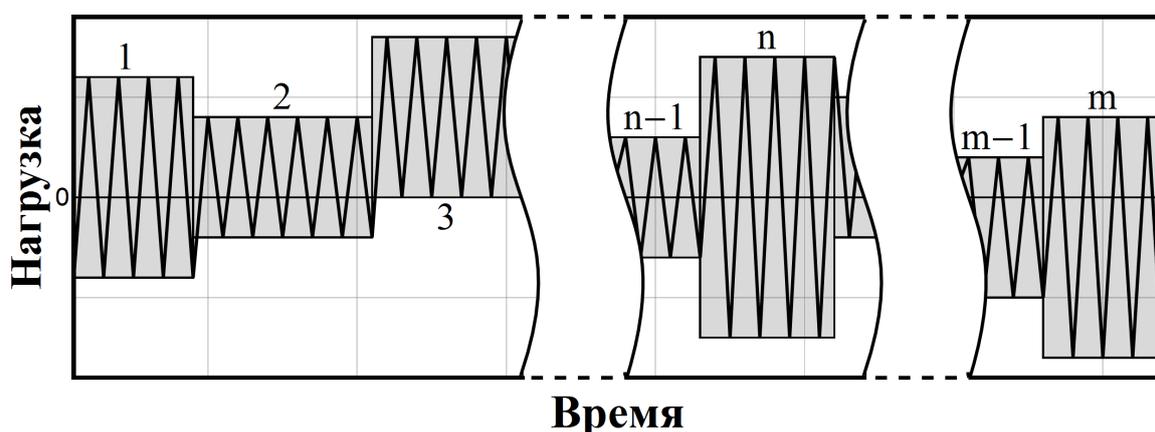


Рис. 2.11. Блочное нагружение

## 2.2 Линейное суммирование повреждений

### 2.2.1 Гипотеза Пальмгрена – Майнера

Для оценки времени жизни детали при нагружении более сложном, чем с постоянной амплитудой, используют гипотезу о линейном суммировании повреждений, называемую также гипотезой Пальмгрена – Майнера (eng. Palmgren – Miner rule или Miner rule). Она состоит в том, что усталостные повреждения, накопленные на различных участках истории нагружения, независимы и суммируются линейно, а разрушение происходит, когда параметр повреждённости достигает единицы:  $D = \sum_i D_i = 1$ , где  $D_i$  есть повреждённости, накопленные на различных участках истории нагружения. Эта гипотеза была впервые предложена в 1924 году шведским инженером Арвидом Пальмгеном [172] и экспериментально исследована в 1945 году американцем М. Майнером [173].

### 2.2.2 Оценка времени жизни на блочном нагружении

Интересным с точки зрения практики и простым с экспериментальной точки зрения является **блочное нагружение** (рис.2.11), состоящее из блоков нагружения с постоянной амплитудой. Число циклов постоян-

ной амплитуды в блоках может быть разным: от десятков до миллионов.

Оценим время жизни детали, подверженной блочному нагружению, при помощи гипотезы Пальмгрена – Майнера, имея в наличии диаграмму Вёлера. Пусть имеется блочное нагружение из  $m$  блоков, необходимо найти номер блока  $n < m$ , на котором произойдет разрушение.  $i$ -й блок содержит  $N_i$  циклов с амплитудой  $\sigma_i^{(a)}$  и средним напряжением  $\sigma_i^{(m)}$ ,  $i = 1..m$ . Следуя гипотезе, мы должны просуммировать поврежденности  $D_i$ , накопленные на каждом из блоков. Рассмотрим некоторый блок с номером  $i$  и определим  $D_i$ . Из диаграммы Вёлера известно  $N_f(\sigma_i^{(a)}, \sigma_i^{(m)})$  — число циклов до разрушения детали при нагружении с постоянной амплитудой  $\sigma_i^{(a)}$  и средним напряжением  $\sigma_i^{(m)}$ , то есть за  $N_f$  циклов накопится поврежденность, равная 1. Тогда из гипотезы следует что за каждый единичный цикл будет накапливаться поврежденность  $\Delta D_i = \frac{1}{N_f(\sigma_i^{(a)}, \sigma_i^{(m)})}$ , а всего в  $i$ -м блоке  $N_i$  таких циклов, поэтому  $D_i = \Delta D_i N_i = \frac{N_i}{N_f(\sigma_i^{(a)}, \sigma_i^{(m)})}$ . Разрушение произойдет на  $n$ -м блоке, когда суммарная поврежденность достигнет единицы:

$$D = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_f(\sigma_i^{(a)}, \sigma_i^{(m)})} = 1. \quad (2.10)$$

$N_f(\sigma_i^{(a)}, \sigma_i^{(m)})$  определяется по диаграмме Вёлера. Однако диаграмма Вёлера (рис.2.4) обычно представляет собой несколько кривых с различными значениями коэффициента асимметрии цикла  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max} = (\sigma_m - \sigma_a) / (\sigma_m + \sigma_a)$  (причем зачастую это 1–2 кривых с  $R = 0$  и/или  $R = -1$ ), тогда как в блоках значение  $R$  может быть любым. Чтобы решить эту проблему, используют метод сведения к эквивалентному отнулевому циклу, приведенный в следующем подразделе.

### 2.2.3 Сведение к отнулевому циклу

Сведение к отнулевому циклу применяется чтобы оценивать вклад циклов с произвольными значениями  $R$  по единственной кривой Вёлера с  $R = 0$  (Для некоторых формул сведения к отнулевому циклу требуется две кривых Вёлера с  $R = 0$  и  $R = -1$ ). Метод состоит в том, чтобы по заданным  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  цикла находить амплитуду  $\sigma_a^0$  эквивалентного отнулевого цикла<sup>12</sup>. Эквивалентного в том смысле, что в обоих случаях материал выдержит одинаковое количество циклов, то есть  $N_f(\sigma_a, \sigma_m) = N_f(\sigma_a^0, \sigma_a^0)$ . Существует множество способов сведения к отнулевому циклу, здесь будут приведены три из них.

**Формула Одинга.** Формула Одинга, по-видимому, является самой популярной формулой сведения к эквивалентному отнулевому циклу. Она выглядит следующим образом:

$$\sigma_a^0 = \begin{cases} (0.2\sigma_m + \sigma_a)/\sqrt{2}, & \sigma_m < 0 \\ \sqrt{\sigma_a(\sigma_m + \sigma_a)/2}, & \sigma_m \geq 0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Для применения формулы требуется только кривая Вёлера с  $R = 0$ . Формула Одинга — это эмпирическая формула, созданная на основе многочисленных экспериментальных данных. Она дающая приемлемые результаты для широкого класса металлов.

Если в истории нагружения присутствуют циклы с высоким средним напряжением, то нужно действовать аккуратно: формула (2.11) очень неконсервативна при оценке поврежденности, вносимой такими циклами. Действительно, в правой части рис. 2.12,**a** видно, что кривая, задаваемая формулой Одинга, продолжается далеко за статический предел прочности, то есть за линию  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_u$ , где  $\sigma_u$ <sup>13</sup> есть численное

<sup>12</sup>Иногда вместо эквивалентного отнулевого цикла используют эквивалентный симметричный цикл с  $R = -1$ .

<sup>13</sup>Индекс «u» означает ultimate tensile strength.

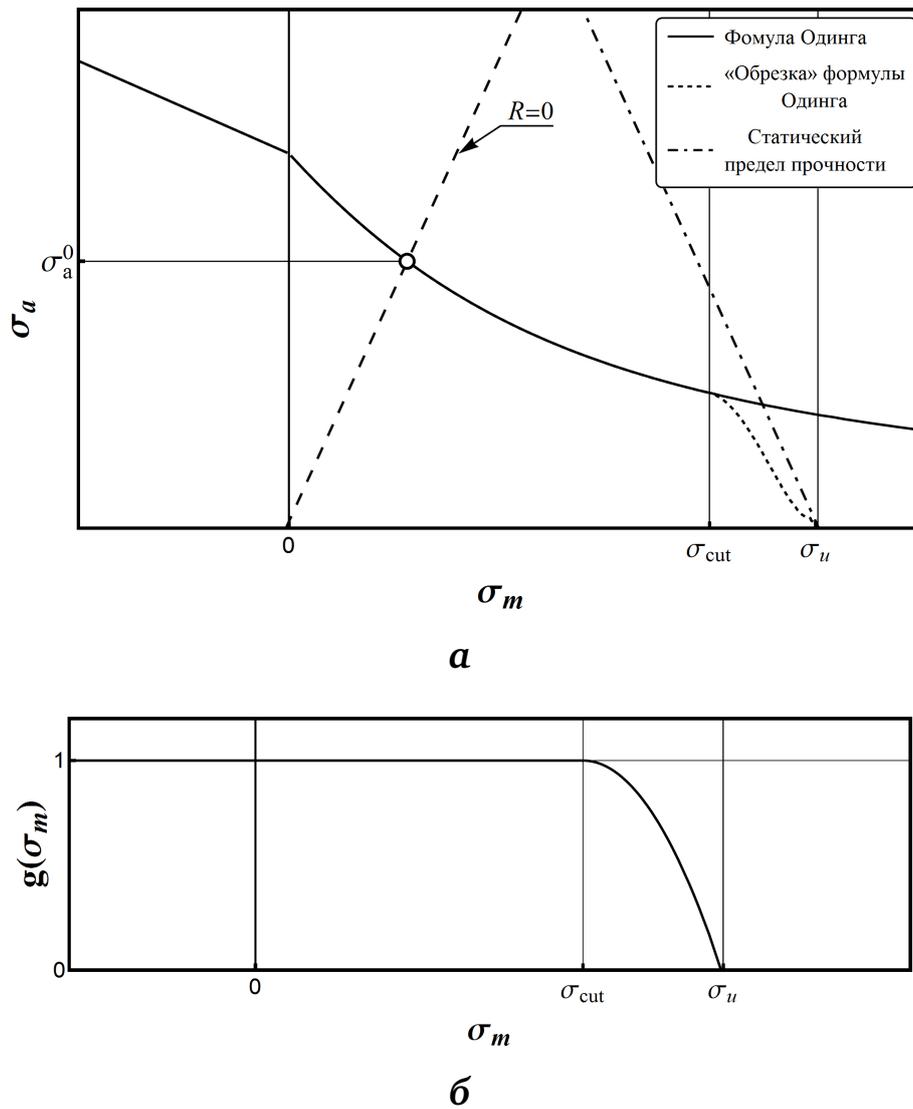


Рис. 2.12. Формула Одингга: **а** — кривая задаваемая формулой Одингга; **б** — функция „обрезающая“ формулу Одингга до достижения статического предела прочности

значение статического предела прочности. Можно исправить этот недостаток искусственно «обрезав» формулу (2.11) до достижения  $\sigma_u$  с помощью деления (2.11) на функцию  $g(\sigma_u)$  (рис.2.12,б):

$$\sigma_a^0 = \begin{cases} (0.2\sigma_m + \sigma_a)/\sqrt{2}, & \sigma_m < 0 \\ \sqrt{\sigma_a(\sigma_m + \sigma_a)/2}/g(\sigma_m), & \sigma_m \geq 0 \end{cases}, \quad (2.12)$$

$$g(\sigma_m) = \begin{cases} 1, & \sigma_m < \sigma_{cut} \\ 1 - \left(\frac{\sigma_m - \sigma_{cut}}{\sigma_u - \sigma_{cut}}\right)^2, & \sigma_m \geq \sigma_{cut} \end{cases},$$

где  $\sigma_{cut}$  это уровень среднего напряжения с которого мы начинаем «обре-

зять» кривую задаваемую формулой Одингга. Величина  $\sigma_{cut}$  не обязательно должна быть константой. Можно поставить  $\sigma_{cut}$  в зависимость от  $\sigma_a^0$ , однако в этом случае (2.12) усложнится, превратившись из явной формулы в уравнение относительно  $\sigma_a^0$ . Впрочем, реализация численного решения такого уравнения не должна доставить проблем. Функция  $g(\sigma_m)$ , приведённая в (2.12) является лишь примером, можно использовать иную.

**Линейное сведение к отнулевому циклу.** Если известны две кривые Вёлера с  $R = 0$  и  $R = -1$ , то для нахождения  $\sigma_a^0$  возможно использовать их обе. В этом случае предполагается линейная зависимость  $\sigma_a^0$  от характеристик исследуемого цикла  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  (рис.2.13):

$$\sigma_a^0 = k_1\sigma_a + k_2\sigma_m. \quad (2.13)$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  не являются константами. Кривые Вёлера задаются функциями  $\sigma_a^0(N)$  и  $\sigma_a^{-1}(N)$ , используем их для определения коэффициентов. В случаях  $R = -1$  и  $R = 0$  (2.13) обретает вид

$$\begin{aligned} \sigma_a^0(N) &= k_1\sigma_a^{-1}(N), \\ \sigma_a^0(N) &= k_1\sigma_a^0(N) + k_2\sigma_a^0(N). \end{aligned} \quad (2.14)$$

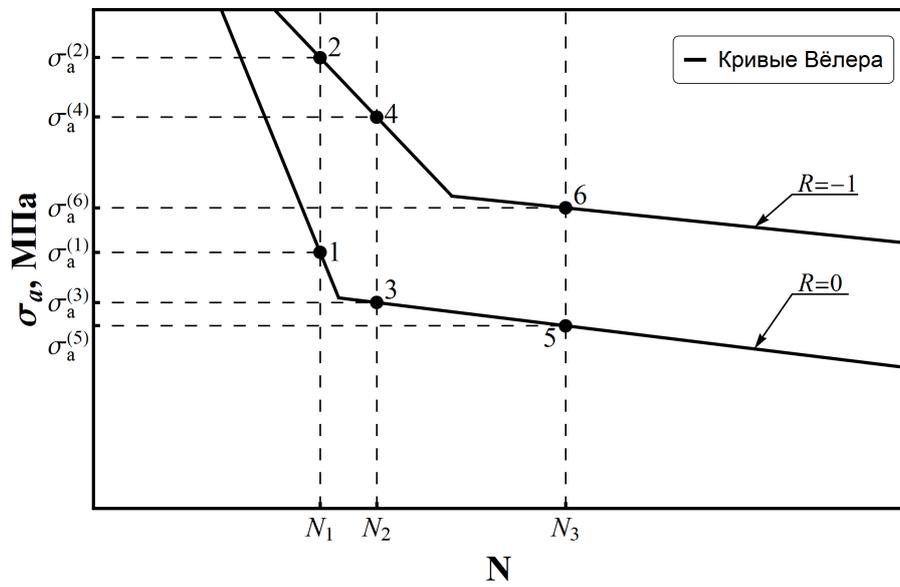
Из системы (2.14) получим  $k_1 = \sigma_a^0(N)/\sigma_a^{-1}(N)$ ,  $k_2 = 1 - \sigma_a^0(N)/\sigma_a^{-1}(N)$ , и (2.13) примет вид

$$\sigma_a^0(N) = \frac{\sigma_a^0(N)}{\sigma_a^{-1}(N)}\sigma_a + \left(1 - \frac{\sigma_a^0(N)}{\sigma_a^{-1}(N)}\right)\sigma_m. \quad (2.15)$$

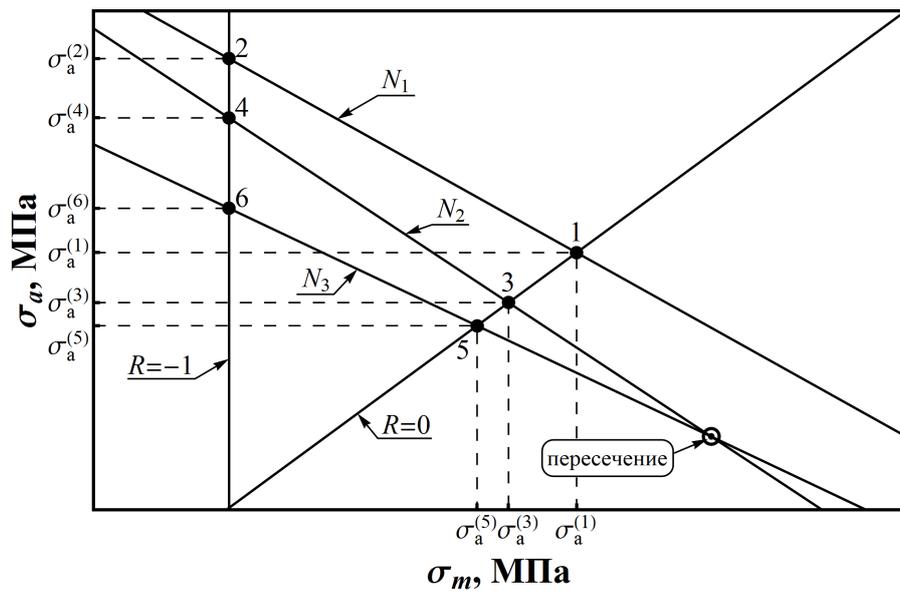
При подстановке конкретных  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$  (2.15) становится уравнением относительно  $N$ , обозначим его решение<sup>14</sup>  $\hat{N}$ . Это значение и является искомым числом циклов до разрушения, а амплитуда эквивалентного отнулевого цикла будет равна  $\sigma_a^0(\hat{N})$ .

На рис. 2.13 приведен пример линейного сведения к эквивалентному отнулевому циклу по двум кривым Вёлера для трёх значений  $N$ . Точки

<sup>14</sup>Скорее всего, решать уравнение придется численно.



**а**



**б**

Рис. 2.13. Линейное сведение к отнулевому циклу: **а** — 2 кривые Вёлера и 3 значения  $N$ ; **б** — прямые в координатах  $\sigma_m, \sigma_a$  проведённые через точки соответствующие этим значениям  $N$

1–6 на рис.2.13,**а** и точки 1–6 на рис.2.13,**б** это одни и те же точки, просто изображенные в разных координатах. Все циклы с  $\{\sigma_m, \sigma_a\}$ , лежащими на прямой, проходящей через точки 1 и 2 (см. рис. 2.13**б**) имеют эквивалентный отнулевой цикл с амплитудой  $\sigma_a^{(1)}$  и число циклов до разрушения  $N_1$ . Аналогично прямой, проходящей через точки 3 и 4, соответствует отнулевая амплитуда  $\sigma_a^{(3)}$  и число циклов  $N_2$ , а прямой, проходящей через точки 5 и 6 — амплитуда  $\sigma_a^{(5)}$  и число циклов  $N_3$ . Однако прямые иногда могут пересекаться<sup>15</sup>, на рис.2.13,**б** прямая, соответствующая  $N_2$ , пересекается с прямой соответствующей  $N_3$ . Это приводит к неединственности решений уравнения (2.15) при рассмотрении цикла с  $\{\sigma_a, \sigma_m\}$ , соответствующими точке пересечения. В таких случаях следует выбирать более опасную прямую, здесь это прямая  $N_2$ , так как  $N_2 < N_3$ .

Можно модифицировать этот метод сведения к отнулевому циклу, заменив линейную аппроксимацию (2.13) на какую-нибудь другую, например, наподобие формулы Одингга. А также, если даны дополнительные кривые Вёлера помимо  $R = 0$  и  $R = -1$ , их можно использовать в нахождении коэффициентов аппроксимации.

**Сведение к отнулевому циклу по диаграмме Хейга.** Использовать сведение к отнулевому циклу по диаграмме Хейга возможно, если на диаграмме отмечено достаточно много экспериментальных точек. Аппроксимируем экспериментальные точки функцией  $f(\cdot)$ , то есть  $\sigma_a^e = f(\sigma_m^e)$ <sup>16</sup> (рис.2.14,**а**). Циклы с  $\{\sigma_m = x, \sigma_a = f(x)\}$  для любых  $x$  эквивалентны по определению: все они лежат на диаграмме Хейга, то есть для всех них число циклов до разрушения неограниченно велико. Теперь примем **гипотезу**, что формула эквивалентности для циклов с конечным временем жизни *такая же*, как и для циклов с неограниченным време-

<sup>15</sup>Все прямые, кроме параллельных, пересекаются, здесь, конечно же, речь идет о пересечениях в интересной нам области: при  $\sigma_a > 0$  и не слишком низких  $\sigma_m$ .

<sup>16</sup>Индекс «e» (endurance) указывает на то что эти величины относятся к пределу выносливости.

нем жизни.

«Такая же» означает, что при нахождении амплитуды эквивалентного отнулевого цикла  $\sigma_a^0$  функция  $f(\sigma_m)$  равномерно «растягивается» в  $a$  раз, то есть выполняется преобразование  $\sigma_m \rightarrow a\sigma_m$ ,  $\sigma_a \rightarrow a\sigma_a$ . При этом уравнение, задающее исходную кривую  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ , преобразуется в  $\sigma_a/a = f(\sigma_m/a)$ , откуда получим (см. рис. 2.14,а):

$$\sigma_a = af(\sigma_m/a). \quad (2.16)$$

Чтобы получить амплитуду эквивалентного цикла для цикла с заданными  $\sigma_a$  и  $\sigma_m$ , необходимо решить<sup>17</sup> уравнение (2.16) относительно  $a$ . Искомая амплитуда будет равна

$$\sigma_a^0 = a\sigma_0, \quad (2.17)$$

где  $\sigma_0$  есть предел выносливости при  $R = 0$ .

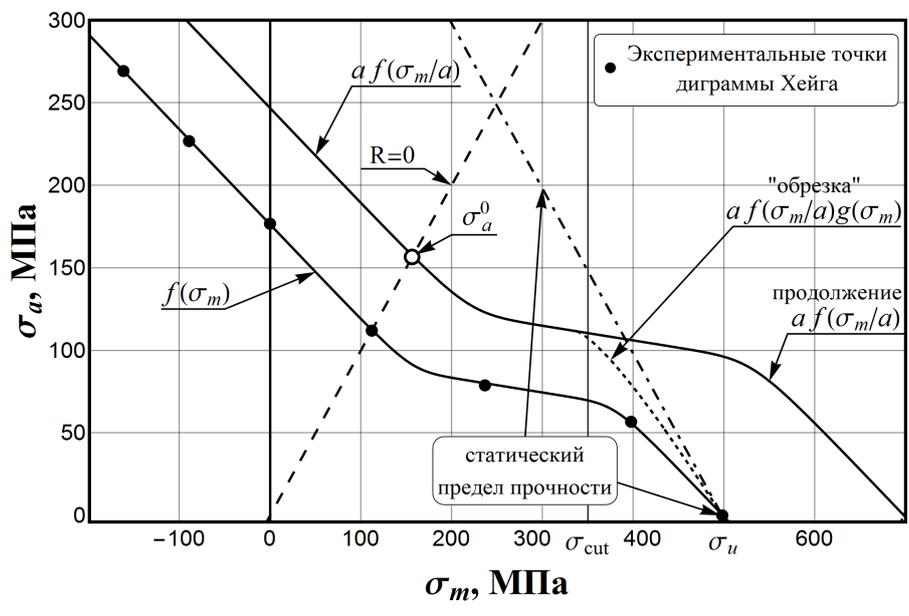
Формула (2.16),(2.17) неконсервативна при оценке времени жизни циклов при высоком среднем напряжении (правая часть рис. 2.14,а). Для устранения этого недостатка можно применить приём, использованный нами в случае формулы Одингга, то есть искусственно «обрезать» функцию (2.16) при приближении к статическому пределу прочности  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_u$  с помощью умножения на функцию  $g(\sigma_m)$  (рис.2.14,б):

$$\begin{aligned} \sigma_a &= af(\sigma_m/a)g(\sigma_m), \\ g(\sigma_m) &= \begin{cases} 1, & \sigma_m < \sigma_{cut} \\ 1 - \left( \frac{\sigma_m - \sigma_{cut}}{\sigma_u - \sigma_{cut}} \right)^\alpha, & \sigma_m \geq \sigma_{cut} \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

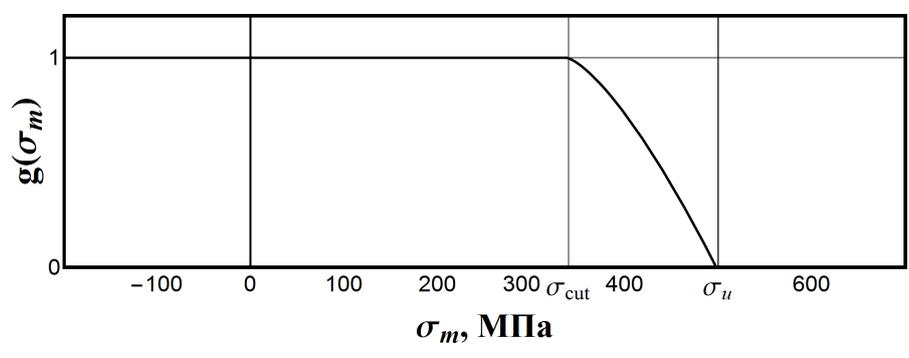
где  $\sigma_{cut}$ <sup>18</sup> есть уровень среднего напряжения, с которого мы начинаем «обрезать» (2.16),  $\alpha$  — положительный параметр. При желании функцию  $g(\sigma_m)$  можно взять отличной от приведенной.

<sup>17</sup>Скорее всего потребуется численное решение.

<sup>18</sup>Как и в случае формулы Одингга,  $\sigma_{cut}$  не обязательно должна быть константой и может зависеть от  $\sigma_a^0$ .



**а**



**б**

Рис. 2.14. **а** — использование диаграммы Хейга для построения формулы сведения к отнулевому циклу; **б** — функция „обрезающая“ формулу сведения к отнулевому циклу до достижения статического предела прочности

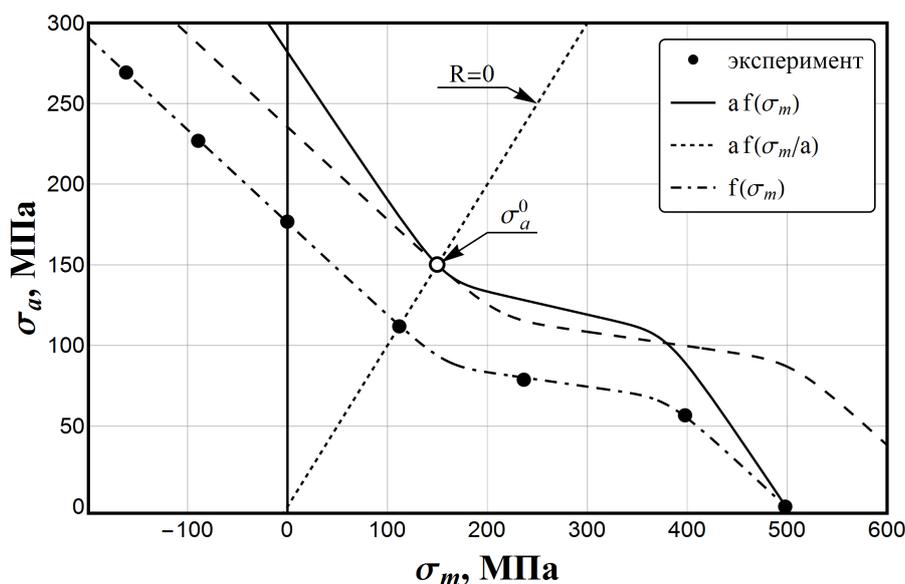


Рис. 2.15. Сравнение формул (2.19) и (2.16)

Чтобы не иметь проблем с оценкой поврежденности, вносимой циклами с высоким средним напряжением, вместо того, чтобы «растягивать» функцию  $f(\sigma_m)$  вдоль обеих осей, можно растянуть её только по вертикальной:  $\sigma_m \rightarrow \sigma_m$ ,  $\sigma_a \rightarrow a\sigma_a$ . При этом уравнение, задающее исходную кривую  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ , преобразуется в  $\sigma_a/a = f(\sigma_m)$ , а значит

$$\sigma_a = a f(\sigma_m), \text{ откуда } a = \frac{\sigma_a}{f(\sigma_m)}. \quad (2.19)$$

Для нахождения искомой амплитуды эквивалентного отнулевого цикла  $\sigma_a^0$  остаётся только решить уравнение

$$\sigma_a^0 = a f(\sigma_a^0),$$

используя значение  $a$ , полученное из (2.19). Стоит отметить что формула (2.19) заметно менее консервативна, чем (2.16) (см. рис. 2.15).

#### 2.2.4 Методы схематизации истории нагружения

С помощью гипотезы Пальмгрена – Майнера можно оценивать время жизни деталей и для более сложных историй нагружения, чем блочное. Однако сначала необходимо **схематизировать историю нагруже-**

ния, то есть разбить её на отдельные циклы. Это можно делать различными способами. Здесь будут приведены два двухпараметрических метода, то есть разбивающих историю нагружения на циклы с различными амплитудами и средними напряжениями. Существует также множество однопараметрических методов, таких как метод максимумов, метод пересечений, метод размахов и т.д. Они выдают на выходе только амплитуды циклов, а среднее напряжение считается постоянным и вычисляется по всей истории нагружения. Здесь такие методы приведены не будут, так как они менее универсальны, а их единственное преимущество — простота — не играет большой роли ввиду элементарной алгоритмизации и быстроты двухпараметрических методов.

**Метод дождя.** Один из самых лучших и универсальных методов схематизации истории нагружения под названием **метод дождя** (eng. rainflow method) был предложен японскими инженерами Татсуо Эндо и М. Матсуиши в 1968 году [174]. По-видимому, создатели метода вдохновились потоками дождя, текущими вниз по японским многоярусным крышам. Для удобства график истории нагружения разворачивают осью времени вниз (рис.2.16). А затем применяют сам метод:

1. Из начала истории нагружения, а также из каждого максимума и минимума «вовнутрь» вытекает поток (то есть из каждой точки кроме последней) и течет «вниз».

2. Поток, вытекающий из минимума, прерывается, если пролетает мимо более глубокого минимума<sup>19</sup>.

3. Поток, вытекающий из максимума, прерывается, если пролетает мимо более высокого максимума<sup>20</sup>.

4. Поток прерывается, если встречает поток, текущий свыше.

---

<sup>19</sup>То есть точки, имеющей более низкое значение напряжения.

<sup>20</sup>То есть точки, имеющей более высокое значение напряжения.

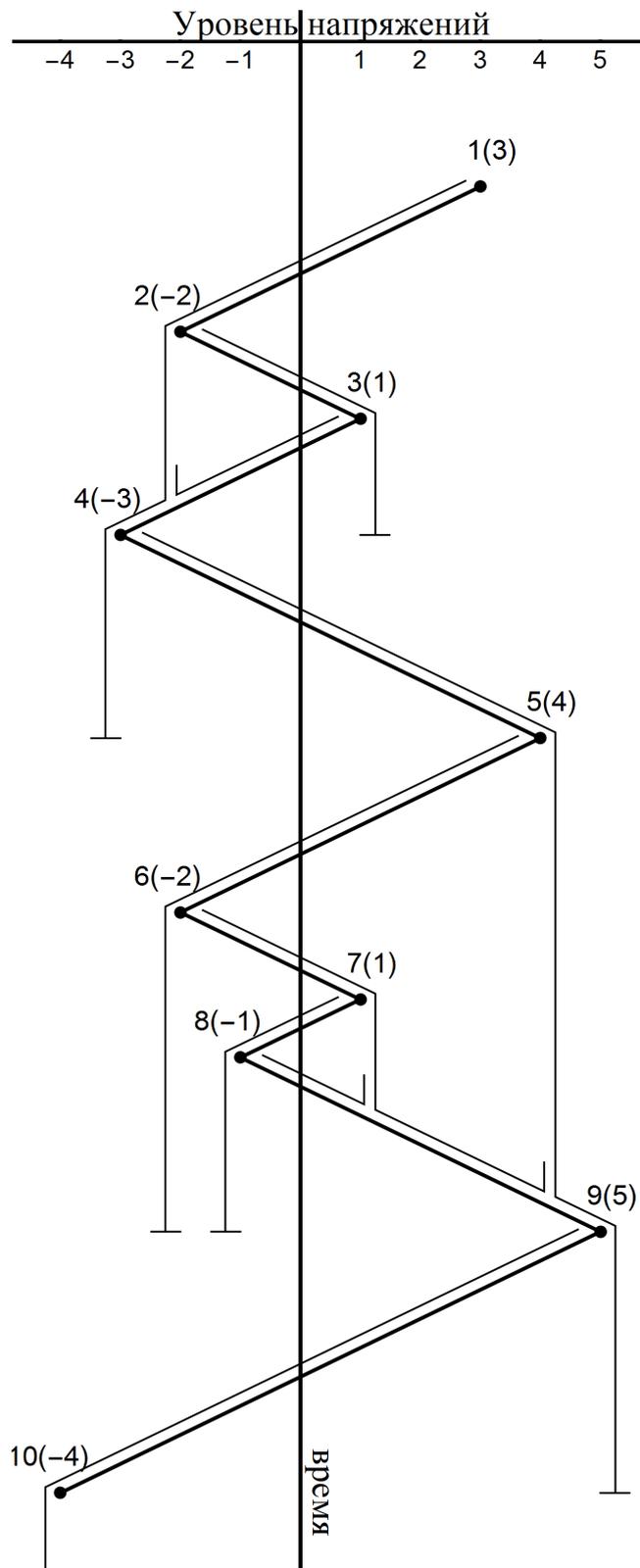


Рис. 2.16. Схематизация истории нагружения методом дождя

Таблица 2.1. Схематизация истории нагружения рис.2.16 методом дождя

Поток №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_{min}$	-3	-2	-2	-3	-2	-2	-1	-1	-4
$\sigma_{max}$	3	1	1	5	4	4	1	1	5

5. Значения напряжений на концах потока считаются  $\sigma_{min}$  и  $\sigma_{max}$ . Один поток вносит поврежденность, равную **половине** поврежденности от одного цикла с максимальным и минимальным напряжениями  $\sigma_{min}$  и  $\sigma_{max}$ .

Хотя каждый поток составляет половину цикла, почти каждый поток, начавшийся в минимуме, имеет идентичный поток-пару, начавшийся в максимуме. Потоки из минимумов текут независимо от потоков, текущих из максимумов, и наоборот, поэтому их удобно считать по отдельности (при алгоритмизации метода).

Применим метод к истории нагружения с рис. 2.16. Из точки **1** (пик) поток течет до точки **2**, падает на уровень ниже, течет до точки **4**, падает ниже и прерывается напротив точки **5**, следуя пункту №3, так как максимум **5** выше максимума **1**. Концам потока **1** соответствуют уровни напряжений  $\sigma_{min} = -3$  и  $\sigma_{max} = 3$ . Второй поток течет из минимума **2** до точки **3**, падает вниз и прерывается напротив точки **4**, следуя пункту №2, так как минимум **4** ниже минимума **2**. Концам потока **2** соответствуют уровни напряжений  $\sigma_{min} = -2$  и  $\sigma_{max} = 1$ . Поток **3** течет в сторону точки **4**, но прерывается под точкой **2**, не достигнув точки **4**, следуя пункту №4, так как он встретил поток **1**, текущий свыше. Концам потока **3** соответствуют уровни напряжений  $\sigma_{min} = -2$  и  $\sigma_{max} = 1$ . Продолжая дальше, получим полную схематизацию истории нагружения рис. 2.16, приведенную в табл. 2.1.

Стоит отметить, что схематизация двух разных историй может не

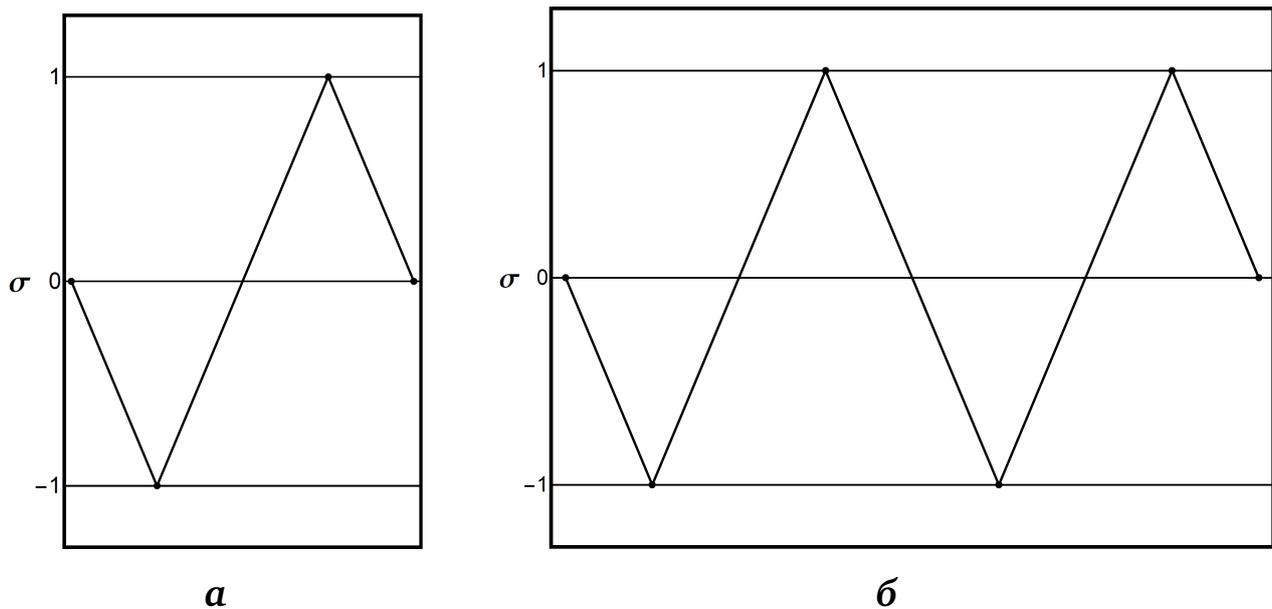
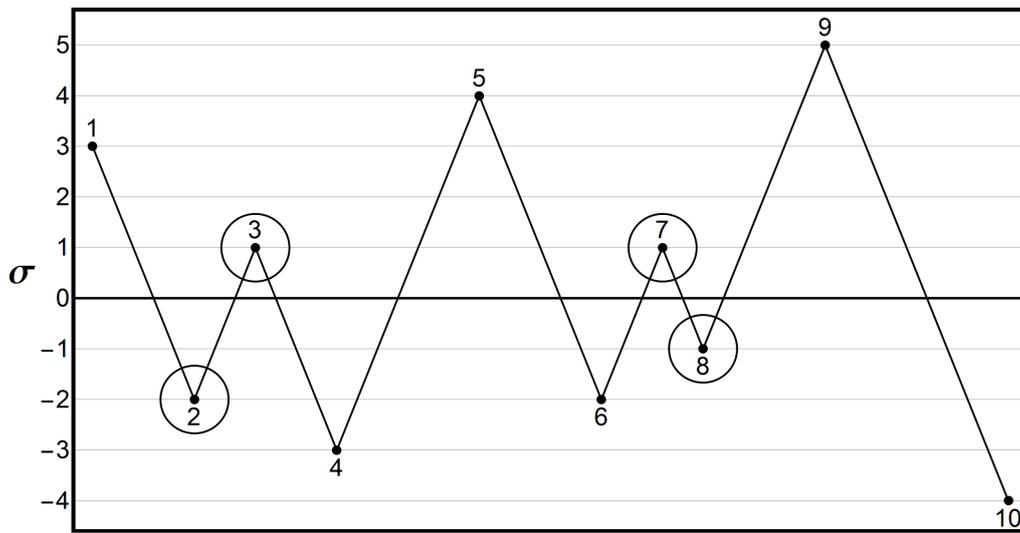


Рис. 2.17. Пример непропорционального роста опасности при схематизации истории нагружения, повторённой дважды: **а** — пример истории; **б** — история **а**, повторённая дважды

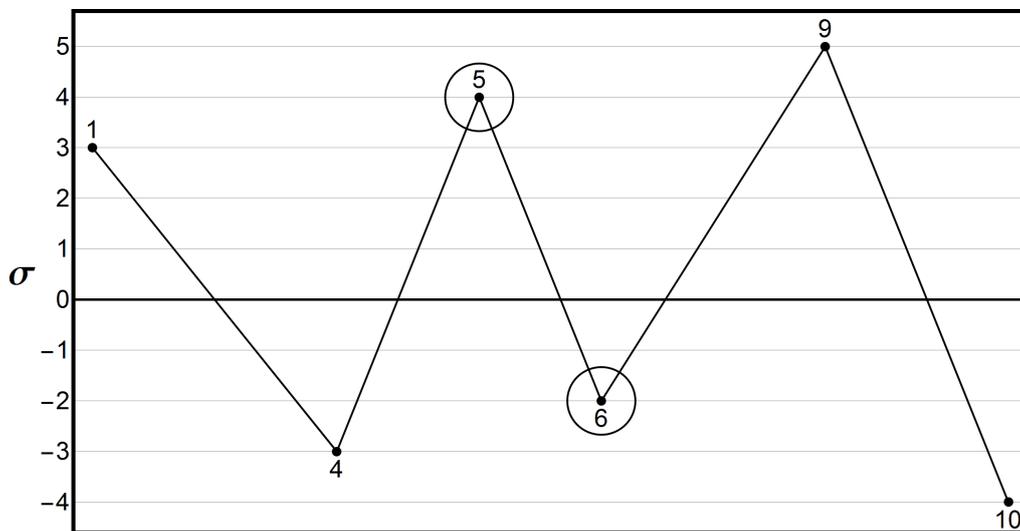
совпадать со схематизацией одной истории нагружения, составленной из этих двух. В качестве примера рассмотрим историю нагружения рис. 2.17,**а** и историю нагружения составленную из двух таких историй нагружения — рис. 2.17,**б**. При схематизации рис. 2.17,**а** получим два малых полуцикла  $\{\sigma_{min} = -1, \sigma_{max} = 0\}$  и  $\{\sigma_{min} = 0, \sigma_{max} = 1\}$ , а также один большой полуцикл  $\{\sigma_{min} = -1, \sigma_{max} = 1\}$ . При схематизации же рис.2.17,**б**, получаем те же два малых полуцикла, но уже три больших полуцикла. В итоге история рис. 2.17,**б** почти в три раза опаснее<sup>21</sup> истории рис. 2.17,**а**, хотя она есть всего лишь повторение этой истории дважды. Такой эффект наблюдается при схематизации историй, в которых есть только один большой перепад напряжений, например рис. 2.1,**а**.

**Метод полных циклов.** Метод полных циклов состоит в постепенном исключении промежуточных циклов из истории нагружения. Обо-

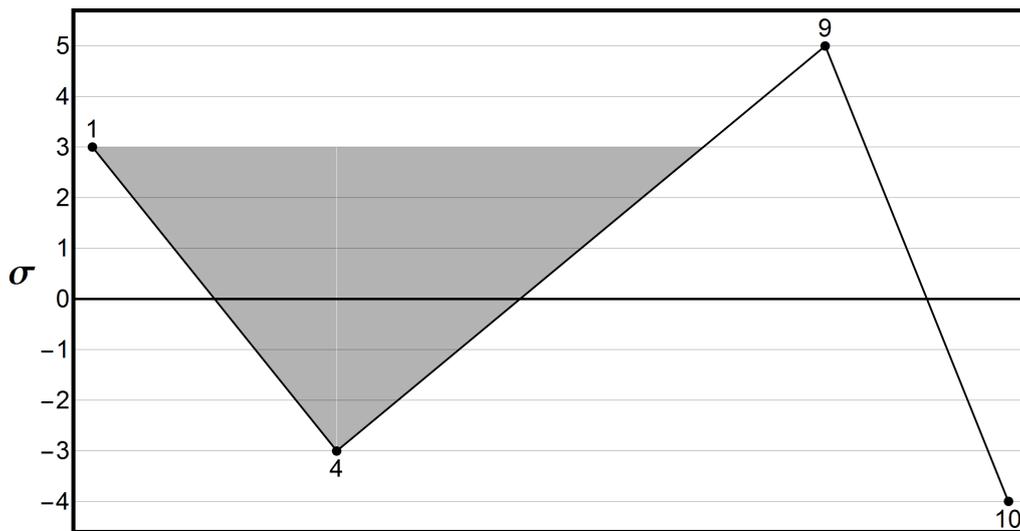
<sup>21</sup>Малые полуциклы вносят небольшие повреждения по сравнению с большими, так как зависимость внесённого повреждения от амплитуды цикла скорее экспоненциальная.



**a**



**б**



**в**

Рис. 2.18. Схематизация истории нагружения методом полных циклов: **a, б, в** — последовательные проходы выделения полных циклов

значим экстремумы истории нагружения  $\sigma_i$ . Теперь будем по очереди рассматривать каждый экстремум, и если встретится ситуация, что

$$\sigma_i > \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \geq \sigma_{i-1}, \sigma_{i+2} \geq \sigma_i$$

или

$$(2.20)$$

$$\sigma_i < \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \leq \sigma_{i-1}, \sigma_{i+2} \leq \sigma_i,$$

то выделяем цикл с  $\sigma_{min}$  и  $\sigma_{max}$  равными  $\sigma_i$  и  $\sigma_{i+1}$ . Точки с номерами  $i$  и  $i + 1$  удаляются из истории нагружения, то есть точка  $i - 1$  теперь соединена с точкой  $i + 2$ . После полного прохода истории нагружения делаются повторные проходы, пока не останется точек, удовлетворяющих условиям (2.20). В итоге останется история нагружений, в которой значения максимумов строго возрастают при движении от концов к центральному, самому высокому, то же самое касается и минимумов. Такую историю нагружения можно схематизировать, например, методом дождя или другими, менее формализованными способами.

Схематизируем методом полных циклов историю нагружения с рис. 2.16, развернув её обратно в стандартное положение. На первом проходе (рис.2.18,а) выделяются циклы 2–3 и 7–8 с  $\{\sigma_{min} = -2, \sigma_{max} = 1\}$  и  $\{\sigma_{min} = -1, \sigma_{max} = 1\}$ . На втором проходе (рис.2.18,б) выделяется цикл 5–6 с  $\{\sigma_{min} = -2, \sigma_{max} = 4\}$ . На этом точки, удовлетворяющие (2.20) в истории нагружения заканчиваются и остается история нагружения рис. 2.18,в. В ней можно вручную выделить полный меньший цикл 1–4 с  $\{\sigma_{min} = -3, \sigma_{max} = 3\}$  (выделен тёмным) и больший полуцикл<sup>22</sup> 9–10 с  $\{\sigma_{min} = -4, \sigma_{max} = 5\}$ . Если же закончить схематизацию рис. 2.18,в методом дождя, то получим более опасные три полуцикла:  $\{\sigma_{min} = -3, \sigma_{max} = 3\}$ ,  $\{\sigma_{min} = -3, \sigma_{max} = 5\}$  и  $\{\sigma_{min} = -4, \sigma_{max} = 5\}$ .

Написанное в конце предыдущего подраздела про то, что сумма схематизаций двух историй нагружения не равна схематизации суммы ис-

<sup>22</sup>То есть вносящий половину повреждений от полного цикла.

торий нагружений (рис. 2.17 и рассуждения рядом), верно и для схематизации методом полных циклов.

### 2.2.5 Модификации гипотезы Пальмгрена – Майнера

При использовании гипотезы Пальмгрена – Майнера для оценки времени жизни деталей на случайных нагружениях были замечены значимые расхождения с экспериментом, особенно если амплитуда циклов редко и/или несильно превышает предел выносливости. В попытках увеличить точность предложены многочисленные модификации гипотезы. Все нижеизложенные модификации предлагается использовать для случайных нагружений или нагружений со сложной заданной историей. Модификации предполагают билинейную (в логарифмических координатах) аппроксимацию кривой Вёлера, с горизонтальным вторым участком:

$$N = \begin{cases} N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-m}, & \sigma \geq \sigma_0 \\ \infty, & \sigma < \sigma_0 \end{cases}. \quad (2.21)$$

Хотя при желании их можно довольно легко обобщить на случай более сложных аппроксимаций.

Ряд модификаций не касается гипотезы о линейном суммировании поврежденности напрямую, а предполагает использование видоизмененной кривой Вёлера вместо исходной. Модификация №1 есть просто продолжение первого участка кривой Вёлера ниже предела выносливости:

$$N = N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-m}. \quad (2.22)$$

№2. А также можно продолжить первый участок ниже предела выносливости, но с другим наклоном  $-(2m - 1)$  вместо  $-m$  [175]:

$$N = \begin{cases} N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-m}, & \sigma \geq \sigma_0 \\ N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-(2m-1)}, & \sigma < \sigma_0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

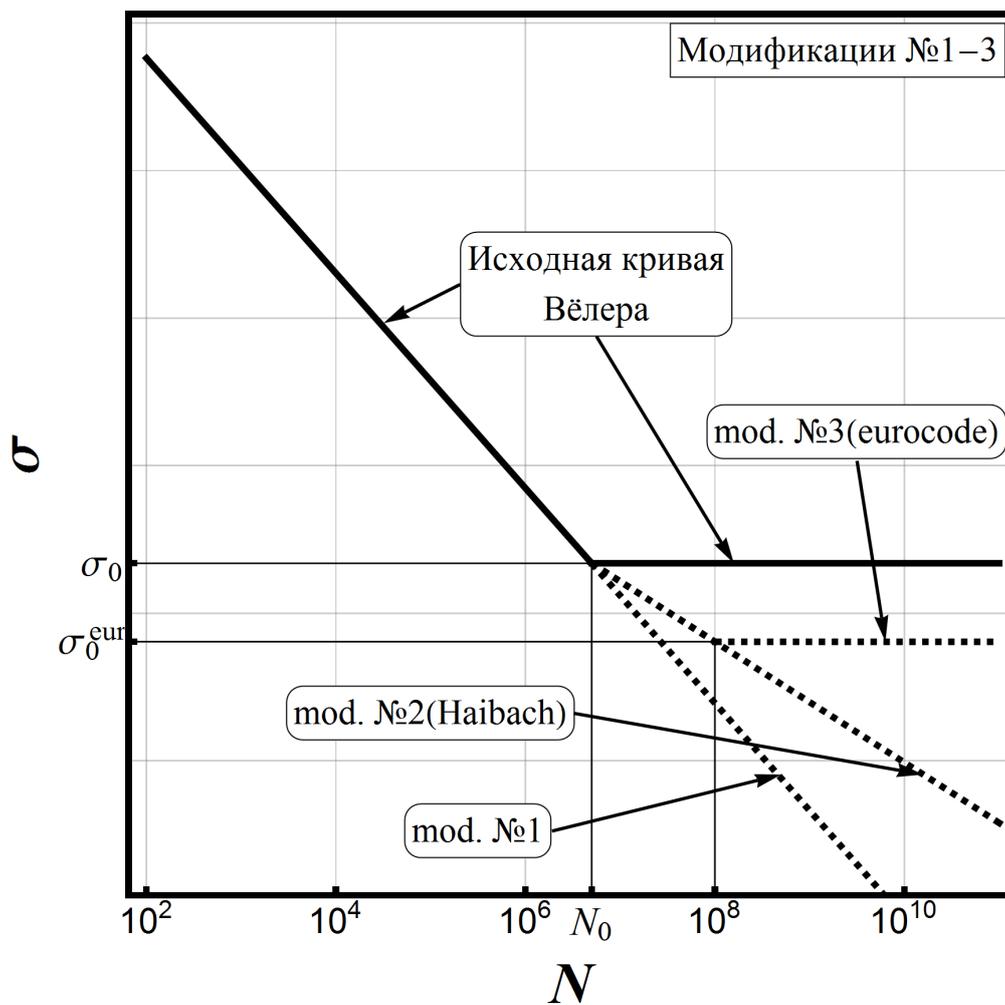


Рис. 2.19. Модификации гипотезы Пальмгрена – Майнера №1–3, предполагающие изменение кривой Вёлера в области предела выносливости для подсчета поврежденности

**№3.** Серия стандартов 2009 года eurocode3 [176] предлагает добавить к предыдущей модификации дополнительный предел выносливости в точке  $N = 10^8$  циклов. Подставив это значение в (2.23), можно найти значение напряжения в этой точке  $\sigma_0^{eur} = \sigma_0 \left( \frac{10^8}{N_0} \right)^{-\frac{1}{2m-1}}$ :

$$N = \begin{cases} N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-m}, & \sigma \geq \sigma_0 \\ N_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-(2m-1)}, & \sigma_0^{eur} < \sigma < \sigma_0 \\ \infty, & \sigma \leq \sigma_0^{eur} \end{cases} \quad (2.24)$$

**№4.** Еще одной возможностью для модификации является изменение диаграммы Вёлера в зависимости от спектра нагружения. В [177] предлагается кривая, лежащая между исходной и кривой с  $m = 3,5$ , то есть с наклоном  $-(m + 3,5)/2$  вместо  $-m$ , выходящая из точки, соответствующей максимальному уровню напряжений  $\hat{\sigma}_{max}$  в спектре. При этом присутствует предел выносливости, равный половине исходного:

$$N = \begin{cases} N_{ZL} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{max}} \right)^{-(m+3,5)/2}, & \sigma \geq 0,5\sigma_0 \\ \infty, & \sigma < 0,5\sigma_0 \end{cases}, \quad (2.25)$$

где  $N_{ZL}$  есть точка, соответствующая  $\hat{\sigma}_{max}$  на исходной кривой Вёлера. Эта модификация, в отличие от предыдущих, содержит зависимость от спектра нагружения, однако дополнительные эксперименты проводить не требуется.

**№5.** Более сложная зависимость от спектра нагружения предложена в [178]:

$$N = \sigma^{-k} \sigma_{avg}^{k-l} 10^{\left( a + b \frac{\sigma_{a max}}{\sigma_{avg}} + c \left( 1 - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{avg}} \right) \right)}. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) содержит три параметра, зависящих от исследуемой истории нагружения:  $\sigma_{avg}$  — среднее напряжение спектра нагрузки,  $\sigma_{a max}$  — максимальная амплитуда в спектре,  $\sigma_{min}$  — минимальное напряжение в истории, а также еще пять параметров  $a, b, c, k, l$ , которые можно

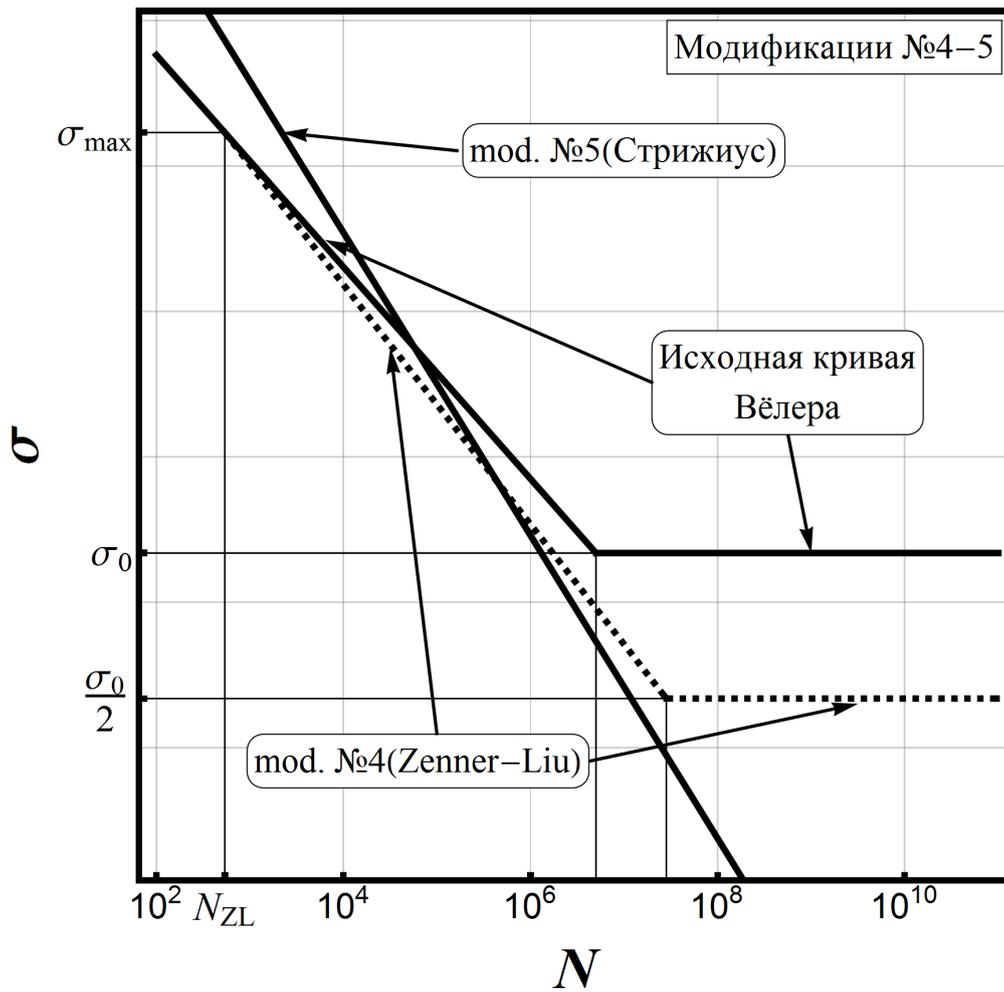


Рис. 2.20. Модификации гипотезы Пальмгрена – Майнера №4, 5, предполагающие изменение кривой Вёлера для подсчета поврежденности

определить по результатам экспериментов на схожих с исследуемой историей нагружений<sup>23</sup>. Эта модификация, как и предыдущая, содержит зависимость от спектра нагружения, однако здесь необходимо проведение дополнительных экспериментов.

Автор [178] предлагает, прежде чем использовать формулу (2.26), построить одну амплитуду  $\sigma_{eff}$ , эквивалентную всей заданной истории нагружения по формуле

$$\sigma_{eff} = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^n \sigma_{0i}^m},$$

являющуюся следствием (2.22), где  $\sigma_{0i}^m$ ,  $i = 1..n$  — амплитуды отнулевых циклов, эквивалентных циклам с амплитудами  $\sigma_{ai}$  и средними напряжениями  $\sigma_{mi}$ , полученным в результате схематизации (подраздел 2.2.4) истории нагружения. А уже  $\sigma_{eff}$  надо подставлять в (2.26) вместо  $\sigma$ , чтобы узнать, сколько таких историй нагружения выдержит деталь, однако, по мнению авторов, данный этап является лишним.

**№6.** Модификация с учетом последовательности (ger. *konsequenter Miner-regel*, eng. *Consequent Miner's rule*) [179]. Идея состоит в том, что предел выносливости  $\sigma_0$  не является константой в ходе нагружения, а снижается с увеличением параметра поврежденности  $D$ , например

$$\sigma_0^{cons}(D) = \sigma_0 (1 - D)^{1/(m-1)}.$$

С физической точки зрения снижение предела выносливости можно объяснить тем, что в результате воздействия циклов большей амплитуды в материале возникают дефекты и повреждения, которые не могли бы возникнуть при меньших амплитудах, однако могут расти под действием этих меньших амплитуд. Из-за того, что предел выносливости зависит от предшествующей истории нагружения, такой модификацией нужно

---

<sup>23</sup>Искать эти параметры можно каким-либо поисковым алгоритмом, минимизируя невязку между прогнозами модели и результатами экспериментов

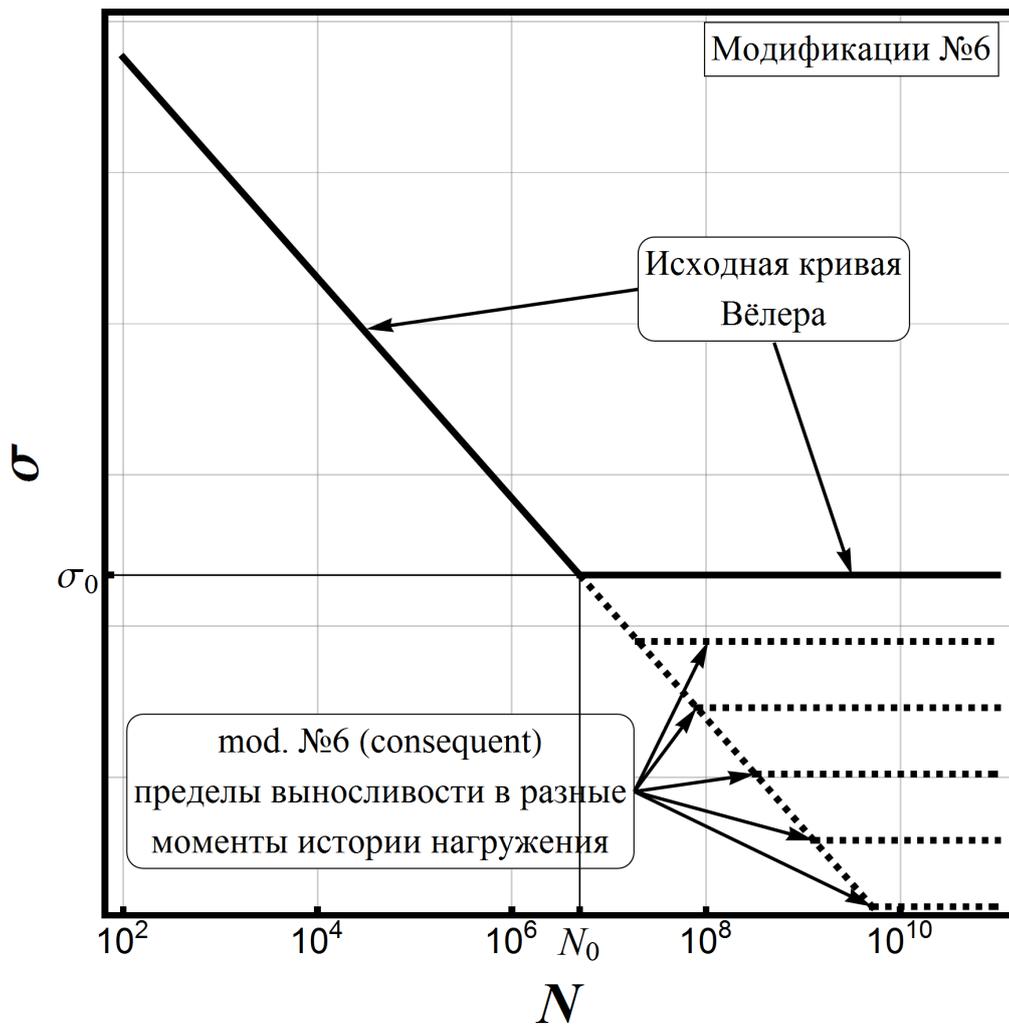


Рис. 2.21. Модификация гипотезы Пальмгрена – Майнера №6 с учетом последовательности, предполагающая снижение предела выносливости в ходе нагружения

пользоваться аккуратно, так как при схематизации истории нагружения нарушается порядок циклов.

№7\*. Еще одна возможность модификации гипотезы Пальмгрена – Майнера является изменение предела параметра поврежденности при котором происходит разрушение [180]. То есть вместо  $D = 1$  в качестве критерия разрушения положим  $D = D_f$ , где  $D_f$  есть константа, **зависящая от характеристик спектра нагружения**.  $D_f$  обычно находится из эксперимента на нагружениях со спектром, похожим на те, которым подвержена деталь при эксплуатации. Эту версию называют относительной гипотезой Пальмгрена – Майнера (eng. relative Miner's rule).

### 2.2.6 Критика гипотезы Пальмгрена – Майнера

Гипотеза Пальмгрена – Майнера предполагает отсутствие «памяти» у материала, есть только значение скалярного параметра поврежденности  $D$ , а конкретная история нагружения неважна. Однако эксперименты показывают, что это не так. Образцы разрушаются быстрее на случайном нагружении, чем на блочном, при одинаковом спектре нагрузок [181,182], то есть порядок циклов в общем случае важен. Оценка времени жизни на некоторых сложных и случайных историях нагружения с помощью гипотезы (и её модификаций №1–4) является сильно неконсервативной, то есть завышенной в 1,5–15 раз [183–185], что опасно с точки зрения практики. Гипотеза также прогнозирует, что наличие редких циклов большой амплитуды почти не оказывает влияния на время жизни, в то время как эксперименты показывают обратное [186–188]. Что интересно, наличие таких циклов может как уменьшать, так и увеличивать время жизни детали. Такой эффект объясняется остаточными напряжениями, возникающими вследствие неоднородных пластических деформаций вблизи концентратора напряжений. Если в цикле большой амплиту-

ды сначала идет максимум, а затем минимум, то возникают нежелательные положительные остаточные напряжения, снижающие время жизни детали, а если наоборот — то благоприятные отрицательные, увеличивающие время жизни.

Гипотеза Пальмгрена – Майнера хорошо подходит для оценки времени жизни при блочном нагружении с блоками, состоящими из большого числа циклов не слишком высокой амплитуды. В ходе нагружения с постоянной амплитудой внутри блока, материал успевает «забыть» о предшествующей истории нагружения, вследствие чего накопление повреждений за каждый блок оказывается хорошо согласовано с диаграммой Вёлера. Использовать же эту гипотезу в случае случайных нагружений (рис.2.1,б) или сложных историй (рис.2.1,в) нужно с особой осторожностью вследствие вышеупомянутой неконсервативности. По мнению авторов, предсказать время жизни при нагружении с переменной амплитудой, имея только результаты экспериментов с постоянной амплитудой — это утопия. При таких попытках всегда принимаются дополнительные гипотезы (в том числе и неявно), подменяющие собой эксперименты с переменной амплитудой.

### **2.2.7 Алгоритм оценки времени жизни детали**

В итоге алгоритм оценки времени жизни детали методом подсчета циклов выглядит следующим образом:

1. Получить диаграмму Вёлера для детали. Кривая с  $R = 0$  необходима,  $R = -1$  желательна, кривые с другими значениями  $R$  могут понадобиться в следующем пункте. Кривые должны быть построены с необходимыми допусками вероятности разрушения.

2. Выбрать формулу сведения к отнулевому циклу и идентифицировать входящие в неё параметры (см. подраздел 2.2.3).

3. (а) Если нагружение имеет постоянную амплитуду, то воспользоваться формулой сведения из пункта 2 и по диаграмме Вёлера определить время жизни. Конец.

(б) Если нагружение блочное, то перейти к пункту 5.

(в) Если нагружение случайное или имеет сложную историю, то перейти к следующему пункту.

4. Разложить историю нагружения на отдельные циклы используя один из методов схематизации циклов (см. подраздел 2.2.4).

5. Свести полученные циклы к отнулевым, используя формулу из пункта 2.

6. Используя гипотезу Пальмгрена – Майнера или её модификации, посчитать поврежденность  $D$ , накопленную за заданную историю (см. подразделы 2.2.1 и 2.2.5).

7. Сделать выводы о времени жизни. Например, если  $D > 1$ , то деталь сломается на данной истории нагружения с неприемлемой вероятностью, если  $D < 1$ , то можно посчитать сколько подобных историй нагружения еще выдержит деталь.

## 2.3 Метод локальной истории деформации

Проводить испытания для построения кривой Вёлера для каждой детали может быть обременительно, а для некоторых деталей просто невозможно вследствие их габаритов. В таких случаях для определения времени жизни детали используют **метод локальной истории деформации** (eng. local strain method), состоящий в следующем (рис.2.22):

1. Найти самую опасную точку детали, то есть точку, в которой амплитуда напряжений или деформаций максимальна (обычно это концентратор напряжений). Считая, что разрушение детали произойдет именно в этой точке, далее рассматривать только её.

2. Построить историю изменения напряжений  $\sigma(t)$  и/или деформаций  $\varepsilon(t)$  в самой опасной точке по известной истории нагружения детали (см. раздел 2.4).

3. Определить время жизни детали, считая, что оно идентично времени жизни гладкого образца, в котором реализуется однородное напряжено-деформированное состояние и нагруженного такой же историей напряжений  $\sigma(t)$  и деформаций  $\varepsilon(t)$ , как и самая опасная точка детали.

До этого момента мы оценивали время жизни детали, используя историю напряжений, однако в названии данного метода присутствует история *деформаций*. Так исторически сложилось из-за того, что метод зачастую применяется в случае концентраторов напряжений, в которых происходит пластическая деформация, а при наличии пластических деформаций часто используют историю деформаций вместо истории напряжений при оценке времени жизни. Для деформаций строится аналог диаграммы Вёлера, на которой по вертикальной оси откладываются деформации вместо напряжений. Затем эта диаграмма используется при оценке времени жизни на заданной истории деформаций теми же мето-

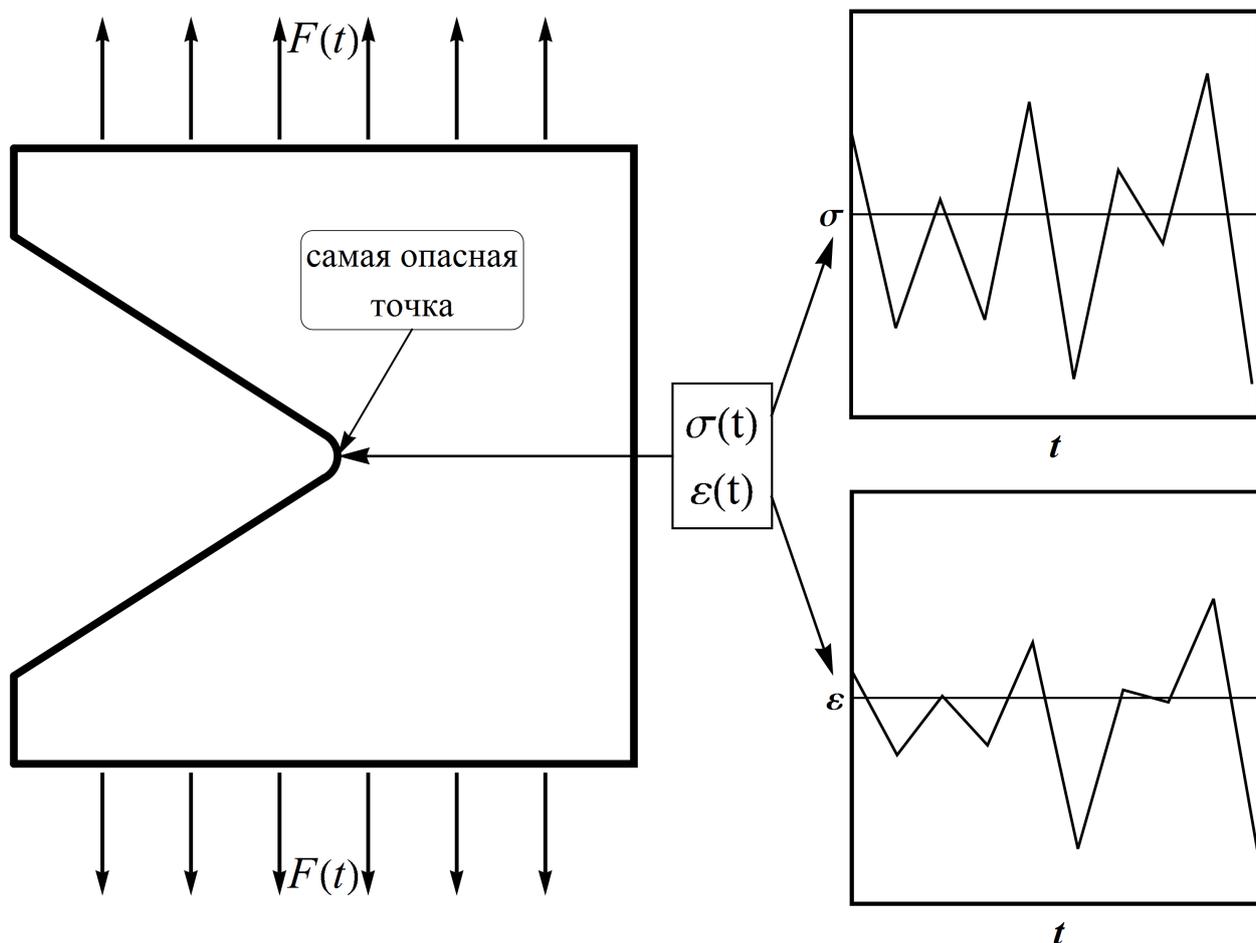


Рис. 2.22. Иллюстрация метода локальной истории деформаций. Слева на детали, к которой приложена переменная во времени нагрузка  $F(t)$ , обозначена самая опасная точка и справа изображены истории напряжения  $\sigma(t)$  и деформации  $\epsilon(t)$  в указанной самой опасной точке, реализующихся под действием нагрузки  $F(t)$

дами, что мы описали ранее для истории напряжений. Конечно же, при применении метода локальной истории можно использовать как историю деформаций так и напряжений.

## 2.4 Напряжения и деформации в концентраторе напряжений

### 2.4.1 Упругий случай

Если концентратор напряжений недостаточно сильный для развития пластических деформаций, то ситуация довольно простая. Напряжение и деформация в вершине<sup>24</sup> концентратора выражаются через коэффициент концентрации напряжений  $K_t$ :  $\sigma = K_t \sigma_{nom}$ ,  $\varepsilon = K_t \varepsilon_{nom}$ , где  $\sigma_{nom}$  и  $\varepsilon_{nom}$  есть номинальные значения напряжения и деформации, то есть значения однородных полей, реализующиеся в отсутствие концентратора. Эти номинальные значения линейно связаны с нагрузкой, приложенной к детали. Коэффициент  $K_t$  находится либо аналитически, либо численно. Если введение номинальных напряжений и деформаций затруднительно, то можно напрямую связать нагрузку, приложенную к детали, и напряжение в вершине концентратора.

Замечено, что использование  $K_t$  при оценке времени жизни даёт сильно заниженные прогнозы [189]. Это можно объяснить тем, что вблизи концентратора градиент напряжений очень крут, и зона больших напряжений настолько мала, что её размер влияет на процессы зарождения и роста микротрещин. Чтобы избавиться от излишней консервативности оценки, вместо  $K_t$  часто используют **усталостный коэффициент концентрации напряжений**  $K_f \leq K_t$ . Этот коэффициент можно найти экспериментально: сравнивая пределы выносливости<sup>25</sup> образцов с концентратором и без.

$$K_f = \frac{\sigma_R}{\sigma_{nom}^{endurance}},$$

где  $\sigma_R$  есть предел выносливости образца без концентратора,  $\sigma_{nom}^{endurance}$  — амплитуда номинального напряжения выносливости для образца с концентратором (с тем же значением  $R$ ),  $R$  обычно берут равным 0 либо  $-1$ .

---

<sup>24</sup>Самая опасная точка.

<sup>25</sup>Найти их можно экспериментально методом лестницы (подраздел 2.1.4).

Величина  $K_f$  зависит от геометрических размеров детали, то есть одинаковые по форме, но различные по размеру образцы показывают различные усталостные свойства при идентичных историях нагружения.

Существуют и готовые эмпирические формулы для  $K_f$ , учитывающие эффект масштаба (eng. size effect). Приведём 3 самые популярные.

Питерсон [190] вводит параметр чувствительности концентратора  $q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$  и предлагает выражение для  $q$  в виде

$$q = \frac{1}{1 + a_1/\rho}, \text{ тогда } K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + a_1/\rho}, \quad (2.27)$$

где  $\rho$  есть радиус концентратора<sup>26</sup>,  $a_1$  — материальный параметр, определяемый экспериментально.

Нейбер [191] предлагает вычислять  $q$  как

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{a_2/\rho}}, \text{ тогда } K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a_2/\rho}}, \quad (2.28)$$

где  $a_2$  — материальный параметр, определяемый экспериментально. В случае V-образного выреза Нейбер вместо (2.28) предлагает использовать формулу

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{\pi}{\pi - \theta} \sqrt{a_2/\rho}},$$

где  $\theta$  есть угол раскрытия выреза.

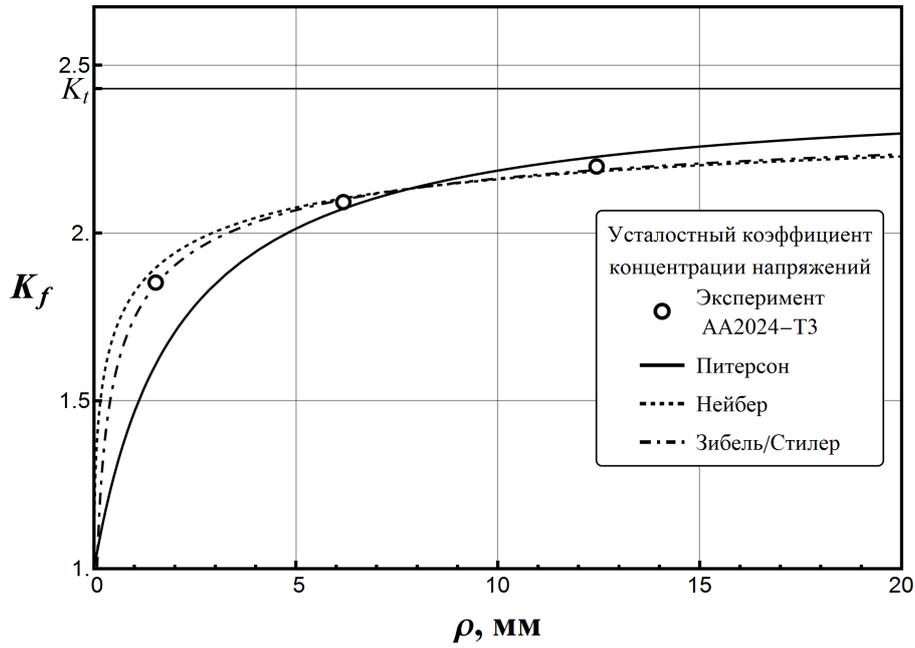
Зибель и Стилер в [192] вместо параметра  $q$  используют отношение  $K_f/K_t$ :

$$\frac{K_f}{K_t} = \frac{1}{1 + \sqrt{a_3/\rho}}, \text{ тогда } K_f = \frac{K_t}{1 + \sqrt{a_3/\rho}}, \quad (2.29)$$

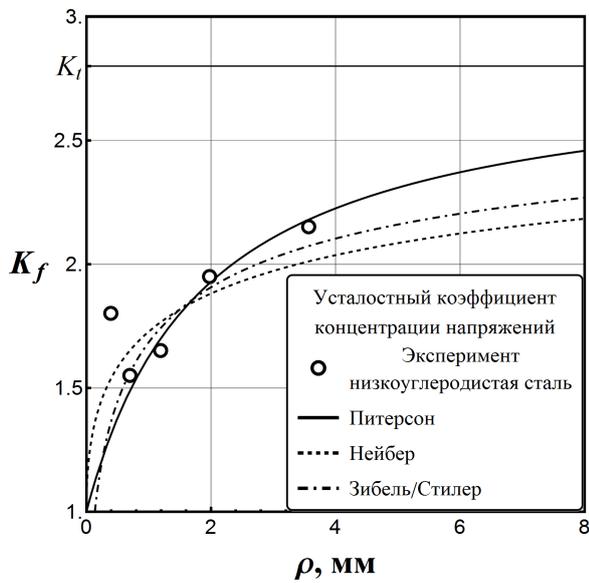
где  $a_3$  — материальный параметр, определяемый экспериментально.

Все формулы (2.27), (2.28), (2.29) при больших  $\rho$  стремятся к  $K_t$ . На рис. 2.23 приведено сравнение этих формул на различных эксперимен-

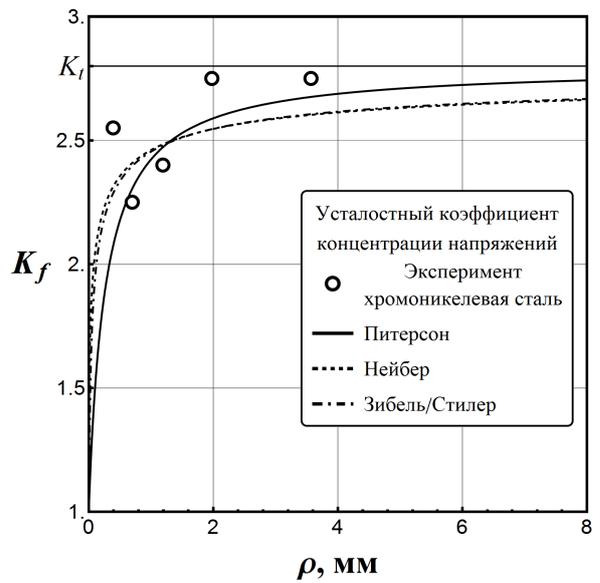
<sup>26</sup>Если концентратор не оканчивается круговым вырезом, то в качестве  $\rho$  можно взять другой характерный размер, например, радиус кривизны в вершине концентратора.



**а**



**б**



**в**

Рис. 2.23. Зависимость усталостного коэффициента концентрации напряжений  $K_f$  от радиуса концентратора  $\rho$  для различных материалов, аппроксимация эмпирическими формулами: **а** — алюминиевый сплав 2024-T3 [193]; **б** — низкоуглеродистая сталь [194]; **в** — хромоникелевая сталь [194]

тальных данных, материальные параметры  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  в каждом случае определены методом наименьших квадратов<sup>27</sup>.

Рис. 2.23,а:  $K_f$  для алюминиевого сплава 2024-T3 (предел текучести  $\sigma_y \approx 345$  МПа), образцы представляют собой пластинки с круговым вырезом в центре, данные взяты из [193]. Образцы имели одинаковую форму но разные линейные размеры (это верно и для случаев, представленных 2.23,б и 2.23,в, описанных ниже). Экспериментальные данные хорошо описываются формулами (2.29) и (2.28) (последней чуть хуже).

Рис. 2.23,б:  $K_f$  для мягкой низкоуглеродистой стали (предел текучести  $\sigma_y \approx 220$  МПа), образцы имеют форму цилиндра с отверстием, просверленным ортогонально оси, данные взяты из [194]. В случае мягкой стали хорошую точность имеет формула (2.29).

Рис.2.23,в:  $K_f$  для хромоникелевой стали (предел текучести  $\sigma_y \approx 835$  МПа), образцы такие же, как и в случае рис. 2.23,б, данные взяты из [194]. Для твердой стали наивысшую точность опять показала формула (2.29), но эта точность намного ниже чем в предыдущих случаях.

В случаях стали (рис. 2.23,б и в), для самых маленьких отверстий (радиуса  $\rho \approx 0.4$  мм) наблюдаются особенные значения  $K_f$ , выпадающие из монотонной зависимости  $K_f$  от  $\rho$ , наблюдающейся для отверстий большего радиуса. Неясно, имеют ли эти выпадения в своей основе какой-то физический механизм или являются следствием особенности изготовления либо испытания маленьких образцов.

#### 2.4.2 Пластические деформации в концентраторе напряжений

Если же напряжения в концентраторе достаточны для развития пластических деформаций, ситуация усложняется. Неоднородность поля пластических деформаций приводит к возникновению остаточных напря-

---

<sup>27</sup>В случае сталей точка соответствующая наименьшему значению радиуса была проигнорирована.

жений, а  $\sigma$  и  $\varepsilon$  в вершине концентратора уже не связаны однозначно ни между собой, ни с нагрузкой, приложенной к детали.

Чтобы получить историю напряжений  $\sigma$  или деформаций  $\varepsilon$  в вершине концентратора при заданной истории нагружения детали, нужно напрямую моделировать<sup>28</sup> весь процесс. Однако в случае длительной истории, содержащей десятки тысяч циклов, прямое моделирование вызовет большие трудности. В подобных случаях используют приближённые формулы. Самой популярной среди них является формула Нейбера [195] (eng. Neuber formula/rule)

$$\sigma \varepsilon = K_t^2 \sigma_{nom}^{elastic} \varepsilon_{nom}^{elastic} = \frac{(K_t \sigma_{nom}^{elastic})^2}{E}, \quad (2.30)$$

$\sigma$  и  $\varepsilon$  есть напряжения и деформации в вершине концентратора,  $\sigma_{nom}^{elastic}$  и  $\varepsilon_{nom}^{elastic}$  — номинальные напряжения и деформации, вычисленные исходя из того, что материал ведёт себя чисто упруго,  $E$  — модуль Юнга.  $\sigma_{nom}^{elastic}$  и  $\varepsilon_{nom}^{elastic}$  линейно связаны с нагрузкой, приложенной к детали, эта связь находится аналитически или численно. Используя (2.30) вместе с зависимостью  $\sigma(\varepsilon)$ <sup>29</sup> (задающей упругопластическое поведение материала), можно явно выразить  $\sigma$  или  $\varepsilon$  (в зависимости от метода оценки времени жизни) через нагрузку, приложенную к детали, а значит, легко пересчитать историю этой нагрузки в историю  $\sigma$  или  $\varepsilon$  в вершине концентратора.

Если введение номинальных напряжений и деформаций затруднительно, то вместо  $\sigma_{nom}^{elastic}$  и  $\varepsilon_{nom}^{elastic}$  можно использовать  $\sigma^{elastic}$  и  $\varepsilon^{elastic}$  — напряжения и деформации в вершине концентратора, вычисленные исходя из того, что материал ведёт себя чисто упруго. В этом случае (2.30) примет вид

$$\sigma \varepsilon = \sigma^{elastic} \varepsilon^{elastic} = \frac{(\sigma^{elastic})^2}{E}.$$

<sup>28</sup>Например, используя МКЭ.

<sup>29</sup>Желательно использовать циклическую кривую напряжения–деформации (eng. cyclic stress-strain curve), а не обычную, определяемую из опыта на монотонное одноосное растяжение.

## 2.5 Усталость при многоосном нагружении

До этого момента речь шла об усталости под действием одноосной истории нагружения. Такое внимание к одноосному случаю оправдано тем, что на практике во многих концентраторах напряжений напряженное состояние близко к одноосному. Однако иногда при эксплуатации детали в самых опасных точках могут наблюдаться и многоосные напряженные состояния различной сложности.

### 2.5.1 Пропорциональное многоосное нагружение

Самым простым случаем многоосного нагружения является сдвиговое нагружение:

$$\left[ \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \right] \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \left[ \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right] \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Матрица компонент тензора напряжений, соответствующая сдвиговому напряжению (левая часть формулы (2.31)) в осях, повернутых на  $45^\circ$  (правая часть (2.31)), выглядит как матрица двухосного напряженного состояния, причем в одном направлении происходит растяжение, а в другом — сжатие той же интенсивности. На практике такое нагружение наблюдается при кручении труб или валов, экспериментальное исследование времени жизни под воздействием сдвигового нагружения тоже проводят с помощью циклического кручения трубчатых или цилиндрических образцов.

Как и для одноосного нагружения, для сдвигового нагружения с постоянной амплитудой можно строить диаграмму Вёлера и находить предел выносливости. Для сравнения на рис. 2.24 изображены диаграммы Вёлера одноосного нагружения и кручения ( $R = -1$ ) для пружинной стали JIS G3561 [196]. Соотношение между амплитудами сдвигового и од-

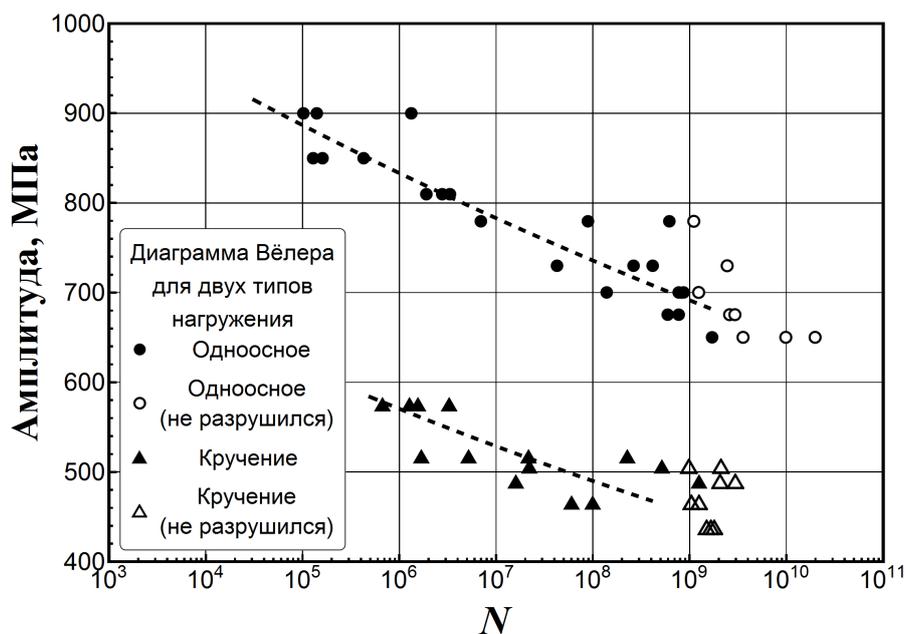


Рис. 2.24. Сравнение диаграмм Вёлера  $R = -1$  для одноосного нагружения и кручения образцов из пружинной стали JIS G3561

ноосного напряжения, соответствующих одинаковому числу циклов до разрушения  $N$ , изменяется в пределах<sup>30</sup>  $\tau_a/\sigma_a \sim 0.66...0.69$ .

В табл. 2.2 [197] приведены примерные отношения сдвигового и одноосного пределов выносливости ( $R = -1$ ) для различных типов металлов. Для материалов, полученных литьём, сдвиговое нагружение ненамного опаснее одноосного, тогда как для остальных сдвиговое нагружение может быть значительно опаснее.

Более сложным случаем многоосного нагружения является одновременное приложение одноосной и сдвиговой нагрузки. Пока что рассмотрим случай пропорционального нагружения, то есть когда одноосная и сдвиговая нагрузки изменяются во времени пропорционально<sup>31</sup>. В [198] предлагается<sup>32</sup> следующее соотношение для определения време-

<sup>30</sup>В работе [196] была рассмотрена только многоцикловая усталость.

<sup>31</sup>Это означает одинаковое значение  $R$  для обеих нагрузок.

<sup>32</sup>На самом деле в данной работе соотношение (2.32) предлагается только для предела выносливости, но мы обобщим его и на случай конечного времени жизни.

Таблица 2.2. Отношение между сдвиговым и одноосным пределами выносливости для различных металлов [197]

Металл/сплав	$\tau_{-1}/\sigma_{-1}$
Сталь	0,6
Медь	0,56
Медный сплав	0,56
Алюминиевый сплав	0,55
Магниевый сплав	0,54
Титан	0,48
Чугун	0,9
Литой алюминиевый сплав	0,85
Литой магниевый сплав	0,85

ни жизни детали при комбинированном нагружении:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_a}\right)^2 = 1. \quad (2.32)$$

Под руководством тех же авторов было проведено экспериментальное исследование [199] предела выносливости ( $R = -1$ ) различных сталей при комбинации одноосного и сдвигового нагружений, результаты экспериментов и их сравнение с формулой (2.32) приведены на рис. 2.25. Формула (2.32) показала приемлемую точность.

Стоит отметить, что комбинацией одноосного и сдвигового нагружений нельзя получить произвольное двухосное нагружение. Действительно, собственные числа матрицы

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

компонент тензора напряжений<sup>33</sup> равны  $\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$ ,

<sup>33</sup>То есть главные напряжения.

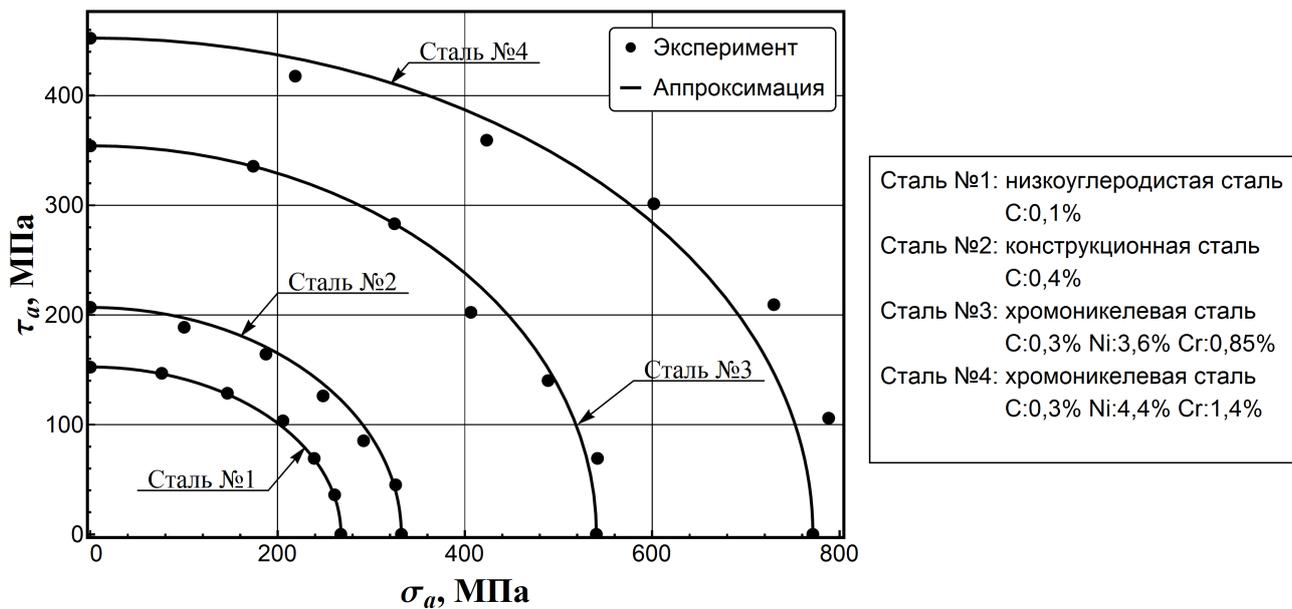


Рис. 2.25. Предел выносливости на комбинации сдвигового и одноосного нагружения (пропорционального) для различных сталей [199]. Экспериментальные данные и их аппроксимация формулой (2.32)

$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$  и, очевидно, различаются по знаку. Таким образом, при комбинировании одноосного и сдвигового пропорционального циклирования мы получаем такое двухосное нагружение, что напряжения вдоль осей<sup>34</sup> №1 и 2 находятся в противофазе, а синфазный случай остается за бортом.

Джорж Сайнс в своем докладе NASA [200] привёл ряд экспериментов на двухосную усталость. Из этих экспериментов он делает следующие выводы:

1. приложение статического сдвигового нагружения не влияет ни на время жизни под действием переменного одноосного нагружения, ни на время жизни под воздействием переменного сдвигового нагружения, пока величина этого статического сдвигового нагружения ниже  $\sim 0,7$  сдвигового предела текучести материала. Хотя в [200] данный факт установлен для большого числа разнообразных материалов и сплавов (в области многоциклового усталости), в подробном экспериментальном исследовании

<sup>34</sup>Направления главных напряжений.

довании усталостных свойств алюминиевого сплава 76S-T61 [201] показано сильное влияние статического сдвигового нагружения на усталость под воздействием переменного сдвигового нагружения, поэтому к этому утверждению нужно относиться с некоторой осторожностью;

2. приложение статического одноосного нагружения влияет как на время жизни под действием переменного одноосного нагружения, так и на время жизни под воздействием переменного сдвигового нагружения. Причём время жизни уменьшается, если статическое нагружение положительно, и увеличивается, если оно отрицательно.

На основе этих экспериментальных наблюдений Сайнс предложил формулу (eng. Sines method) [200], с помощью которой можно свести цикл многоосного нагружения к эквивалентному отнулевому или симметричному одноосному циклу:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^a - \sigma_2^a)^2 + (\sigma_2^a - \sigma_3^a)^2 + (\sigma_3^a - \sigma_1^a)^2} + k(\sigma_1^m + \sigma_2^m + \sigma_3^m) = \sigma_a^{-1} = (1+k)\sigma_a^0, \quad (2.33)$$

где  $\sigma_i^a$  — амплитуды главных напряжений,  $\sigma_i^m$  — средние значения (цикла) главных напряжений,  $\sigma_a^{-1}$  — амплитуда эквивалентного<sup>35</sup> симметричного ( $R = -1$ ) одноосного цикла,  $\sigma_a^0$  — амплитуда эквивалентного<sup>36</sup> отнулевого ( $R = 0$ ) одноосного цикла,  $k$  — материальная константа, которая может быть определена, например, по формуле  $k = \sigma_{-1}/\sigma_0 - 1$ .

В [202] предлагается использовать максимальное значение гидро-статического давления (за цикл) во втором слагаемом (2.33):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1^a - \sigma_2^a)^2 + (\sigma_2^a - \sigma_3^a)^2 + (\sigma_3^a - \sigma_1^a)^2} + \frac{k}{3} \max_t (\sigma_1(t) + \sigma_2(t) + \sigma_3(t)) = \sigma_a^{-1} = (1+k)\sigma_a^0. \quad (2.34)$$

<sup>35</sup>То есть вносящего такое повреждение, что и рассматриваемый многоосный цикл.

<sup>36</sup>С учетом коэффициента  $(1+k)$ .

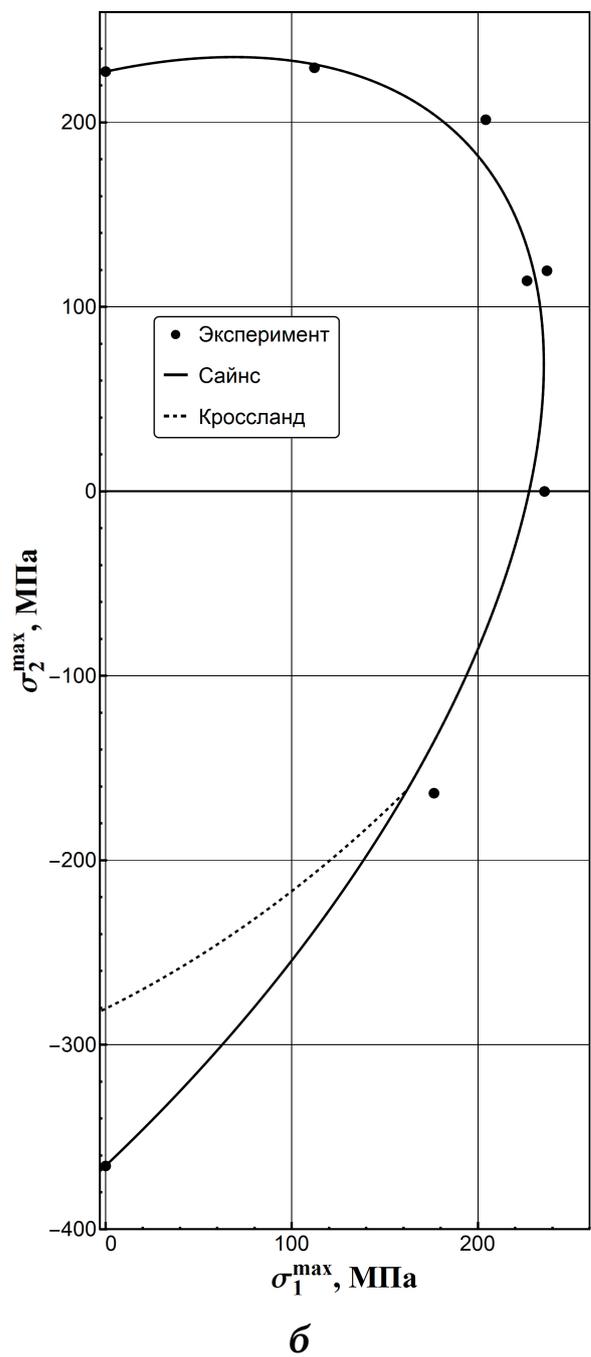
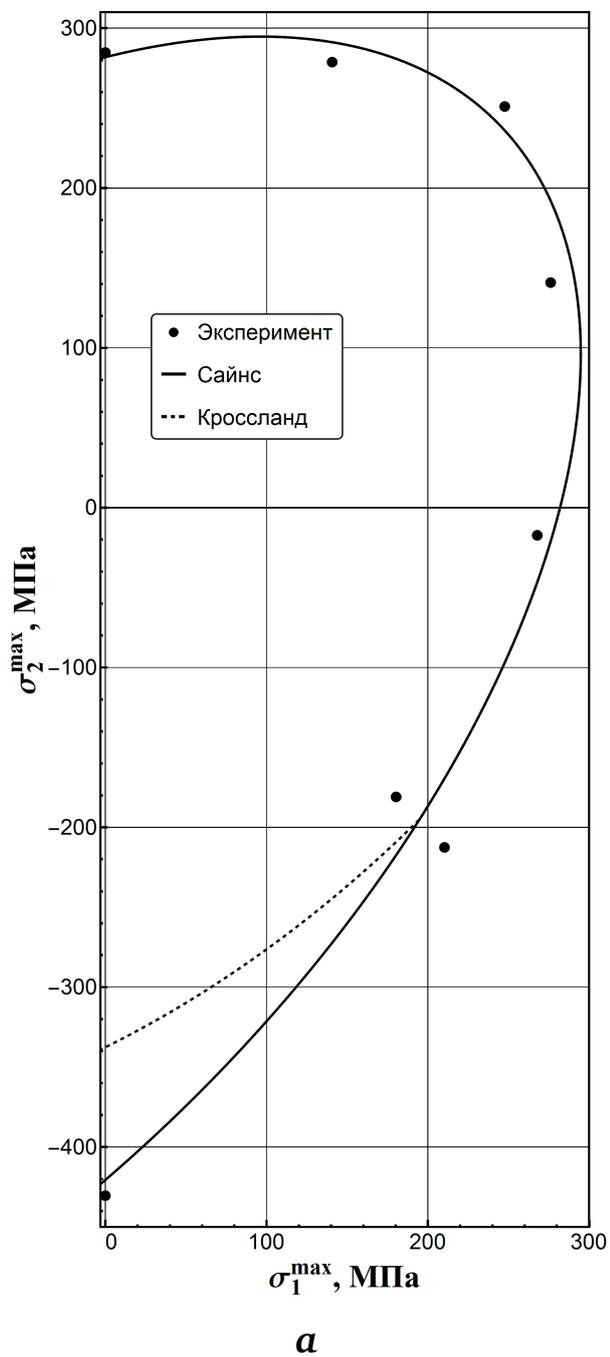


Рис. 2.26. Сравнение формул (2.33) (Сайнс) и (2.34) (Кроссланд) с экспериментом на двухосное пропорциональное циклическое нагружение ( $R = 0$ ): **а** — литая сталь; **б** — алюминиевый сплав Avional D

На рис. 2.26<sup>37</sup> приведено сравнение формул (2.33) и (2.34) с экспериментальными данными на двухосное нагружение литой стали и авиационного алюминиевого сплава (время жизни  $10^6$  циклов). Данные взяты из [203], случай главных напряжений одного знака реализовывался с помощью трубчатого образца, внутри которого нагнеталось давление, вызывающее напряжения в окружном направлении и подверженного растяжению вдоль оси. На приведённом отнулевом ( $R = 0$ ) пропорциональном двухосном нагружении формулы различаются только в области  $\sigma_1^{max} + \sigma_2^{max} < 0$ , что и видно на рисунке. Тут формула (2.33) показала себя лучше.

Формулы (2.33) и (2.34) изначально предполагают использование в случае пропорционального нагружения<sup>38</sup>, однако иногда их пытаются использовать при непропорциональном нагружении, что может приводить к заметным ошибкам (см., например, [204]).

### 2.5.2 Непропорциональное многоосное нагружение

Для оценки времени жизни на непропорциональном многоосном нагружении обычно применяют метод критической плоскости<sup>39</sup> (eng. critical plane method/approach). Этот метод состоит в следующем:

1. Ввести некоторый параметр  $P(\sigma, \varepsilon)$ , определённый для плоскости и зависящий от напряжений и/или деформаций цикла.
2. Найти плоскость, на которой данный параметр  $P$  максимален. Найденная плоскость и есть критическая плоскость, вдоль которой в будущем

---

<sup>37</sup>Вертикальная ось графиков не совсем корректно подписана максимальным значением напряжений, в отрицательной области, конечно, максимальным напряжением будет нулевое значение.

<sup>38</sup>На самом деле в несколько более общем случае: когда точка напряженного состояния вычерчивает прямую линию в пространстве напряжений за время одного цикла, такое нагружение можно назвать синфазным.

<sup>39</sup>Конечно же, ничто не мешает применять этот метод и в случае пропорционального нагружения.

зародится и начнёт<sup>40</sup> распространяться трещина<sup>41</sup>.

3. Свести цикл непропорционального многоосного нагружения к эквивалентному циклу одноосного нагружения. Для этого нужно найти положение критической плоскости и значение  $P$  на ней для случая одноосного циклирования и, приравняв его к значению  $P$  для исследуемого цикла, найти амплитуду эквивалентного одноосного цикла.

4. Используя найденную амплитуду эквивалентного одноосного цикла, определить время жизни по диаграмме Вёлера.

Вместо сведения к одноосному циклу в пункте №3, зачастую используют другой подход:

3\* Приравнять найденное максимальное значение параметра  $P$  к некоторой функции числа циклов до разрушения  $f(N_f)$ , аппроксимирующей усталостные свойства материала. Решив уравнение  $P = f(N_f)$  относительно  $N_f$ , найдем искомое время жизни  $N_f$ . В качестве  $f(N_f)$  обычно используют четырёхпараметрическую аппроксимацию

$$f(N_f) = aN_f^b + cN_f^d,$$

где материальные параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  определяются из различных экспериментов: на одноосное циклирование, кручение, многоосное синфазное/несинфазное циклирование и т.д.

Преимуществом пункта №3\* перед пунктом №3 является учет экспериментальных данных на кручение и/или многоосное циклирование при оценке времени жизни, а недостатком — необходимость проведения таких экспериментов.

Одна из первых моделей критической плоскости была предложена в 1959 году для МнЦУ в [205] с параметром

$$P = \tau_a + k \sigma_n^{max}, \quad (2.35)$$

---

<sup>40</sup>Речь идет только о начале распространения трещины, продолжать расти она может в другой плоскости.

<sup>41</sup>Если нагружение выходит за предел выносливости.

где  $\tau_a$  есть амплитуда сдвиговых напряжений на рассматриваемой плоскости,  $\sigma_n^{max}$  — максимальное (за цикл) значение нормального напряжения на рассматриваемой плоскости,  $k$  — материальный параметр.

Величина нормального напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  равна

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.36)$$

в компонентах:

$$\sigma_n = n_i n_j \sigma_{ij},$$

а величина касательного усилия на той же площадке равна

$$\tau = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) - (\sigma_n)^2}, \quad (2.37)$$

в компонентах:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{ij} n_j \sigma_{ik} n_k - (\sigma_n)^2}.$$

Для примера рассмотрим применение параметра (2.35) для случая одноосного нагружения. Компоненты тензора напряжений при регулярном одноосном нагружении имеют вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m + \sigma_a \sin(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где  $t$  — время. Подставляя в (2.36) и (2.37) компоненты тензора напряжений (2.38), получим

$$\sigma_n = n_1^2 (\sigma_m + \sigma_a \sin(t)), \tau = \|\sigma_m + \sigma_a \sin(t)\| \|n_1\| \sqrt{1 - n_1^2},$$

откуда получим максимальное (за цикл) нормальное напряжение и амплитуду сдвигового напряжения:

$$\sigma_n^{max} = n_1^2 (\sigma_m + \sigma_a), \tau_a = \sigma_a \|n_1\| \sqrt{1 - n_1^2}. \quad (2.39)$$

Подставим (2.39) в (2.35):

$$P = \sigma_a \|n_1\| \sqrt{1 - n_1^2} + k n_1^2 (\sigma_m + \sigma_a).$$

Это выражение требуется максимизировать, варьируя компоненты нормали  $n_i$ , в нашем случае присутствует только одна компонента  $n_1$ . Вектор нормали должен быть строго единичной длины, поэтому на  $n_1$  накладывается условие  $\|n_1\| \leq 1$ , а значит, при минимизации удобно сделать замену  $n_1 = \cos(\theta)$ . После минимизации получим

$$\theta_{crit} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sigma_a}{(\sigma_a + \sigma_m)k} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - R}{2k} \right).$$

То есть в случае нагружения (2.38) критическая плоскость есть любая плоскость с нормалью имеющей угол  $\theta_{crit}$  с направлением нагружения. Интересно, что положение критической плоскости не совпадает с плоскостью максимальной амплитуды касательных напряжений и зависит от коэффициента асимметрии цикла  $R$ . Например, если  $k = 0,406$ , то при  $R = -1$ ,  $\theta \approx 0,189\pi$ , а при  $R = 0$  —  $\theta \approx 0,141\pi$ .

Довольно популярной является модель Фатемии — Сосье (Fatemi — Socie model) [206] 1988 года, в которой параметр зависит как от деформаций, так и от напряжений:

$$P = \gamma_a (1 + k\sigma_n^{max}),$$

где  $\gamma_a$  есть амплитуда сдвиговой деформации на плоскости,  $k$  — материальный параметр, обычно  $k \sim 1/\sigma_y$  ( $\sigma_y$  есть предел текучести материала). Если речь идёт о МНЦУ, то есть об отсутствии пластических деформаций при циклировании, деформации можно явно выразить через напряжения, что упростит применение формулы.

В качестве более сложной модели можно предложить модель [207]:

$$P = (2\mu\gamma_a)^\alpha (\tau_{max})^{1-\alpha} (1 + k(\sigma_n\tau)_{max}),$$

где  $\mu$  есть упругий модуль сдвига,  $(\sigma_n\tau)_{max}$  — максимальное значение (за цикл) произведения нормального и сдвигового напряжений на плоскости,  $k$  и  $\gamma$  — материальные параметры. В этой модели учитывается влияние среднего сдвигового напряжения через присутствие  $\tau_{max}$  и  $(\sigma_n\tau)_{max}$ , а

степень этого влияния регулируется параметром  $\alpha$ . Правда совсем избавиться от влияния среднего сдвигового напряжения не получится: даже при  $\alpha = 0$  в формуле останется  $(\sigma_n \tau)_{max}$ .

**Непостоянные направления главных напряжений.** Направления главных напряжений могут меняться с течением времени, это нужно учитывать при определении критической плоскости. Такой случай встречается при наложении несинфазных сдвиговой и растягивающей нагрузок, или двух несинфазных сдвиговых нагрузок, а также двух несинфазных растягивающих нагрузок, если угол между их направлениями не  $\pi/2$ .

Приведём пример: трубу одновременно растягивают вдоль оси постоянным усилием  $\sigma_z^0$  и циклически крутят, создавая касательное напряжение  $\sigma_{\varphi z}$ , варьирующееся от 0 до  $\sigma_{\varphi z}^a$ . Рассмотрим напряженное состояние в точке на поверхности трубы. Тогда при нулевом значении кручения направления главных напряжений совпадают с локальным базисом цилиндрической системы координат, а вследствие возрастающего усилия кручения направления главных напряжений поворачиваются в плоскости, касательной трубе, вплоть до угла  $\alpha_{max} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_{\varphi z}^a}{\sigma_z^0} \right)$ , в случае  $\sigma_z^0 = 300 \text{ МПа}$  и  $\sigma_{\varphi z}^a = 500 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_{max} \approx \frac{\pi}{5}$ .

## 2.6 Эволюционная модель усталостных повреждений

Развитие ЭВМ и численных методов дает дорогу еще одному подходу к предсказанию времени жизни. Это введение параметра поврежденности<sup>42</sup>  $D$  и запись эволюционного уравнения для него:

$$\dot{D} = F(D, \sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \alpha_1, \dot{\alpha}_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_2, \dots), \quad (2.40)$$

где все входящие переменные являются функциями времени,  $F$  — некоторая функция, точка обозначает производную по времени,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  есть тензоры напряжений и деформаций соответственно,  $\alpha_i$  — внутренние параметры модели<sup>43</sup>. Выражение (2.40) интегрируется по времени, и момент времени, когда  $D$  достигает единицы, считается моментом разрушения. Если модель несвязанная<sup>44</sup>, то история нагружения в лице функций  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$  считается заданной. Выражение (2.40) и истории нагружения  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$  записываются для самой опасной точки детали/образца, если самая опасная точка неизвестна заранее, то можно выбрать несколько точек-кандидатов, а самой опасной будет та, в которой  $D$  первым достигнет единицы. Такая модель потенциально способна предсказывать время жизни детали на произвольной многоосной истории нагружения.

Удивительно, что на момент написания этого пособия в литературе почти не встречается подобных моделей. Одной из немногих является эволюционная модель многоциклового усталости Оттосена [208]. Исходная модель имеет ряд недостатков, поэтому здесь будет приведена модифицированная версия.

Модель была вдохновлена теорией пластического течения. В основе модели лежит понятие **поверхности выносливости**, находящейся в

---

<sup>42</sup>Параметр поврежденности может быть не только скаляром но и тензором. Тензорный параметр поврежденности может быть полезен для связанных моделей усталости. Здесь тензорный случай рассматриваться не будет.

<sup>43</sup>Часть из них может быть тензорными.

<sup>44</sup>Параметр поврежденности  $D$  не присутствует в уравнениях упругости и пластичности.

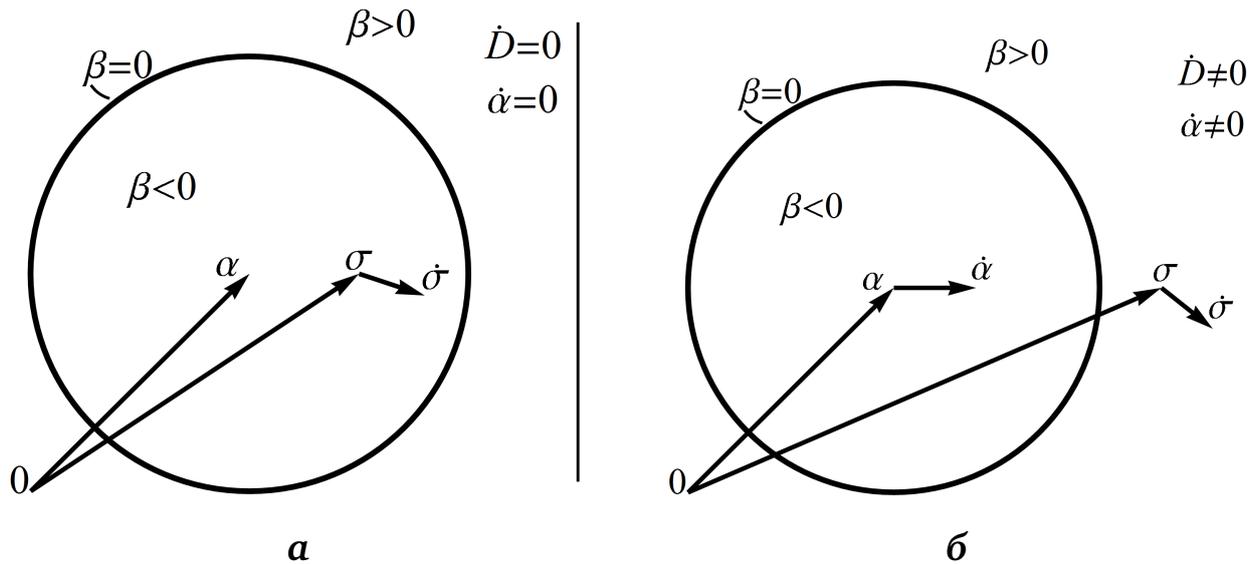


Рис. 2.27. Схематическое изображение модели типа Оттосона: **а** — напряженное состояние находится внутри поверхности выносливости; **б** — напряженное состояние снаружи поверхности выносливости

пространстве напряжений и задаваемой уравнением  $\beta(\sigma) = 0$ , причем внутри поверхности  $\beta < 0$ , а снаружи  $\beta > 0$ . Пока напряженное состояние находится внутри поверхности выносливости ( $\beta < 0$ ), прироста параметра поврежденности не происходит ( $\dot{D} = 0$ ) (рис.2.27а), а когда оно находится за пределами поверхности ( $\beta > 0$ ),  $D$  растет тем быстрее, чем больше значение  $\beta$  (рис.2.27,б), которое мы будем называть **перенапряженностью**. С течением времени поверхность выносливости может двигаться в пространстве напряжений и менять свою форму, что позволяет моделировать приспособляемость материала к истории нагружения.

Таким образом, для завершения построения модели нам необходимо задать выражение для скорости изменения параметра поврежденности  $\dot{D}$ , то есть функцию  $F$  в (2.40), а также поверхность выносливости и закон её движения. Ограничимся случаем МнЦУ, то есть макроскопические пластические деформации отсутствуют. Это означает взаимно однозначную связь между тензорами напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ , что позволяет исключить  $(\varepsilon)$  из (2.40). Положение поверхности выносливости

будем задавать тензорным параметром  $\alpha$ . Перенапряженность  $\beta$  запишем как взвешенную интенсивность напряжений с поправкой, зависящей от первого инварианта тензора напряжений. Уравнения эволюционной модели усталостного разрушения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\sigma_e} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \alpha\| + g(I_1(\boldsymbol{\sigma})) - \sigma_e \right), \\ \dot{\alpha} &= \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_e} h(\beta) f_1(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \alpha)) H(\beta) \frac{\mathbf{s} - \alpha}{\|\mathbf{s} - \alpha\|}, \\ \dot{D} &= \frac{\|\dot{\mathbf{s}}\|}{\sigma_e} p(\beta) f_2(\angle(\dot{\mathbf{s}}, \mathbf{s} - \alpha)) H(\beta), \\ H(\beta) &= \begin{cases} 1, & \beta \geq 0 \\ 0, & \beta < 0 \end{cases},\end{aligned}\tag{2.41}$$

где  $\|\cdot\|$  обозначает норму тензора ( $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{A_{ij}A^{ij}}$ ),  $I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sum \sigma_{ii}$  — первый инвариант тензора напряжений,  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}I_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$  — девиатор тензора напряжений,  $\angle(\cdot, \cdot)$  — «угол» между двумя тензорами (можно определить как  $\angle(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{A} : \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|}\right)$ ),  $\alpha$  — внутренний тензорный параметр, задающий положение поверхности выносливости,  $\beta$  — перенапряженность,  $H(\beta)$  — функция Хейвисайда,  $\sigma_e$  — материальная константа,  $g, h, p, f_1, f_2$  — материальные функции. Модель (2.41) не зависит от скорости изменения нагрузки<sup>45</sup>, то есть важны только значения максимумов и минимумов нагрузки (и их порядок, конечно же).

Реконструируем константу  $\sigma_e$  и функции  $g$  по известной диаграмме Хейга. Итак, будем считать известным предел выносливости как функцию среднего напряжения ( $\sigma_a(\sigma_m)$ ), аппроксимирующую экспериментальные данные. Так как поверхность выносливости способна двигаться, приспособливаясь к циклированию, самая высокая точка  $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$  и самая низкая точка  $\sigma = \sigma_m - \sigma_a$  цикла лежат на поверхности выносливо-

<sup>45</sup>Строго говоря, модель (2.41) инвариантна относительно замены  $t \rightarrow \tau(t)$ , где  $\tau(t)$  есть произвольная монотонно возрастающая функция.

сти ( $\beta = 0$ ). Тогда из первого уравнения (2.41) получим

$$\begin{aligned}\sigma_m + \sigma_a - \frac{3}{2}\alpha + g(\sigma_m + \sigma_a) - \sigma_e &= 0, \\ -\sigma_m + \sigma_a + \frac{3}{2}\alpha + g(\sigma_m - \sigma_a) - \sigma_e &= 0.\end{aligned}$$

Сложением этих двух уравнений можно исключить  $\alpha$ :

$$g(\sigma_m + \sigma_a) = 2\sigma_e - 2\sigma_a - g(\sigma_m - \sigma_a). \quad (2.42)$$

Формула (2.42) — функциональное уравнение относительно функции  $g$ . Будем считать что левая часть диаграммы Хейга есть линейная функция.<sup>46</sup>  $\sigma_a = k\sigma_m + b$ ,  $\sigma_m \leq 0$ . Тогда из (2.42) получим, что

$$\sigma_e = \sigma_{-1} \text{ и } g(x) = -kx, x \leq \sigma_{-1}.$$

Теперь, пользуясь тем, что известна часть функции  $g(x)$ , ее можно восстановить полностью, используя (2.42), так как известна правая часть (2.42).

Остальные материальные функции предлагается искать в виде

$$\begin{aligned}h(\beta) &= k_1|\beta|^{L_1} + b_1, \\ p(\beta) &= k_2(\exp(L_2\beta) - b_2), \\ f_1(\angle) &= f_2(\angle) = \cos(\angle/2)^{L_3}.\end{aligned} \quad (2.43)$$

Функции (2.43) содержат семь констант. Первые шесть констант  $k_1, k_2, L_1, L_2, b_1, b_2$  можно найти по результатам одноосных испытаний.  $L_3$  не участвует в моделировании одноосной истории нагружения, так как в этом случае тензоры  $\dot{s}$  и  $s - \alpha$  пропорциональны, а значит «угол»  $\angle(\dot{s}, s - \alpha)$  равен либо 0, либо  $\pi$  и, соответственно,  $\cos(\angle/2)^{L_3}$  равна либо 1, либо 0 вне зависимости от  $L_3$ . В качестве одноосных испытаний могут выступать диаграмма Вёлера и ряд экспериментов на блочное нагружение. Затем для нахождения констант нужно построить невязку между

<sup>46</sup>Слева она ограничена пределом прочности на сжатие, однако настолько низкие значения  $\sigma_m$  встречаются редко.

экспериментальными данными и предсказаниями модели, и, каким-либо поисковым алгоритмом минимизируя эту невязку, найти константы. Параметр  $L_3$  определяется по результатам опытов с многоосной историей напряжений.

На момент написания текста модель нова и требует экспериментального и аналитического исследования.

### 2.6.1 Об эволюционных уравнениях накопления повреждённости с зависимостью от $D$

Рассмотрим эволюционное уравнение накопления повреждённости  $D$  с зависимостью от  $D$  в виде

$$\dot{D} = g(D)f(t), \quad (2.44)$$

где  $g(D)$  отвечает за зависимость скорости прироста повреждённости величины накопленной повреждённости и  $f(t)$  отвечает за некоторую конкретную историю нагружения, приводящую к накоплению повреждённости.

Например, в нашем случае

$$f(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{s}}(t)\|}{\sigma_e} p(\beta(t)) f_2(\angle(\dot{\mathbf{s}}(t), \mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t))) H(\beta(t)),$$

а закон накопления повреждённости может иметь вид

$$g(D) = \frac{1}{(1 - D)^\gamma}, \quad f(t) = K \exp(L\beta(t)).$$

Докажем следующую **теорему**: эволюционные уравнения типа (2.44) эквивалентны (то есть дают одинаковый результат на любых историях нагружения  $f(t) \geq 0$ ) при любой функции  $g(D) > 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим две различные функции накопления повреждённости  $g_1(D)$  и  $g_2(D)$ , идентифицированные на одной истории

нагружения (или нескольких историях нагружения), то есть на некоторой истории нагружения  $f_1(t)$  разрушение ( $D = 1$ ) наступает за одно и то же время  $t_1$ :

$$\int_0^{t_1} g_1(D) f_1(t) dt = 1, \quad \int_0^{t_1} g_2(D) f_1(t) dt = 1.$$

Теперь рассмотрим некоторую произвольную историю  $f_2(t)$ . На этой истории использование функции  $g_1(D)$  приводит к разрушению  $D = 1$  за время  $t_2$ :

$$\int_0^{t_2} g_1(D) f_2(t) dt = 1.$$

Покажем, что использование  $g_2(D)$  приведёт к  $D = 1$  за то же самое время  $t_2$ :

$$\int_0^{t_2} g_2(D) f_2(t) dt = 1. \quad (2.45)$$

Для того чтобы это сделать, разделим (2.44) на  $g(D)$  и проинтегрируем до времени разрушения  $t_{fail}$ :

$$\int_0^{t_{fail}} \frac{\dot{D}}{g(D)} dt = \int_0^1 \frac{1}{g(D)} dD = \int_0^{t_{fail}} f(t) dt.$$

Применяя такое преобразование для рассматриваемых функций  $g_1, g_2, f_1, f_2$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{g_1(D)} dD &= \int_0^{t_1} f_1(t) dt, \\ \int_0^1 \frac{1}{g_2(D)} dD &= \int_0^{t_1} f_1(t) dt, \\ \int_0^1 \frac{1}{g_1(D)} dD &= \int_0^{t_2} f_2(t) dt, \end{aligned} \quad (2.46)$$

Из (2.46) посредством очевидных преобразований можно получить

$$\int_0^1 \frac{1}{g_2(D)} dD = \int_0^{t_2} f_2(t) dt. \quad (2.47)$$

Осталось только показать что (2.45)  $\Leftrightarrow$  (2.47); (2.45)  $\Rightarrow$  (2.47) очевидно; (2.45)  $\Leftarrow$  (2.47) докажем от противного: пусть функция  $g_2(D)$  приводит к разрушению  $D = 1$  на истории  $f_2(t)$  за время  $t_3 \neq t_2$ :

$$\int_0^{t_3} g_2(D) f_2(t) dt = 1,$$

а значит

$$\int_0^1 \frac{1}{g_2(D)} dD = \int_0^{t_3} f_2(t) dt.$$

Сравнивая последнее выражение с (2.47), получим

$$\int_0^{t_3} f_2(t) dt = \int_0^{t_2} f_2(t) dt,$$

что невозможно, так как  $f_2(t) \geq 0$ . Ч.Т.Д.

Из теоремы следует, что если история нагружения не зависит от накопления повреждённости (то есть модель повреждённости несвязанная), то можно для простоты и без потери общности принять  $g(D) \equiv 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schleicher F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze (Plastizitätsbedingung) // Z. Angew. Math. Mech. 1926. Vol. 6, No. 3. P. 199–216.
2. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 416 с.
3. Ишлинский А.Ю. Гипотеза прочности формоизменения // Ученые записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 46. С. 117–124.
4. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
5. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.
6. Yu M.-H. Unified strength theory and its applications. Springer. Singapore, 2018. 463 p.
7. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
8. Kolupaev V.A., Yu M.-H., Altenbach H. Fitting of the strength hypotheses // Acta Mechanica. 2016. Vol. 227, No. 6. P. 1533–1556. DOI: 10.1007/s00707-016-1566-9
9. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1948. Vol. 193, No. 1033. P. 281–297. DOI: 10.1098/rspa.1948.0045
10. Hill R. Theoretical plasticity of textured aggregates // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1979. Vol. 85, No. 1. P. 179–191. DOI: 10.1017/S0305004100055596
11. Hill R. Constitutive dual potentials in classical plasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1987. Vol. 35, No. 1. P. 23–33. DOI: 10.1016/0022-5096(87)90025-1

12. Hill R. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1990. Vol. 38, No. 3. P. 405–417. DOI: 10.1016/0022-5096(90)90006-P
13. Hill R. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1993. Vol. 35, No. 1. P. 19–25. DOI: 10.1016/0020-7403(93)90061-X
14. Leacock A.G. A mathematical description of orthotropy in sheet metals // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. P. 425–444. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.08.008
15. Lin S.B., Ding J.L. A modified form of Hill's orientation-dependent yield criterion for orthotropic sheet metals. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1996. Vol. 44. P. 1739–1764. DOI: 10.1016/0022-5096(96)00057-9
16. Barlat F., Lian J. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part II. A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions // *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. P. 51–66. DOI: 10.1016/0749-6419(89)90026-0
17. Hosford W.F. On yield loci of anisotropic cubic metals. // *Proceedings of the 7th North American Metalworking Conference (NMRC)*, SME, Dearborn, MI, 1979. P. 191–197.
18. Barlat F., Lege D.J., Brem J.C. A six-component yield function for anisotropic materials // *International Journal of Plasticity*. 1991. Vol. 7. P. 693–712. DOI: 10.1016/0749-6419(91)90052-Z
19. Barlat F. Yielding description for solution strengthened aluminium alloys // *International Journal of Plasticity*. 1997. Vol. 13. P. 185–401. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)80005-8
20. Barlat F. et al. Yield function development for aluminum alloy sheets // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997. Vol. 45, No. 11. P. 1727–1763. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00034-3

21. Barlat F. et al. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part 1: theory // *International Journal of Plasticity*. 2003. Vol. 19, No. 9. P. 1297–1319. DOI: [10.1016/S0749-6419\(02\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00019-0)
22. Barlat F. et al. Linear transformation-based anisotropic yield functions // *International Journal of Plasticity*. 2005. Vol. 21, No. 5. P. 1009–1039. DOI: [10.1016/j.ijplas.2004.06.004](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.06.004)
23. Karafillis A.P., Boyce M.C. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41, No. 12. P. 1859–1886. DOI: [10.1016/0022-5096\(93\)90073-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90073-0)
24. Vial-Edwards C. Yield loci of FCC and BCC sheet metals // *International Journal of Plasticity*. 1997. Vol. 13, No. 5. P. 521–531. DOI: [10.1016/S0749-6419\(97\)00023-5](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(97)00023-5)
25. Banabic D. Sheet metal forming processes. Constitutive Modelling and Numerical Simulation. Springer, 2010. 301 p. DOI: [10.1007/978-3-540-88113-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88113-1)
26. Banabic D. Multiscale Modelling in Sheet Metal Forming. Springer, 2016. 405 p. DOI: [10.1007/978-3-319-44070-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-44070-5)
27. ASTM E8M-16A. Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials. ASTM International. USA, PA, West Conshohocken, 2016. 30 p. DOI: [/10.1520/E0008\\_E0008M-16A](https://doi.org/10.1520/E0008_E0008M-16A)
28. ASTM E 517-00. Standard Test Method for Plastic Strain Ratio  $r$  for Sheet Metal. ASTM International. USA, PA, West Conshohocken, 2010. 8 p. DOI: [10.1520/E0517-00R10](https://doi.org/10.1520/E0517-00R10)
29. Burzyński W. Selected passages from Włodzimierz Burzyński's doctoral dissertation "Study on material effort hypotheses", printed in Polish by the Academy of Technical Sciences, Lwów, 1928, 1–192. Eng. Trans. Pol. Acad. Sci. 57(3–4), 127–157 (2009)

30. Plasticity of Pressure-Sensitive Materials, Engineering Materials/eds. H. Altenbach, A. Öchsner Springer. Berlin, Heidelberg, 2014. 376 p.
31. Mohr O. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik // 2 Aufl., Berlin. Wilhelm Ernst und Sohn. 1914. Abhand. 4. Die Lehre vom Erddruck. S. 236–263.
32. Coulomb C.A. Essai sur une application des regles des maximes et minimis a guelgues problemes de statigue relatifs a architecture // Mem. Acad. Roy. Pres. Divers Savants. 1776. P. 7.
33. Радаев Ю.Н. Мгновенно-нерастяжимые директоры в кинематике трехмерных течений сред Кулона — Мора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, Вып. 4. С. 467–483. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-4-467-483
34. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. Vol. 10, No. 2. P. 157–165.
35. Рейнер М. Реология. М.: Наука-Физматлит, 1965. 224 с.
36. Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact // Phil. Mag. Ser. 5. 1885. No. 127. P. 469–481.
37. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности // Итоги науки и техники ВИНТИ. Механика твердых деформируемых тел. 1972. Т.6, 85 с.
38. Jenike A.W., Shield R.T. On the plastic flow of Coulomb solid beyond original failure // Trans. ASME. 1959. Vol. E26, No. 4. P. 599–602.
39. Drucker D.C., Gibson R.E., Henkel D.J. Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity // Trans. ASCE. 1957. Vol. 122. P. 338–346.
40. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material models for granular soils // Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. 1971. Vol. 97 (EM3). P. 935–950.

41. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Generalized cap model for geological materials // Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE. 1976. P. 683–699.
42. Sandler I.S., Rubin D. An algorithm and a modular subroutine for the CAP model // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 1979. Vol. 3. P. 173–186. DOI: 10.1002/nag.1610030206
43. LS-DYNA® Keyword User's Manual. Volume II. Material Models. Version R10.0. Livermore Software Technology Corporation. 2017. 1577 p. <https://www.dynasupport.com/manuals/ls-dyna-manuals/ls-dyna-manual-r10.0-vol-ii>
44. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел : в 2 т. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т.1, 648 с.
45. Green R.J. A plasticity theory for porous solids // Int. J. Mech. Sci. 1972. Vol. 14, No. 4. P. 215–224.
46. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media // J. Eng. Mater. Technol. 1977. Vol. 99, No. 1. P. 2–15.
47. Tvergaard V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions // Int. J. Fracture. 1981. Vol. 17. P. 389–407.
48. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup–cone fracture in a round tensile bar // Acta Metall. 1984. Vol. 32. P. 157–169.
49. Sofronis P., McMeeking R.M. Creep of power-law material containing spherical voids // J. Appl. Mech. 1992. Vol. 59, No. 2. P. 588–595.
50. Рыбин Ю.И., Цеменко В.Н., Александров А.Э. Математическая модель уплотнения металлических порошковых материалов // Металлообработка. 2004. № 6. С. 45–49.
51. Березин И.М., Нестеренко А.В., Залазинский А.Г. Идентификация модифицированного условия текучести Друкера–Прагера и моде-

лирование процесса уплотнения пластифицированного титансо-державшего сырья. Изв. вузов. Порошк. металлургия и функц. покрытия. 2016. № 2. С. 22–29. DOI: 10.17073/1997-308X-2016-2-22-29

52. Aubertin M., Li L., Simon R., Bussiere B. A general plasticity and failure criterion for materials of variable porosity. Technical Report EPM-RT-2003-11, Ecole Polytechnique de Montreal. 2003. 71 p.
53. Aubertin M., Li L. A porosity-dependent inelastic criterion for engineering materials // International Journal of Plasticity. 2004. Vol. 20, No. 12. P. 2179–2208. DOI: 10.1016/j.ijplas.2004.05.004
54. Шестаков Н.А., Субич В.Н, Демин В.А. Уплотнение, консолидация и разрушение пористых материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 264 с.
55. Schwer L.E., Murray Y.D. A three-invariant smooth cap model with mixed hardening // International Journal for Numerical and Analytical Methods In Geomechanics. 1994. Vol. 18. P. 657–688. DOI: 10.1002/nag.1610181002
56. Khoei A.R., Azami A.R. A single cone-cap plasticity with an isotropic hardening rule for powder materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2005. Vol. 47, No. 1. P. 94–109. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2004.11.002
57. Ottosen N.S. A Failure Criterion for Concrete // ASCE J. Eng. Mech. Div. 1977. Vol. 103. P. 527–535.
58. Ehlers W. A single surface yield function for geomaterials // Arch. Appl. Mech. 1995. Vol. 65. P. 246–259.
59. Mahnken R. Theoretical, numerical and identification aspects of a new model class for ductile damage // Int. J. Plasticity 2002. Vol. 18, No. 7. P. 801–831.

60. Kim K.T. Elasto-plastic response of porous metals under triaxial loading // *International Journal of Solids and Structures*. 1988. Vol. 24, No. 9. P. 937–945.
61. Gu C., Kim M., Anand L. Constitutive equations for metal powders: application to powder forming processes // *International Journal of Plasticity*. 2001. Vol. 17, No. 2. P. 147–209. DOI: [10.1016/S0749-6419\(00\)00029-2](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(00)00029-2)
62. Стефанов Ю.П. Режимы дилатансии и уплотнения развития деформации в зонах локализованного сдвига // *Физ. мезомех.* 2010. Т.13. Спец. вып. С. 44–52.
63. Цеменко В.Н. Деформирование порошковых сред. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 104 с.
64. Swift H.W. Plastic Instability under Plane Stress // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1952. Vol. 1, No. 1. P. 1–18. DOI: [10.1016/0022-5096\(52\)90002-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(52)90002-1)
65. Johnson R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // *Engineering Fracture Mechanics*. 1985. Vol. 21, No. 1. P. 31–48. DOI: [10.1016/0013-7944\(85\)90052-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(85)90052-9)
66. Hu P. et al. Theories, Methods and Numerical Technology of Sheet Metal Cold and Hot Forming. Springer. London, 2013. 210 p. DOI: [10.1007/978-1-4471-4099-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4099-3)
67. Tong L., Stahel S., Hora P. Modeling for the FE-Simulation of Warm Metal Forming Processes // *AIP Conference Proceedings*. 2005. Vol. 778, No. 1. P. 625–629. DOI: [10.1063/1.2011292](https://doi.org/10.1063/1.2011292)
68. Khan A.S., Baig M. Anisotropic responses, constitutive modeling and the effects of strain-rate and temperature on the formability of an aluminum alloy // *International Journal of Plasticity*. 2011. Vol. 27, No. 4. P. 522–538. DOI: [10.1016/j.ijplas.2010.08.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.08.001)

69. Puchi-Cabrera E.S. et al. An experimental analysis and modeling of the work-softening transient due to dynamic recrystallization // *International Journal of Plasticity*. 2014. Vol. 54. P. 113–131. DOI: [10.1016/j.ijplas.2013.08.011](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.08.011)
70. Panicker S.S., Panda S.K. Formability Analysis of AA5754 Alloy at Warm Condition: Appraisal of Strain Rate Sensitive Index // *Materials Today: Proceedings*. 2015. Vol. 2, No. 4–5. P. 1996–2004. DOI: [10.1016/j.matpr.2015.07.169](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2015.07.169)
71. Lang L. et al. Pressure rate controlled unified constitutive equations based on microstructure evolution for warm hydroforming // *Journal of Alloys and Compounds*. 2013. Vol. 574. P. 41–48. DOI: [10.1016/j.jallcom.2013.03.134](https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2013.03.134)
72. Смирнов С.В., Швейкин В.П. Пластичность и деформируемость углеродистых сталей при обработке давлением. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 250 с.
73. Chen H. et al. Hot deformation mechanism and microstructure evolution of TC11 titanium alloy in  $\beta$  field // *Trans. Nonferrous Met. Soc.* 2008. Vol. 18, No. 5. P. 1021–1027. DOI: [10.1016/S1003-6326\(08\)60175-2](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(08)60175-2)
74. Quan G. et al. Dynamic softening behaviors of 7075 aluminum alloy // *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*. 2009. Vol. 199. P. 537–541. DOI: [10.1016/S1003-6326\(10\)60104-5](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(10)60104-5)
75. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния при ползучести // *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела*. 1984. №. 1. С. 86–91.
76. Alexandrov S., Mishuris G. Viscoplasticity with a saturation stress: distinguishing features of the model // *Archive of Applied Mechanics*. 2007. Vol. 77, No. 1. P. 35–47. DOI: [10.1007/s00419-006-0078-9](https://doi.org/10.1007/s00419-006-0078-9)
77. Clift S.E., Hartley P., Sturgess C.E.N., Rowe G.W. Fracture prediction in plastic deformation processes // *International Journal of Mechanical*

- Science. 1990. Vol. 32, No. 1. P. 1–17. DOI: 10.1016/0020-7403(90)90148-C
78. Cockcroft M.G., Latham D.J. Ductility and the workability of metals // Journal of the Institute of Metals. 1968. Vol. 96. P. 33–39.
79. Oh S.I., Chen C.C., Kobayashi S. Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing. Part 2. Workability in extrusion and drawing // ASME Journal of Engineering for Industry. 1979. Vol. 101. P. 36–44.
80. McClintock F.A. A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, No. 2. P. 363–371. DOI: 10.1115/1.3601204
81. Rice J.R., Tracey D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1969. Vol. 17, No. 3. P. 201–217. DOI: 10.1016/0022-5096(69)90033-7
82. Wierzbicki T. et al. Calibration and evaluation of seven fracture models // International Journal of Mechanical Sciences. 2005. Vol. 47, No. 4. P. 719–743. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2005.03.003
83. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // International Journal of Mechanical Sciences. 2004. Vol. 46, No. 1. P. 81–98. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2004.02.006
84. Yang X. et al. Modified MK model combined with ductile fracture criterion and its application in warm hydroforming // Transactions of Nonferrous Metals Society of China. 2015. Vol. 25. P. 3389–3398 DOI: 10.1016/S1003-6326(15)63974-7
85. Oyane M. et al. Criteria for Ductile Fracture and Their Applications // Journal of Mechanical Working Technology. 1980. Vol. 4. P. 65–81. DOI: 10.1016/0378-3804(80)90006-6
86. Ko Y.K. et al. Prediction of fracture in hubhole expanding process using a new ductile fracture criterion // Journal of Materials

- Processing Technology. 2007. Vol. 187–188. P. 358–362. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2006.11.071
87. Lou Y. et al. New ductile fracture criterion for prediction of fracture forming limit diagrams of sheet metals // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. P. 3605–3615. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.02.016
88. Ghosh A.K. A criterion for ductile fracture in sheets under biaxial loading // Metallurgical Transactions A. 1976. Vol. 7, No. 4. P. 523–533. DOI: 10.1007/BF02643968
89. Norris D.M.Jr. et al. A Plastic-Strain, Mean-Stress Criterion for Ductile Fracture // Journal of Engineering Materials and Technology. Transactions of ASME. 1978. Vol. 100, No. 3. P. 279–286. DOI: 10.1115/1.3443491
90. Atkins A.G. Possible explanation for unexpected departures in hydrostatic tension-fracture strain relations // Metal Science. 1981. Vol. 15, No. 2. P. 81–83. DOI: 10.1179/msc.1981.15.2.81
91. Weck A., Wilkinson D.S. Experimental investigation of void coalescence in metallic sheets containing laser drilled holes // Acta Materialia. 2008. Vol. 56, No. 8. P. 1774–1784. DOI: 10.1016/j.actamat.2007.12.035
92. Li H. et al. Ductile fracture: Experiments and computations // International Journal of Plasticity. 2011. Vol. 27, No. 2. P. 147–180. DOI: 10.1016/j.ijplas.2010.04.001
93. Власов А.В. О применении критерия Кокрофта — Лэтэма для прогнозирования разрушения при холодной объемной штамповке // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 11–1. P. 46–58.
94. Atkins A.G. Fracture mechanics and metal forming. Damage mechanics and the local approach of yesterday and today // In Fracture research in retrospective/ed. Rossmann H.P. Rotterdam. 1997. P. 327–350.

95. Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В. Ресурс пластичности металлов при обработке давлением. М.: Metallurgiya, 1984. 144 с.
96. Калпин Ю.Г. и др. Сопротивление деформации и пластичность при обработке металлов давлением. М.: Машиностроение, 2011. 244 с.
97. Боткин А.В., Валиев Р.З. Оценка поврежденности металла при холодной пластической деформации с использованием модели разрушения Кокрофта — Латама // Деформация и разрушение материалов. 2011. №. 7. P. 17–22.
98. Silva M.B. et al. Fracture loci in sheet metal forming: A review // Acta Metallurgica Sinica. 2015. Vol. 28, No. 12. P. 1415–1425. DOI: 10.1007/s40195-015-0341-6
99. Isik K. et al. Formability limits by fracture in sheet metal forming // Journal of Materials Processing Technology. 2014. Vol. 214, No. 8. P. 1557–1565. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2014.02.026
100. Silva M.B. et al. Fracture Toughness and Failure Limits in Sheet Metal Forming // Journal of Materials Processing Technology. 2016. Vol. 234, No. 8. P. 1557–1565. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2016.03.029
101. Atkins A.G. Fracture in forming // J. Mater. Process. Techn. 1996. Vol. 56. P. 609–618.
102. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // Acta Metallurgica. 1984. Vol. 32, No. 1. P. 157–169. DOI: 10.1016/0001-6160(84)90213-X
103. Власов А.В., Герасимов Д.А. Реализация модели Гурсо–Твергарда–Нидельмана для расчета процессов холодной объемной штамповки несжимаемых материалов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. №. 8(689). С. 8–17. DOI: 10.18698/0536-1044-2017-8-8-17

104. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Journal of Engineering Materials and Technology. 1977. Vol. 99, No. 1. P. 2–15. DOI: 10.1115/1.3443401
105. Needleman A., Triantafyllidis N. Void growth and local necking in biaxially stretched sheets // Journal of Engineering Materials and Technology. 1978. Vol. 100, No. 2. P. 164–169. DOI: 10.1115/1.3443466
106. Nahshon K., Hutchinson J.W. Modification of the Gurson Model for shear failure // European Journal of Mechanics - A:Solids. 2008. Vol. 27, No. 1. P. 1–17. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2007.08.002
107. Andrade F.X.C. et al. An incremental stress state dependent damage model for ductile failure prediction // International Journal of Fracture. 2016. Vol. 200, No. 1-2. P. 127–150 DOI: 10.1007/s10704-016-0081-2
108. Andrade F.X.C., Feucht M., Haufe A. On the Prediction of Material Failure in LS-DYNA® : A Comparison Between GISSMO and DIEM // The 13th LS-DYNA International Conference, June 8-10 2014, Dearborn, MI. [http://www.dynalook.com/13th-international-ls-dyna-conference/constitutive-modeling/on-the-prediction-of-material-failure-in-ls-dyna-r-a-comparison-between-gissmo-and-diem/at\\_download/file](http://www.dynalook.com/13th-international-ls-dyna-conference/constitutive-modeling/on-the-prediction-of-material-failure-in-ls-dyna-r-a-comparison-between-gissmo-and-diem/at_download/file)
109. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: present state and future trends // Nuclear Engineering and Design. 1987. Vol. 105, No. 1. P. 19–33. DOI: 10.1016/0029-5493(87)90225-1
110. Lee H., Peng K.E., Wang J. An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates // Engineering Fracture Mechanics. 1985. Vol. 21, No. 5. P. 1031–1054. DOI: 10.1016/0013-7944(85)90008-6
111. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.

112. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Springer. Netherlands, 2012. 402 p. DOI: 10.1007/978-94-007-2666-6
113. Zhu Y.Y., Cescotto S. A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32, No. 11. P. 1607–1641. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.10.002
114. Badreddine H., Saanouni K., Nguyen T.D. Damage anisotropy and its effect on the plastic anisotropy evolution under finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 63. P. 11–31. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.02.009
115. Badreddine H., Labergère C., Saanouni K. Ductile damage prediction in sheet and bulk metal forming // Comptes Rendus Mécanique. 2016. Vol. 344, No. 4–5. P. 296–318. DOI: 10.1016/j.crme.2015.11.006
116. Simo J.C., Ju J.W. On continuum damage-elastoplasticity at finite strains. A computational framework // Computational Mechanics. 1989. Vol. 5. P. 375–400.
117. Voyiadjis G.Z., Abu Al-Rub R.K., Palazotto A.N. Thermodynamic framework for coupling of non-local viscoplasticity and non-local anisotropic viscodamage for dynamic localization problems using gradient theory // International Journal of Plasticity. 2004. Vol. 20, No. 6. P. 981–1038. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.10.002
118. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Journal of Engineering Materials and Technology. 1985. Vol. 107, No. 1. P. 83–89. DOI: 10.1115/1.3225775
119. Heibel S. et al. Influence of Different Yield Loci on Failure Prediction with Damage Models // Journal of Physics: IOP Conf. Series. 2017. Vol. 896. DOI: 10.1088/1742-6596/896/1/012081

120. Marciniak Z., Kuczynski K. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9, No. 9, P. 609–620. DOI: 10.1016/0020-7403(67)90066-5
121. Hill R. On Discontinuous Plastic States, with Special Reference to Localized Necking in Thin Sheets // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1952. Vol. 1, No. 1. P. 19–30. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90003-3
122. Hutchinson J.W., Neale K.W., Needleman A. Sheet necking: II. Time-independent behavior // *Mechanics of sheet metal forming/eds. D.P. Koistinen, N.M. Wang*. New York, 1978. P. 111–126. DOI: 10.1007/978-1-4613-2880-3
123. Kotkunde N. et al. Influence of material models on theoretical forming limit diagram prediction for Ti-6Al-4V alloy under warm condition // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2016. Vol. 26. P. 736–746. DOI: 10.1016/S1003-6326(16)64140-7
124. Chu C.C. An analysis of localized necking in punch stretching // *International Journal of Solids and Structures*. 1980. Vol. 16, No. 10. P. 913–931. DOI: 10.1016/0020-7683(80)90057-8
125. Davies R.W. et al. Forming-limit diagrams of aluminum tailor-welded blank weld material // *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2001. Vol. 32, No. 2. P. 275–283. DOI: 10.1016/0020-7683(80)90057-8
126. Graf A., Hosford W.F. Calculations of Forming Limit Diagrams // *Metallurgical Transactions A*. 1990. Vol. 21, No. 1. P. 87–94. DOI: 10.1007/BF02656427
127. Lian J., Baudelet B. Forming Limit Diagram of Sheet Metal in the Negative Minor Strain Region // *Materials Science and Engineering*. 1987. Vol. 86. P. 137–144. DOI: 10.1016/0025-5416(87)90448-4

128. Lian J., Barlat F., Baudelet B. Strain rate and temperature dependent fracture criteria for isotropic and anisotropic metals // *International Journal of Plasticity*. 1989. Vol. 5. P. 131–147.
129. Bruschi S. et al. Testing and modelling of material behaviour and formability in sheet metal forming // *CIRP Annals - Manufacturing Technology*. 2014. Vol. 63, No. 2. P. 727–749. DOI: [10.1016/j.cirp.2014.05.005](https://doi.org/10.1016/j.cirp.2014.05.005)
130. Altmeyer G. Theoretical and Numerical Comparison of Limit Point Bifurcation and Maximum Force Criteria. Application to the Prediction of Diffuse Necking // *Modeling and Numerical Simulation of Material Science*. 2013. Vol. 3, No. 1. P. 39–47. DOI: [10.4236/mnsms.2013.31006](https://doi.org/10.4236/mnsms.2013.31006)
131. Khan A.S., Liu H. Strain rate and temperature dependent fracture criteria for isotropic and anisotropic metals // *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 37. P. 1–15. DOI: [10.1016/j.ijplas.2012.01.012](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.012)
132. Khan A.S., Suh Y.S., Kazmi R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys // *International Journal of Plasticity*. 2004. Vol. 20, No. 12. P. 2233–2248. DOI: [10.1016/j.ijplas.2003.06.005](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.06.005)
133. Safari M. et al. Experimental and Theoretical Investigation of Forming Limit Diagram (FLD) and Forming Limit Stress Diagram (FLSD) For Aluminum Alloy 3105 // *AIP Conference Proceedings*/ed. F. Chinesta, Y. Chastel and M. Mansori. 2011. Vol. 1315, No. 1. P. 45–50. DOI: [10.1063/1.3552488](https://doi.org/10.1063/1.3552488)
134. Park N. et al. Fracture-based Forming Limit Criteria for Anisotropic Materials in Sheet Metal Forming // *International Journal of Plasticity*. 2017. Vol. 96. P. 1–35. DOI: [10.1016/j.ijplas.2016.04.014](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.014)
135. Pourboghraat F., Venkatesan S., Carsley J.E. LDR and hydroforming limit for deep drawing of AA5754 aluminum sheet // *Journal of*

- Manufacturing Processes. 2013. Vol. 15, No. 4. P. 600–615. DOI: 10.1016/j.jmapro.2013.04.003
136. Beaudoin A.J. et al. Application of Polycrystal Plasticity to Sheet Forming // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1994. Vol. 117, No. 1–2. P. 49–70. DOI: 10.1016/0045-7825(94)90076-0
137. Brunet M., Morestin F. Experimental and analytical necking studies of anisotropic sheet metals // Journal of Materials Processing Technology. 2001. Vol. 112, No. 2–3. P. 214–226. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)00578-7
138. Hecker S.S. Simple technique for determining forming limit curves // Sheet Metal Industries. 1975. Vol. 5, No. 9. P. 671–676.
139. Djavanroodi F., Derogar A. Experimental and numerical evaluation of forming limit diagram for Ti6Al4V titanium and Al6061-T6 aluminum alloys sheets // Materials and Design. 2010. Vol. 31. P. 4866–4875. DOI: 10.1016/j.matdes.2010.05.030
140. Tadros A.K., Mellor P.B. An experimental study of the in-plane stretching of sheet metal // International Journal of Mechanical Sciences. 1978. Vol. 20. P. 121–134. DOI: 10.1016/0020-7403(78)90073-5
141. Takuda H., Mori K., Hatta N. The application of some criteria for ductile fracture to the prediction of the forming limit of sheet metals // Journal of Materials Processing Technology. 1999. Vol. 95. P. 116–121. DOI: 10.1016/S0924-0136(99)00275-7
142. Gronostajski J., Dolny A. Determination of forming limit curves by means of Marciniak punch // Memories Sci. Rev. Metal. 1980. Vol. 4. P. 570–578.
143. Raghavan K.S. A simple technique to generate in-plane forming limit curves and selected applications // Metallurgical Transactions A. 1995. Vol. 26. P. 2075–2084.

144. Kuroda M., Tvergaard V. Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria // *International Journal of Solids and Structures*. 2000. Vol. 37. P. 5037–5059. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00200-0
145. Avila A.F., Vieira E.L.S. Proposing a better forming limit diagram prediction: a comparative study // *Journal of Materials Processing Technology*. 2003. Vol. 141. P. 101–108.
146. Wang L., Lee T.C. The effect of yield criteria on the forming limit curve prediction and the deep drawing process simulation // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2006. Vol. 46. P. 988–995. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2005.07.050
147. Campbell G.S., Lahey R. A survey of serious aircraft accidents involving fatigue fracture // *International Journal of Fatigue*. 1984. Vol. 6, No. 1. P. 25-30. DOI: 10.1016/0142-1123(84)90005-7
148. Wöhler A. Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl // *Zeitschrift für Bauwesen*. 1870. Vol. XX. P. 73-106.
149. Schütz W. A history of fatigue // *Engrg. Fracture Mech*. 1996. Vol. 54. P. 263–300. DOI: 10.1016/0013-7944(95)00178-6
150. Godefroid L.B. et al. Effect of chemical composition and microstructure on the fatigue crack growth resistance of pearlitic steels for railroad application // *International Journal of Fatigue*. 2019. Vol. 120. P. 241–253. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2018.10.016
151. Blinn B. et al. Influence of the Chemical Composition of the Used Powder on the Fatigue Behavior of Additively Manufactured Materials // *MDPI Metals*. 2019. Vol. 9, No. 12. Article №1285. DOI: 10.3390/met9121285
152. Turnbull A., De Los Rios E.R. The Effect of Grain Size on the Fatigue of Commercially Pure Aluminium // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 1995. Vol. 18. P. 1455–1467. DOI: 10.1111/j.1460-2695.1995.tb00868.x

153. Kobayashi K. et al. Grain size effect on high-temperature fatigue properties of alloy718 // *Materials Letters*. 2005. Vol. 59, No. 2–3. P. 383–386. DOI: 10.1016/j.matlet.2004.09.029
154. Tsushida M. et al. Relationship between Fatigue Strength and Grain Size in AZ31 Magnesium Alloys // *Materials Transactions*. 2008. Vol. 49, No. 5. P. 1157–1161. DOI: 10.2320/matertrans.MC2007101
155. Järvenpää A., Karjalainen L.P., Jaskari M., Effect of grain size on fatigue behavior of Type 301LN stainless steel // *International Journal of Fatigue*. 2014. Vol. 65. P. 93–98. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2013.05.012
156. Alzubi F. et al. Large versus Small Grain Sizes on Fatigue Life of Aluminum Aircraft Wheels // *Defect and Diffusion Forum*. 2019. Vol. 391. P. 174–194. DOI: 10.4028/www.scientific.net/ddf.391.174
157. Donachie, M.J. Titanium. A Technical Guide, 2nd ed. ASM International. USA, OH, Materials Park, 2000. 381 p.
158. Chastand V. et al. Comparative study of fatigue properties of Ti-6Al-4V specimens built by electron beam melting (EBM) and selective laser melting (SLM) // *Materials Characterization*. 2018. Vol. 143. P. 76–81. DOI: 10.1016/j.matchar.2018.03.028
159. Mohamed R.B., Abdellatif A.K. Effect of surface finish on fatigue strength // *Engineering Fracture Mechanics*. 1995. Vol. 51, No. 5. 1995. P. 861–870. DOI: 10.1016/0013-7944(94)00297-U
160. Lai J., Huang H., Buising W. Effects of microstructure and surface roughness on the fatigue strength of high-strength steels // *Procedia Struct Integr* №2. 2016. P. 1213–1220. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.155
161. Shiozawa K., Lu L., Ishihara S. S–N curve characteristics and subsurface crack initiation behaviour in ultra-long life fatigue of a high carbon-chromium bearing steel // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials*

- & Structures. 2001. Vol. 24. P. 781–790. DOI: 10.1046/j.1460-2695.2001.00459.x
162. Rausch T. Zum Schwingfestigkeitsverhalten von Gusseisenwerkstoffen unter einachsiger und mehrachsiger Beanspruchung am Beispiel von EN-GJV-450. [PhD thesis]. Aachen, Shaker Verlag. 2011.
163. Dixon W.J., Mood A.M. A Method for Obtaining and Analyzing Sensitivity Data // Journal of the American Statistical Association. 1948. Vol. 43, No. 241. P. 109–126. DOI: 10.2307/2280071
164. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов: пер. с англ. М.: Машиностроение, 1964. 275 с.
165. Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и сортамента: справочник. М.: Машиностроение, 1970. 576 с.
166. Sinha, V. et al. Correlating Scatter in Fatigue Life with Fracture Mechanisms in Forged Ti-6242Si Alloy // Metall and Mat. Trans. A. 2018. Vol. 49. P. 1061–1078. DOI: 10.1007/s11661-017-4437-7
167. Müller-Stock H. Der Einfluß dauernd und unterbrochen wirkender, schwingender Überbeanspruchung auf die Entwicklung des Dauerbruchs. Dissertation, TH Braunschweig, 1937.
168. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability // Trans. ASME, J. appl. Mech. 1951. Vol. 73. P. 293–297.
169. Rossow E. A simple slide-rule approximation of normal probability percentages // Qualitätskontrolle. Vol. 9, No. 12. P. 146–147.
170. Basinski Z.S., Basinski S.J. Fundamental aspects of low amplitude cyclic deformation in face-centred cubic crystals // Progress in Materials Science. 1992. Vol. 36. P. 89–148. DOI: 10.1016/0079-6425(92)90006-s
171. Ewing J.A., Humfrey J.C.W. The fracture of metals under repeated alternations of stress // Phil. Trans. Royal Society, London. 1903. Vol. 200. P. 241–250. DOI: 10.1098/rsta.1903.0006

172. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern // VDI-Zeitschrift. 1924. Vol. 68. P. 339-341.
173. Miner M.A. Cumulative damage in fatigue // Trans. ASME J. appl. Mech. 1945. Vol. 12. P. A159–A164.
174. Matsuishi M., Endo T. Fatigue of metals subjected to varying stress // Jap. Soc. Mech. Engng. 1968. Vol. 68, No. 2. P. 37-40.
175. Haibach F. Modifizierte Schadensakkumulationshypothese zur Berücksichtigung des Dauerfestigkeitsabfalls mit fortschreitender Schädigung // LBF-report TM-50/70. Darmstadt, 1970.
176. EN 1993-1-9:2005-05 + AC:2009-04. Eurocode 3: Design of steel structures — Part 1–9: Fatigue. European Committee for Standardization. Brussels, 2009.
177. Zenner H., Liu J. Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschaetzung nach dem Nennspannungskonzept // Konstruktion, vormals Konstr.im Masch. Bau. 1992. Vol. 44, No. 1. P. 9–17.
178. Стрижиус В. Е. Уравнение кривой усталости при квазислучайном нагружении элементов продольного набора крыла неманевренного самолета // Ученые записки ЦАГИ. 1998. Т. XXIX, № 3—4.
179. Haibach E. Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. Springer. Berlin, Heidelberg, 2006.
180. Schütz W. The fatigue life under three different load spectra tests and calculations // AGARD CP 118. Symposium on Random Load Fatigue. Denmark, Lyngby, 1972.
181. Naumann E.C. Fatigue under random and programmed loads. NASA TN D-2629, 1964.
182. Jacoby G.H. Comparison of fatigue lives under conventional program loading and digital random loading. Effects of Environmental and

- Complex Load History on Fatigue Life // ASTM TP 462. 1970. P. 184–202. DOI: 10.1520/STP32042S
183. Naumann E.C., Hardrath H.R., Guthrie, E.C. Axial load fatigue tests of 2024-T3 and 7075-T6 aluminum alloy sheet specimens under constant- and variable-amplitude loads. NASA Report TN D-212, 1959. Доступен онлайн <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=uiug.30112106589226>
184. Schütz W., Heuler P. Miner's rule revisited // An Assessment of Fatigue Damage and Crack Growth Prediction Techniques. AGARD Report No. 797, 1994.
185. Kotte K.L, Eulitz K.G. Data pool structural integrity - Reliability of lifetime prediction methods[GER] // Mat.-wiss. & Werkstofftechnik. 2003. Vol. 34. P. 836–842. DOI: 10.1002/mawe.200300668
186. Crews J. Crack Initiation at Stress Concentrations as Influenced by Prior Local Plasticity, Achievement of High Fatigue Resistance in Metals and Alloys // ASTM International. 1970. P. 37–49. DOI: 10.1520/STP26838S
187. Misawa, H., Schijve, J. Fatigue crack growth in aluminium alloy sheet material under constant-amplitude and simplified flight-simulation loading. Report LR-381, 1983.
188. Borrego L.P., et al. Evaluation of overload effects on fatigue crack growth and closure // Engineering Fracture Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 11. DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00119-4
189. Gough H.J. The fatigue of metals. London, Scott, Greenwood, 1924.
190. Peterson R.E. Stress Concentration Factors. John Wiley & Sons, New York, 1974.
191. Neuber H. Theory of Notch Stresses. J.W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1946.
192. Siebel E., Stieler M. Significance of dissimilar stress distributions for cyclic loading // Zeitschr VDI. 1955. Vol. 97. P. 146–148.

193. Landers C.B., Hardrath H.F. Results of axial-load fatigue tests on electropolished 2024-T3 and 7075-T6 aluminum-alloy-sheet specimens with central holes. Report NACA TN 3631, 1956.
194. Phillips C.E., Heywood R.B., Size effect in fatigue of plain and notched steel specimens // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1951. Vol. 165. P. 113–124. DOI: 10.1243/PIME\_PROC\_1951\_165\_014\_02
195. Neuber H. Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law // Trans. ASME E. J. Appl. Mech. 1961. Vol. 29. P. 544–550. DOI: 10.1115/1.3641780
196. Akiniwa Y. et al. Fatigue strength of spring steel under axial and torsional loading in the very high cycle regime // International Journal of Fatigue. 2008. Vol. 30. P. 2057–2063. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2008.07.004
197. Forrest P.G. Fatigue of Metals. Pergamon Press. Oxford, 1962.
198. Gough H.J., Pollard H.V. The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. Inst. Mech. Engrs. 1935. Vol. 131. P. 3–103. DOI: 10.1243/PIME\_PROC\_1935\_131\_008\_02
199. Gough H.J., Pollard H.V., Some experiments of the resistance of metals to fatigue under combined stresses // Min. of Supply. Aero Res. Council. RSM 2522, Part I, 1951.
200. Sines G. Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses. National Advisory Committee for Aeronautics. Washington DC, USA, 1955. Доступен онлайн <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc59791>
201. Findley W.N. Combined Stress Fatigue Strength of 76S-T61 Aluminum Alloy with Superimposed Mean Stresses and Corrections for Yielding. National Aeronautics and Space Administration. Washington DC, USA, 1953. Доступен онлайн <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc56675>

202. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressure on the torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. London, 1956. P. 138–149.
203. Roš M., Eichinger A. Die Bruchgefahr fester Körper. Bei wiederholter Beanspruchung — Ermüdung // EMPA Bericht №173. Zürich, 1950.
204. Papadopoulos I.V. et al. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals // Int. J. Fatigue. 1997. Vol. 19, No. 3. P. 219–235. DOI: 10.1016/S0142-1123(96)00064-3
205. Findley W.N. A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue of Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending // ASME. J. Eng. Ind. 1959. Vol. 81, No. 4. P. 301–305. DOI: 10.1115/1.4008327
206. Fatemi A., Socie D.F. A Critical plane to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 1988. Vol. 11. P. 149–165. DOI: 10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x
207. Suman S., Kallmeyer A., Smith J. Development of a multiaxial fatigue damage parameter and life prediction methodology for non-proportional loading // Frattura ed Integrità Strutturale. 2016. Vol. 10. P. 224–230. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.38.30
208. Ottosen N.S., Stenström R., Ristinmaa M. Continuum approach to high-cycle fatigue modeling // International Journal of Fatigue. 2008. Vol. 30, No. 6. P. 996–1006. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2007.08.009

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аномалия  
пластической анизотропии  
второго типа, 14, 53  
первого типа, 14, 53
- Ассоциированный закон пластического течения, 15, 17, 21, 24–26, 29, 31, 50, 54
- Гипотеза  
Пальмгрена–Майнера, 80, 81, 89, 96, 102, 104
- Диаграмма  
Бужинского, 27  
Вёлера, 65, 81, 96, 103, 105, 112, 119, 126  
Гудмана, 69  
Хейга, 69, 86, 125
- Дилатансия, 29
- Зависимость  
от среднего напряжения, 27  
от трехосности (жесткости) напряженного состояния, 41  
от угла вида напряженного состояния, 33, 43
- Зерно(металла), 60, 66, 76
- Интенсивность напряжений (эквивалентное напряжение по Мизесу), 10
- История нагружения, 60, 62, 82, 105, 123, 124, 127
- Концентратор напряжений, 40, 60, 65, 102, 105, 107, 110, 112
- Коэффициент  
Ланкфорда, 13  
анизотропии, 13  
анизотропии двухосный, 14  
асимметрии цикла, 62, 64, 65, 69, 81, 121  
внутреннего трения, 27  
концентрации напряжений, 107  
концентрации напряжений, усталостный, 107  
сцепления, 27
- Критерии  
вязкого разрушения  
несвязанные, 40  
связанные, 44
- Критерии прочности  
анизотропные, 13  
изотропные, 8, 27  
учитывающие зависимость от среднего напряжения, 27
- Критерии текучести

- анизотропные, 13
- изотропные, 8, 27
- учитывающие зависимость от  
среднего напряжения, 27
- Критерий
- Karafillis и Воусе, 25
- Леаскок, 22
- Lin и Ding, 21
- Барлата Yld2000-2d, 26
- Барлата Yld89, 23
- Барлата Yld94, 24
- Барлата Yld96, 24
- Бельтрами, 9
- Бужинского, 31
- Галилея, 8
- Гарсона – Твергарда – Нидле-  
мана (GTN), 32
- Грина, 32
- Друкера – Прагера, 28
- Ишлинского – Ивлева, 11, 53
- Кулона – Мора, 27, 54
- Майнкена, 35
- Мариотта, 9
- Надаи, 32
- Оттосена, 34
- Соколовского, 12
- Треска, 8, 53
- Хаара – Кармана, 12
- Хилла Hill48, 14, 53
- Хилла Hill79, 18, 53
- Хилла Hill90, 19, 53
- Хилла Hill93, 22, 53
- Хоеи, 34
- Хубера – Мизеса, 10, 53
- Швера и Мюррей, 34
- Шлейхера, 31
- Эйлерса, 34
- вязкого разрушения, 40
- Аткинса, 44
- Вержбицкого и Бао, 42
- Джонсона – Кука, 42, 47
- Клифта, 42
- Кокрофта и Лэтэма, 42
- Макклинтока, 42
- максимальных приведенных  
напряжений, 11
- полной пластичности, 12
- Кэп-модель
- Дженике и Шилда, 29
- Димаджио и Сандлера, 30
- Димаджио и Сендлера, 54
- Друкера, 30
- Локализация пластической де-  
формации, 40, 48
- Метод
- Марциньяка – Кучинского, 48
- Сайнса, 116
- критической плоскости, 118

- лестницы, 69, 107
- локальной истории деформации, 105
- подсчёта циклов, 103
- сведения к отнулевому циклу, 81, 116, 119
- схематизации циклов
  - дождя, 90
  - максимумов, 90
  - пересечений, 90
  - полных циклов, 93
  - размахов, 90
- Модель
  - DIEM, 46
  - GISSMO, 45
  - Ананда, 35
  - Гарсона – Твергарда – Нидлемана (GTN), 44
  - Кэйси и Нагди, 35
  - Оттосена, 123
  - Фатеми–Сосье, 121
  - усталости, эволюционная, 123
- Нагружение
  - блочное, 80, 102, 104, 126
  - многоосное, 112, 123
  - непропорциональное, 118
  - нерегулярное, 62, 80
  - пропорциональное, 112
  - регулярное, 62, 69, 104, 120
- сдвиговое, 112, 113
- синфазное, 112
- случайное, 62, 80, 89, 96, 102–104
- со сложной историей, 62, 80, 89, 96, 102–104
- Остаточные напряжения, 102
- Пакет программ
  - ABAQUS<sup>®</sup>, 35
  - LS-DYNA<sup>®</sup>, 17, 21, 24–26, 28, 29, 33, 34, 44, 46
- Параметр
  - Лоде, 53
  - поврежденности, 41, 45, 47
  - повреждённости, 80, 82, 92, 96, 102, 104, 116, 123, 127
  - пористости, 32, 44
  - трехосности (жесткости) напряженного состояния, 53
- Пирамида
  - Кулона – Мора, 28
  - Треска – Кулона, 28
- Плоскость скольжения, 77
- Предел
  - выносливости/усталости, 59, 66, 69, 86, 96, 107, 112–114, 125
  - прочности, 59, 82, 87
  - текучести

при двухосном растяжении,  
14  
при одноосном растяжении,  
9, 53  
при чистом сдвиге, 8, 53

Призма  
Треска – Кулона, 9

Распределение  
Вейбулла, 75  
лог-нормальное, 73

Спектр нагружения, 62, 98, 102

Теория прочности  
вторая, 9  
первая, 8  
пятая, 10  
третья, 8  
четвертая, 9

Угол  
вида напряженного состояния,  
28  
внутреннего трения, 27

Упрочнение  
деформационное, 37  
скоростное, 37  
температурное, 37

Усталость  
малоцикловая, 65, 66  
многоцикловая, 60, 65, 69, 73,  
113, 115, 119, 121, 123, 124

Формула  
Нейбера, 111  
Одинга, 82  
Сайнса, 116

Цикл  
отнулевой, 62, 64, 69, 82, 118  
симметричный, 62, 69, 82, 116

Цилиндр  
Хубера – Мизеса, 11

Шестигранник  
Треска, 28

Учебное издание

Келлер Илья Эрнстович,  
Петухов Дмитрий Сергеевич

## КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебное пособие

Редактор и корректор М.Н. Афанасьева

---

Подписано в печать 16.11.2020. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 10. Тираж 50 экз. Заказ 806/2020.

---

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета,  
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к.113.  
Тел. (342)219-80-33.