

**Пермский Государственный Технический Университет**  
**Кафедра «Динамика и прочность машин»**

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

**Изгиб пластин**

Учебно-методическое пособие

Пермь 2006

УДК 519.3:624.07

К 60

Рецензенты: профессор ПГУ, д-р техн. наук, зав. каф. «Информатика и искусственный интеллект» ПГПУ Ясницкий Л.Н.; канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры ДПМ Пермского государственного технического университета А.А. Лежнева

### **Кузнецова Е.В.**

К60 Изгиб пластин: Учебное-методическое пособие к решению задач и лабораторному практикуму по исследованию прогибов при нагружении прямоугольных и круглых пластин / Перм. Гос. Техн. ун-т. Пермь, 2006. 32 с.

Рассматриваются понятия, определения и характеристики, используемые в теории пластин, приведены основные уравнения пластин, а также показано влияние граничных условий на результаты решения подобных задач. Теоретические положения иллюстрируются примерами.

Даны методические указания к лабораторным работам: определение прогибов при нагружении сосредоточенной силой квадратной пластинки; напряженно-деформированное состояние при изгибе круглой пластинки.

Пособие предназначено для студентов специальностей «Динамика и прочность машин», «Компьютерная механика», изучающих курс «Строительная механика».

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966г., 635 с.
2. Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Кулиев В.Р. Вариационные методы в теории пластин и оболочек. / учебное пособие ПГТУ, Пермь, 2000. 36 с.
3. Писаренко Г.С. Агарев В.А. и др. Сопротивление материалов. Киев: Вища школа 1979. 696 с.

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Раздел «Теория пластин» входит в комплексную дисциплину «Строительная механика» специальности «Динамика и прочность машин».

Существует большое количество деталей конструкций, машин и механизмов с определенными характеристиками и свойствами, которые при моделировании и абстрагировании можно описать как пластины. Конструкции с использованием деталей подобных пластинам легкие, прочные и широко используются в строительстве, аэрокосмической технике, судо-, автомобиле-промышленности. Расчет пластин на прочность, жесткость и устойчивость – это задачи строительной механики.

**Пластина** – это модель формы, к которой можно отнести тела, у которых один габаритный размер (толщина) много меньше двух других (см. рис.1).

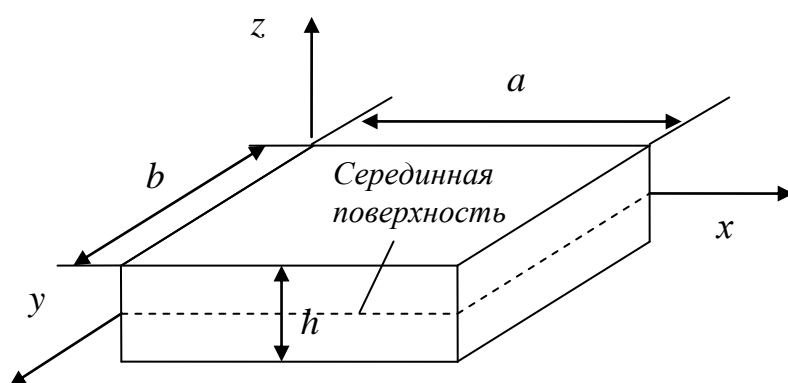


Рис. 1. Пластинка

$$h \ll a \times b$$

Определяющими характеристиками для пластин являются (рис.1): срединная поверхность – плоскость равноудаленная от наружных поверхностей, а также толщина  $h$  и величина прогиба  $w$  при действии нагрузки.

В зависимости от величины прогиба пластинки подразделяют на:

1) **жесткие пластины**, где величина прогибов не превышает 20-25% от толщины пластинки  $w \approx \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}\right)h$ , преобладают изгибные напряжения, а зависимость между прогибами и нагрузкой линейна;

2) **гибкие пластины**, с прогибами  $w > \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}\right)h$ , в которых возникают цепные (мембранные) напряжения, действующие в плоскости срединной плоскости.

3) **абсолютно гибкие пластинки**, в которых прогиб при действии нагрузки в 5-6 раз больше толщины  $w > (5 \div 6)h$ , зависимость между прогибами и нагрузкой нелинейна, преобладают мембранные напряжения, а изгибными напряжениями можно пренебречь.

В тех случаях, когда прогибы малы в сравнении с ее толщиной, то есть речь идет о жестких пластинах, можно построить удовлетворительную приближенную теорию изгиба под поперечными нагрузками, основываясь на следующих **допущениях**:

1. В срединной плоскости пластинка не испытывает деформаций. При изгибе эта плоскость остается нейтральной.

2. Точки пластинки, лежащие до загрузки на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к ее срединной поверхности. Это допущение эквивалентно пренебрежению влиянием перерезывающих сил на прогиб пластинок, что допустимо, за исключением случая пластины с отверстием, когда перерезывающие силы имеют большое значение.

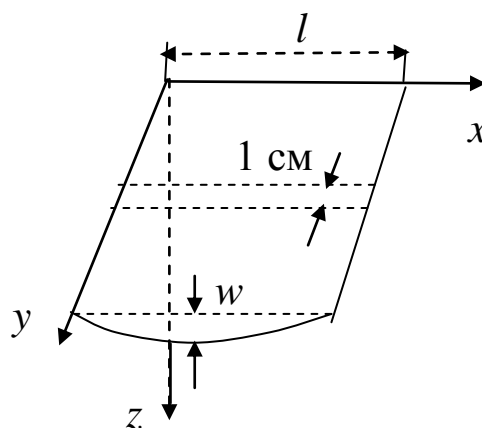
3. Нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости пластинки, допустимо пренебрегать ( $\sigma_z = 0$ ).

Основываясь на этих допущениях можно все компоненты напряжений выразить через прогибы пластинки.

## ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим задачу об изгибе длиной прямоугольной пластинки, толщиной  $h$ , несущей поперечную, не изменяющуюся по длине пластинки нагрузку  $P(x)$ . Изогнутую поверхность участка такой пластинки, достаточно удаленного от ее концов, можно при этом считать цилиндрической, с осью цилиндра, параллельной пластинке (рис. 2).

Рис. 2



Для вывода дифференциального уравнения изгиба выделим элементарную полоску как стержень прямоугольного поперечного сечения пролетом  $l$ , толщиной  $h$ . При вычислении обусловленных изгибом напряжений в таком стержне мы предполагаем, что поперечные сечения стержня остаются плоскими, испытывая лишь повороты относительно своих нейтральных осей. Если в концевых сечениях стержня не приложено никаких нормальных сил, то нейтральная поверхность стержня совпадает со срединной поверхностью пластинки, и относительное удлинение волокна, параллельного оси  $x$ , окажется пропорциональным его расстоянию от срединной поверхности. Кривизну изогнутой оси стержня можно будет при этом принять равной  $d^2w/dx^2$ . Относительное удлинение волокна, отстоящего на расстоянии  $z$  от срединной поверхности (рис.3) будет иметь вид

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

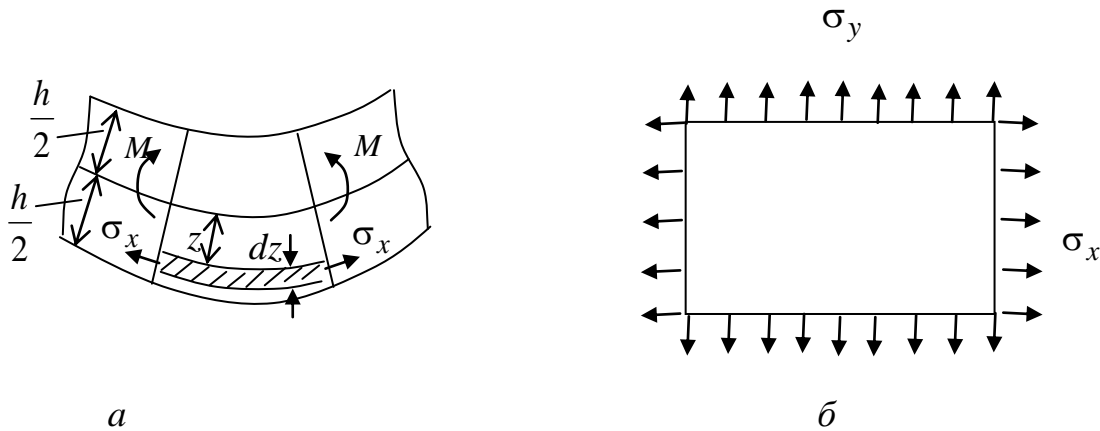


Рис. 3

Пользуясь законом Гука, выразим относительные удлинения  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  заштрихованного на рис.3,а элемента в функции действующих на него нормальных напряжений. Для достаточно длинной пластины ( $\varepsilon_y = 0$ ) реализуется схема плоского напряженного состояния (ПНС)  $\sigma_z = 0$ . С учетом обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Для того, чтобы пластинка сохранила при деформации непрерывность, необходимо, чтобы поперечная деформация ее в направлении  $y$  была равна нулю. Второе из уравнений (1) даст нам  $\sigma_y = \mu \sigma_x$ . Подставив это значение в первое, получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x \quad \text{или} \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \varepsilon_x, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_x$  – относительное удлинение волокна, отстоящего на расстоянии  $z$  от срединной поверхности.

Располагая выражением для напряжения изгиба  $\sigma_x$ , находим посредством интегрирования изгибающий момент в элементарной полоске

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{E}{1-\mu^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dz = - \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (3)$$

Вводя обозначения 
$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = D, \quad (4)$$

представим уравнение изогнутой кривой, т.е. кривой прогибов, для элементарной полоски в следующем виде:

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M, \quad (5)$$

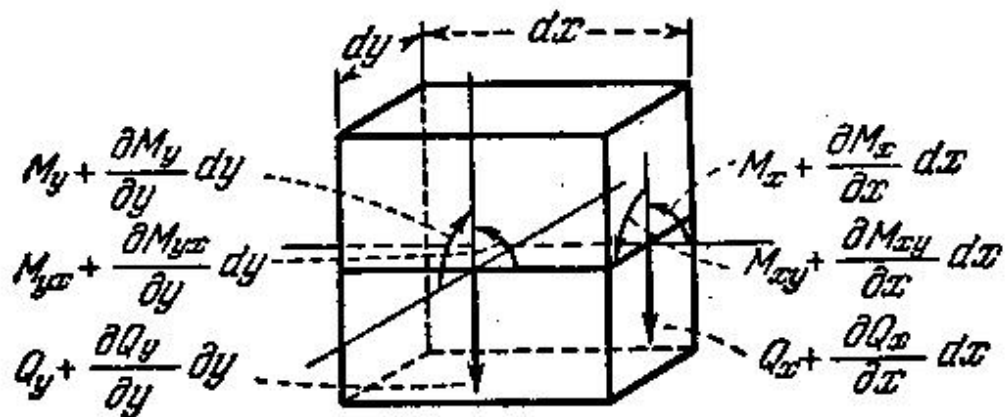
Здесь величина  $D$  играет ту же роль, что и произведение  $El$ , входящее в формулы изгиба балки, называется **цилиндрической жесткостью** пластины при изгибе.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрим изгиб пластинки нагруженной поперечной силой, которая свободно опирается по контуру, то есть опорные реакции на краях должны быть нормальны к пластинке. Прогибы при этом примем малыми в сравнении с толщиной. При этих условиях можно пренебречь деформацией в срединной плоскости пластины.

Рассмотрим элемент, вырезанный из пластинки, как показано на рис.4.





К

Рис. 4

роме

изгибающих и крутящих моментов, в данном случае будут действовать и вертикальные перерезывающие силы, приложенные по боковым граням элемента

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (6)$$

Так как моменты и перерезывающие силы являются функциями координат  $x$  и  $y$ , то при исследовании условий равновесия элемента мы должны принять во внимание малые изменения этих величин, обусловленные изменениями координат на малые величины  $dx$  и  $dy$ .

Срединная плоскость элемента представлена на рис.5, где указаны те направления сил и моментов, которые принимаются положительными.

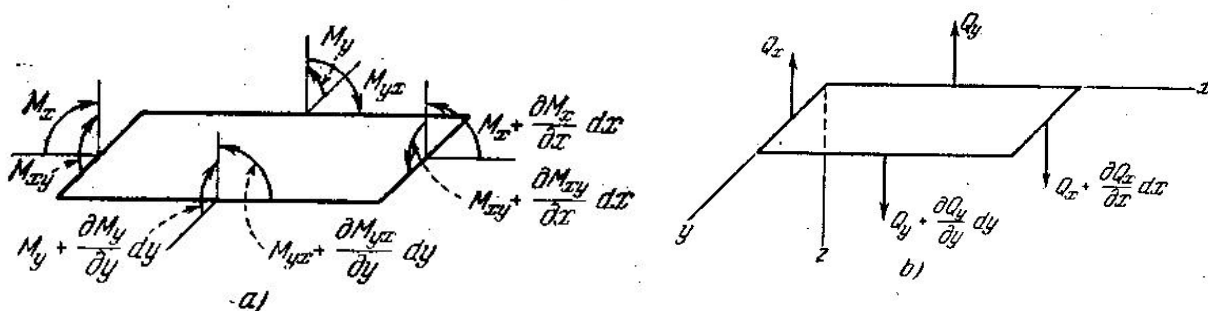


Рис. 5

Если нагрузка распределена по верхней поверхности пластинки, то интенсивность такой нагрузки  $q$ , или действующая на элемент поверхности  $q \, dx \, dy$ .

Проектируя приложенные к элементу силы на ось  $z$ , получим следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \, dx \, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \, dy \, dx + q \, dx \, dy = 0,$$

из которого

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (7)$$

Взяв моменты от действующих на элемент сил относительно оси  $x$ , получим другое уравнение равновесия

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \, dx \, dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} \, dy \, dx + Q_y \, dx \, dy = 0. \quad (8)$$

Моментом от нагрузки  $q$  и моментом, возникающим вследствие изменения силы  $Q_y$ , пренебрегаем ввиду того, что они представляют собой величины более высокого порядка малости. Тогда после упрощений уравнение равновесия (8) принимает вид относительно оси  $x$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad (9)$$

относительно оси  $y$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0. \quad (10)$$

Так как в направлениях  $x$  и  $y$  сил нет, а относительно оси  $z$  нет моментов, то три уравнения (7), (9) и (10) полностью определяют равновесие элемента. Исключим из этих уравнений перерезывающие

силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , определив их из уравнений (9), (10) и произведя подстановку их значений в уравнение (7) получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (11)$$

С учетом  $M_{xy} = -M_{yx}$ , вследствие того, что  $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ , представим уравнение равновесия (11) в окончательной форме:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (12)$$

Для определения зависимости изгибающих моментов от функции прогибов рассмотрим чистый изгиб пластинки (рис.6).

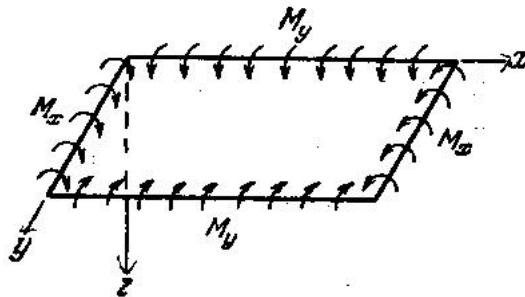


Рис.6

Выделим из пластинки элемент, как показано на рис.7. Пусть  $1/r_x$  и  $1/r_y$  обозначают кривизны этой нейтральной поверхности в сечениях, параллельных соответственно плоскостям  $xz$  и  $yz$ . В таком случае мы можем найти относительные удлинения в направлениях  $x$  и  $y$  для элементарного слоя  $abcd$ , отстоящего от нейтрального слоя на расстоянии  $z$ , они будут равны

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_y}. \quad (13)$$

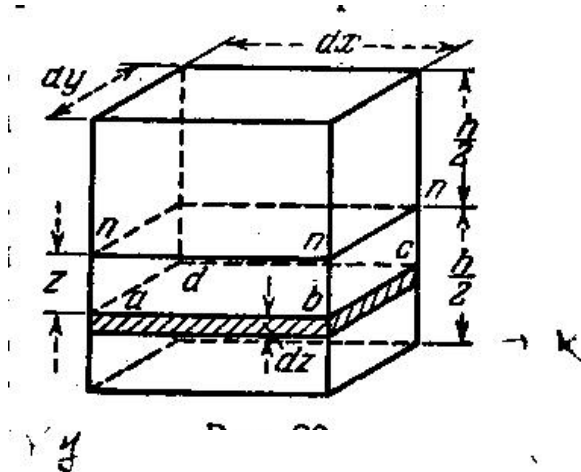


Рис. 7

С учетом закона Гука (1) находим соответствующие напряжения в слое  $abcd$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right), \\ \sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right) \end{cases} \quad (14)$$

Эти напряжения пропорциональны расстоянию  $z$  слоя  $abcd$  от нейтральной поверхности и зависят от величины кривизны изогнутой пластинки.

Так как эти нормальные растяжения распределены по боковым граням показанного на рис.7 элемента, то их можно привести к парам сил, величины которых, приходящиеся на единицу длины, должны быть, очевидно, равны внешним моментам  $M_x$  и  $M_y$ . Таким путем получаем уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{2} \\ \int \sigma_x z dy dz = M_x dy, \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \int \sigma_y z dx dz = M_y dx. \\ \frac{h}{2} \end{array} \right. \quad (15)$$

Подставив в них вместо  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  выражение (14), получим соотношения для определения моментов

$$M_x = D \left( \frac{1}{r_x} + \mu \frac{1}{r_y} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (16)$$

$$M_y = D \left( \frac{1}{r_y} + \mu \frac{1}{r_x} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

Отметим, что вследствие малой толщины в сравнении с размерами пластинки пренебрегаем влиянием на изгиб перерезывающих сил  $Q_x$  и  $Q_y$  и сжимающего напряжения  $\sigma_z = 0$ , вызванного нагрузкой  $q$ .

Подставляя эти выражения (16), (17) в уравнение (12) найдем дифференциальное уравнение изогнутой поверхности

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (18)$$

или в символической форме

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (19)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Уравнениями (9), (10) воспользуемся для определения  
перерезывающих сил

$$\theta_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad (20)$$

$$\theta_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (21)$$

Компоненты тензора напряжений при изгибе определяются

$$\sigma_{ij} = \frac{M_{ij}}{I} z, \quad (22)$$

или с учетом закона Гука  $\varepsilon_{ij} = \frac{M_{ij}}{EI} z,$  (23)

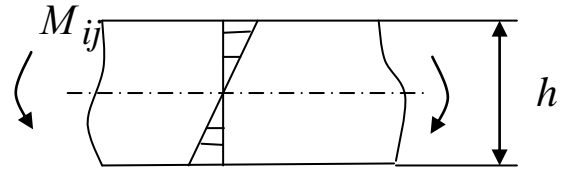
где  $M_{ij}$  – изгибающий момент (рис.8);  $I = \frac{h^3}{12}$  – момент инерции  
полоски единичной ширины;  $z$  – расстояние до срединной  
поверхности. Тогда максимальные напряжения для  $z = \pm \frac{h}{2}$   
определяются в виде

$$\sigma_{ij}^{\max} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \pm \frac{6M_{ij}}{h^2}, \quad (24)$$

в декартовой системе координат

$$\sigma_x^{\max} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y^{\max} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad (25)$$

Рис. 8. Максимальные напряжения при изгибе пластины



В случае действия касательных напряжений  $\tau$  сдвиговые деформации определяются как

$$\gamma = \frac{\tau}{GI}, \quad (26)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

Максимальные касательные напряжения имеют вид:

$$\tau_{xy}^{\max} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}, \quad (27)$$

Для определения напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  предположим, что они распределены по толщине пластинки по параболическому закону. Тогда

$$\tau_{xz}|_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz}|_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}. \quad (28)$$

Таким образом, задача об изгибе пластинки поперечной нагрузкой сводится к интегрированию уравнения (18). Если для какого-либо частного случая решение этого уравнения найдено и оно удовлетворяет граничным условиям, то с учетом выражений (16), (17) для определения моментов могут быть вычислены нормальные и касательные напряжения, а также деформации

$$\varepsilon_x = \frac{M_x - \mu M_y}{EI} z; \quad \varepsilon_y = \frac{M_y - \mu M_x}{EI} z; \quad \gamma_{xy} = \frac{M_{xy}}{GI} z, \quad (29)$$

что позволяет определить напряженно деформированное состояние пластинки, которая находится под поперечной нагрузкой.

Кривизны в осевых направлениях

$$\theta_x = \frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \theta_y = \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \theta_{xy} = \frac{1}{r_{xy}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (30)$$

где  $r_x, r_y, r_{xy}$  – радиусы кривизны в соответствующих направлениях.



## СИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

При симметричном изгибе круглой пластинки (рис.9) решение выполняется в цилиндрических координатах. Если начало координат поместить в центре пластинки до изгиба, через  $r$  обозначим радиальные расстояния точек, лежащих в срединной плоскости. Тогда максимальный наклон изогнутой поверхности в некоторой точке  $A$  будет

равен  $-\frac{dw}{dr}$ , кривизна же срединной

поверхности пластинки в диаметральном сечении  $rz$  для малых прогибов выразится производной

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{dw}{dr} = \frac{d\varphi}{dr}, \quad (31)$$

где  $\varphi$  – малый угол между нормалью к изогнутой поверхности в точке  $A$  и осью симметрии  $OB$ . Из условий симметрии заключаем, что

$\frac{1}{r_n}$  представляет собой одну из главных кривизн изогнутой

поверхности в точке  $A$ . Вторая главная кривизна лежит в сечении, проходящем через нормаль  $AB$ , перпендикулярно к плоскости  $rz$ .

Заметив, что подобные  $AB$  нормали для всех остальных точек срединной поверхности с радиальным расстоянием  $r$  образуют в

своей совокупности коническую поверхность с вершиной в  $B$ , заключаем, что расстояние  $AB$  представляет собой радиус кривизны,

который мы обозначим через  $r_t$ . Тогда из рис.9 получим

$$\frac{1}{r_t} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r}. \quad (32)$$

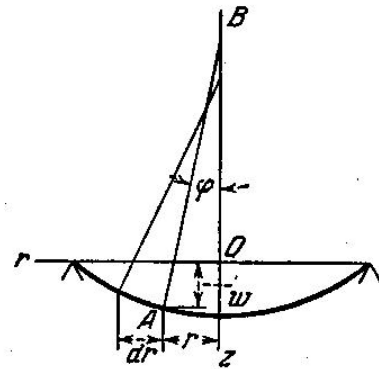


Рис.9

Имея выражения (31) и (32) для главных кривизн, мы можем получить и соответствующие значения изгибающих моментов, полагая, что между этими моментами и кривизнами остаются в силе соотношения (16), которые выведены в предположении незначительного влияния касательных напряжений на величину прогибов. Пользуясь этими соотношениями, получаем изгибающие моменты по окружным (тангенциальным) сечениям пластинки и диаметральному сечению  $rz$ :

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\mu}{r} \varphi \right), \quad (33)$$

$$M_t = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = -D \left( \frac{\varphi}{r} + \mu \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (34)$$

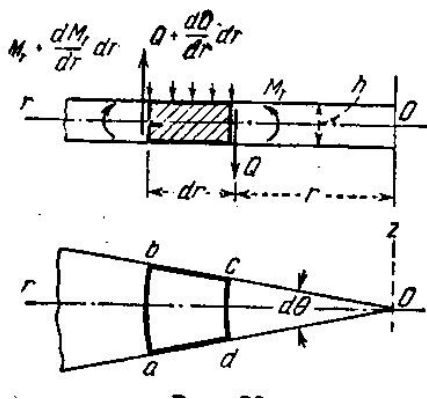


Рис.10

Уравнения (33) и (34) содержат лишь одну переменную либо  $w$ , либо  $\varphi$ , которая может быть определена из условий равновесия элемента пластинки, аналогичного, например, элементу  $abcd$  на рис.10, вырезанному из пластинки двумя цилиндрическими сечениями  $ab$  и  $cd$  и двумя диаметральными  $ad$  и  $bc$ .

Например, пара сил, действующая по грани  $cd$  элемента, равна

$$M_r r d\theta \quad (35)$$

соответствующая пара по грани  $ab$  выразится произведением

$$\left( M_r + \frac{dM}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta. \quad (36)$$

Каждая из пар, приложенных по граням  $ad$  и  $bc$  элемента, равна  $M_t dr$ , обе же вместе они дадут равнодействующую пару в плоскости  $rOz$ , равную

$$M_t dr d\theta. \quad (37)$$

Полная перерезывающая сила, действующая по грани  $cd$  элемента, будет  $Qrd\theta dr$ ; соответствующая же сила по грани  $ab$  равна

$$\left[ Q + \frac{dQ}{dr} dr \right] (r + dr) d\theta. \quad (38)$$

Пренебрегая малой разностью между перерезывающими силами по двум противоположным граням элемента, мы вправе утверждать, что эти силы дают пару в плоскости  $rz$ , равную

$$Qrd\theta dr. \quad (39)$$

Складывая с надлежащими знаками моменты (35), (36), (37), (39) и пренебрегая моментом от приходящейся на элемент внешней нагрузки, как малой величиной более высокого порядка, получим для элемента  $abcd$  следующее уравнение равновесия:

$$\left( M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_t r dr d\theta + Qrd\theta dr = 0,$$

из которого, пренебрегая малой величиной более высокого порядка, находим

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0. \quad (40)$$

Если вместо  $M_r, M_t$  подставить выражения (33), (34), то уравнение (40) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \quad (41)$$

или в другом виде

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}. \quad (42)$$

В любом частном случае симметрично нагруженной круглой пластинки перерезывающая сила легко может быть вычислена путем деления распределенной по окружности радиуса  $r$  нагрузки на  $2\pi r$ . Тогда уравнениями (41) и (42) можно будет воспользоваться для определения наклона  $\varphi$  и прогиба  $w$  пластинки. Интегрирование этих уравнений упрощается, если мы заметим, что их можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{Q}{D}, \quad (43)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \varphi \right) \right] = \frac{Q}{D}. \quad (44)$$

В случае если, например, пластинка нагружена равномерно распределенной по поверхности нагрузкой интенсивностью  $q$ , то величина перерезывающей силы  $Q$  на расстоянии  $r$  от центра пластинки определяется из уравнения

$$2\pi r Q = \pi r^2 q, \quad Q = \frac{qr}{2}.$$

Таким образом, если  $Q$  представлена в функции  $r$ , то уравнения (43), (44) без всяких затруднений можно будет проинтегрировать в любом частном случае, а постоянные интегрирования найти из граничных условий.

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1. В случае, когда край пластинки защемлен (рис.11) прогиб по этому краю равен нулю и плоскость, касательная к изогнутой срединной поверхности, совпадает на нем с начальным положением срединной плоскости пластинки (угол поворота равен нулю). Тогда граничные условия имеют вид

$$w|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{x=a} = 0. \quad (45)$$

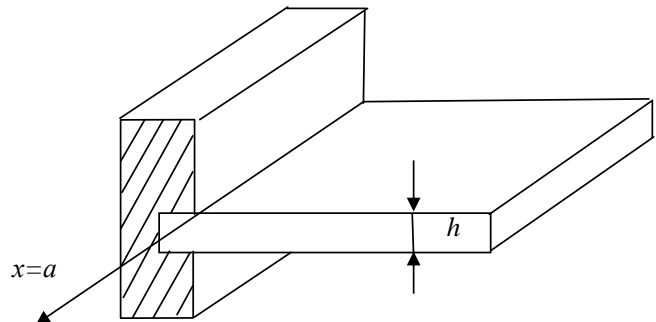


Рис. 11

2. Если край пластинки свободно оперт (рис.12), то его прогиб должен быть равен нулю. В то же время этот край может свободно поворачиваться относительно оси  $x$ ; это значит, что изгибающие моменты  $M_x$  обращаются на нем в нуль. Тогда граничные условия имеют вид

$$w|_{x=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) |_{x=a} = 0. \quad (46)$$

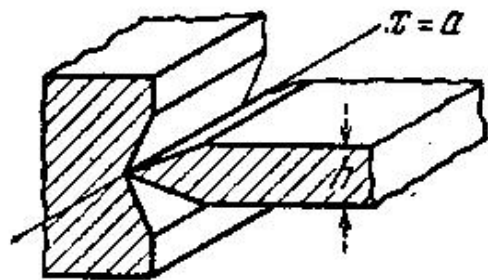


Рис.12

Также наряду с этим обращается в нуль  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ , поэтому

уравнения (46) можно считать эквивалентным уравнениям

$$w|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0. \quad (47)$$

3. В том случае, край пластинки совершенно свободен (рис.13), то естественно принять, что по этому краю нет ни изгибающих или крутящих моментов, ни вертикальных перерезывающих сил

$$\begin{aligned} M_x|_{x=a} &= 0, \\ M_{xy}|_{x=a} &= 0, \\ Q_x|_{x=a} &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

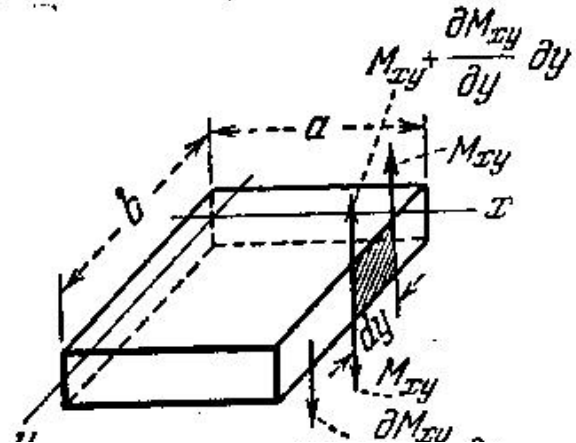


Рис.13

В этой форме граничные условия для свободного края были выражены Пуассоном. Позднее Кирхгофф доказал, что трех условий слишком много и что для полного определения удовлетворяющих дифференциальному уравнению С. Жермен прогибов достаточно двух условий. На этом основании объединенное требование относительно крутящего момента  $M_{xy}$  и перерезывающей силы  $Q_x$  для свободного края принимает вид

$$V_x = \left( Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (49)$$

подставив сюда вместо  $Q_x$  и  $M_{xy}$  выражения (20) и (17), получаем окончательно для свободного края  $x = a$ :

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (50)$$

Условие, чтобы изгибающие моменты на свободном крае были равны нулю, требует

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (51)$$

Уравнения (50) и (51) представляют собой два необходимых граничных условия для свободного края пластинки.

Таким образом, практически все задачи, связанные с исследованием напряжений и деформаций в пластинка, сводятся к решению краевых задач для одного или нескольких дифференциальных уравнений. Точное решение этих уравнений не вызывает затруднения лишь в некоторых элементарных случаях. В более сложных случаях оно связано с математическими трудностями.

В таких случаях рекомендуется применять методы приближенного решения: вариационные, дающие приближенное аналитическое выражение для искомой функции и численные, определяющие численные значения функции при различном аргументе. К вариационным методам относятся: метод Ритца, метод Галеркина, метод Треффца, Канторовича и другие. К численным относят – конечно-разностный метод, метод сеток, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов и др.

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1**  
**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ**  
**ИЗГИБЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН**

**Цель работы:**

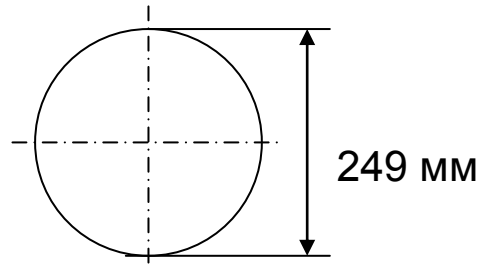
Оценить напряженно-деформированное состояние круглой пластинки под сосредоточенной силой, сравнить полученные результаты с известными аналитическими решениями и результатами численного анализа.

**Данные пластинки**

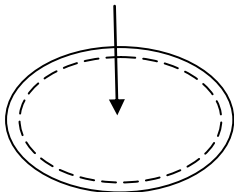
$$h = 1 \text{ мм}$$

$$E = 2,0 - 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$$

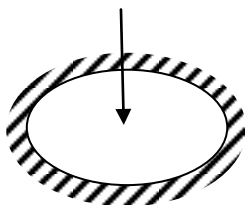
$$\mu = 0,24 - 0,3$$



1. Свободно опертая по контуру пластина



2. Пластика жестко закреплена



**Этапы работы:**

- Измерения провести для 2 закреплений
- Найти силовые характеристики в пластинке,
- Определить распределения по площади напряжений.
- Построить эпюры моментов.
- Показать аналитическое решения задачи об изгибе круглой пластины,
- Оценить сходства и различия полученных результатов.



Начиная с малых нагрузок подобрать такую, что бы прогибы не превышали 30% от толщины пластины, повторить все измерения 4-5 раз для оценки погрешности измерения. Результаты свести в табл. 1.

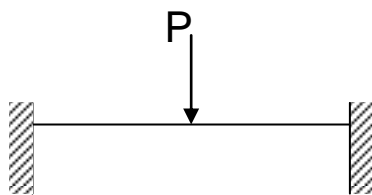
**Таблица 1**

**Прогибы круглой пластины под сосредоточенной в центре нагрузкой**

$P, \text{ кг}$	№ измерения					
$P_i < P_{i+1}$	1	2	3	4	5	$\bar{w} = \sum w_i / i$
$P_i$	$w_i$					
$P_{i+1}$	$w_{i+1}$					
.	.					
.	.					
.	.					

**ПРИМЕР**

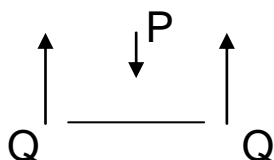
**а) результаты эксперимента**



P	1	2	3	4	сред
320	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
570	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
820	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
1070	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

**б) теоретический расчет**

Определим перерезывающие усилия из дополнительного условия равновесия



$$P - Q \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 0$$

$$Q = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Уравнение равновесия

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot D}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{P}{2\pi \cdot D} \ln r + C_1$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{P \cdot r}{2\pi \cdot D} \ln r + C_1 \cdot r$$

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot D} \left( \ln r \cdot \frac{r}{2} - \frac{r}{4} \right) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\omega = \frac{P}{2\pi D} \left( \ln r \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

Граничные условия:

1)  $\omega_{r=a} = 0$

2)  $\frac{d\omega}{dr}_{r=a} = \frac{d\omega}{dr} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot D} \left( \ln a \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{4} \right) + C_1 \frac{a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0$

3)  $\frac{d\omega}{dr}_{r=0} = \frac{d\omega}{dr} = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot D} \left( \ln r \cdot \frac{r}{2} - \frac{r}{4} \right) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Функция прогибов

$$\omega = \frac{P}{2\pi D} \left( \ln r \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \right) - \frac{P}{\pi \cdot D} \left( \ln a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{r^2}{4} - \frac{P}{2\pi D} \left( \ln a \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{P}{\pi \cdot D} \left( \ln a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{a^2}{4}$$

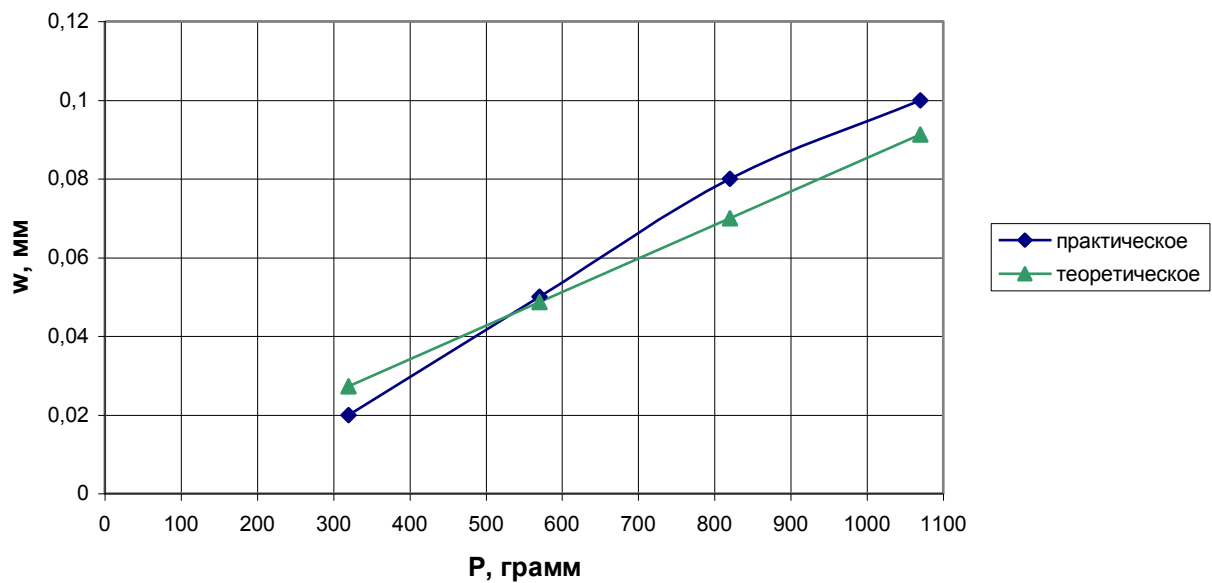
P	1	2	3	4
320	0,028262	0,02729	0,025692	0,024809
570	0,050341	0,04861	0,045765	0,044191
820	0,072421	0,06993	0,065837	0,063573
1070	0,0945	0,09125	0,085909	0,082956

### в). Оценка погрешности измерения

при  $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$

$\mu=0,30$

P	320	570	820	1070
$\Delta w, \text{ мм}$	0,00729	0,00139	0,010069	0,008749
$\varepsilon, \%$	36,4504	2,779093	12,58646	8,748797

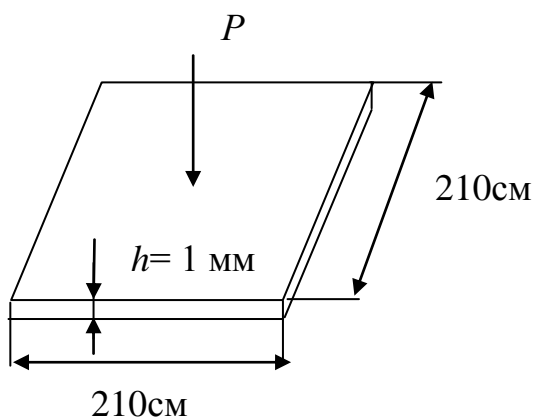


Выводы ....

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 ИЗГИБ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

### Цель работы:

В работе предлагается определить прогибы стальной пластинки под действием различных нагрузок, оценить напряженно-деформированное состояние, а также провести сравнительный анализ экспериментальных результатов и решения подобных задач с применением приближенных энергетических и численных методов.



### Данные пластинки

Экспериментальная установка позволяет изменять сосредоточенную в центре пластинки нагрузку и измерять величину прогиба. Результаты измерений необходимо свести в табл. 2.

**Таблица 1**

### Прогибы круглой пластины под сосредоточенной в центре нагрузкой

$P$ , кг	№ измерения					
$P_i < P_{i+1}$	1	2	3	4	5	$\bar{w} = \sum w_i / i$
$P_i$	$w_i$					
$P_{i+1}$	$w_{i+1}$					
.	.					
.	.					
.	.					

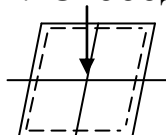
### Этапы работы:

- Все измерения и анализ необходимо провести для 6 различных закреплений.
- Оценить погрешность измерения
- Далее необходимо найти максимальные прогибы аналитически с применением вариационных методов,
- Для полного анализа, полученных результатов рекомендуется определить прогибы для пластины численно,
- Построить их распределения и эпюры моментов.
- Оценить полученные результаты, сделать выводы

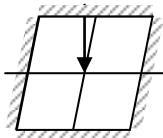
В качестве примера приведены результаты эксперимента и расчета для свободно опертой пластинки

### Виды закреплений

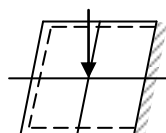
1. Свободно опертая по контуру пластинка



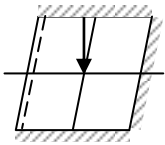
2. Жестко закрепленная по контуру пластинки



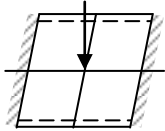
3. Жестко закреплен один край, остальные свободно опираются



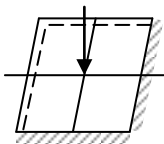
4. Один конец свободно оперт, остальные три жестко закреплены



5. Попарно закреплены противоположные границы

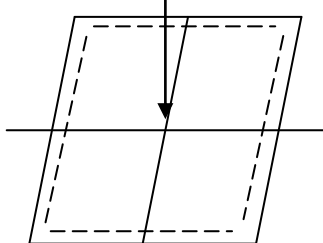


6. Попарно закреплены смежные границы



## ПРИМЕР

а) результаты эксперимента



P	1	2	3	сред
320	0,17	0,16	0,17	0,166667
570	0,26	0,24	0,25	0,25
820	0,32	0,31	0,31	0,313333
1070	0,39	0,39	0,38	0,386667

б) расчет в ПК “Лира”

- 1)  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>     $\mu=0,24$
- 2)  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>     $\mu=0,30$
- 3)  $E=2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>     $\mu=0,24$
- 4)  $E=2,2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>     $\mu=0,30$

P	1	2	3	4
320	0,09	0,089	0,084	0,081
570	0,16	0,159	0,15	0,145
820	0,23	0,229	0,216	0,209
1070	0,31	0,3	0,28	0,272

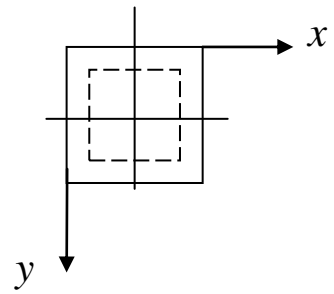
в) теоретический расчет

По методу Ритца – Тимошенко

$$\mathcal{E} = U - A_H$$

$$\text{Примем } \omega = a_1 \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \sin \frac{\pi \cdot y}{a}$$

где  $a = 21$  см



$$U = \frac{D}{2} \iint_F \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -a_1 \cdot \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \sin \frac{\pi \cdot y}{a}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -a_1 \cdot \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \sin \frac{\pi \cdot y}{a}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = -a_1 \cdot \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{\pi \cdot x}{a} \cos \frac{\pi \cdot y}{a}$$

$$U = \frac{D \cdot \pi^4 \cdot a_1^2}{2 \cdot a^2}$$

$$A_H = P a_1$$

$$\mathcal{E} = U - A_H = \frac{D \cdot \pi^4 \cdot a_1^2}{2 \cdot a^2} - P a_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = \frac{D \cdot \pi^4 \cdot a_1}{a^2} - P$$

$$a_1 = \frac{P a^2}{D \cdot \pi^4}$$

$$\text{Функция прогиба: } \omega = \frac{P a^2}{D \pi^4} \sin \left( \frac{\pi \cdot x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi \cdot y}{a} \right)$$

$$1) E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \quad \mu = 0,24$$

$$2) E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \quad \mu = 0,30$$

$$3) E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \quad \mu = 0,24$$

$$4) E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 \quad \mu = 0,30$$

P	1	2	3	4
320	0,081917	0,079101	0,07447	0,07191
570	0,145915	0,140899	0,13265	0,12809
820	0,209913	0,202696	0,19083	0,184269
1070	0,273911	0,264494	0,24901	0,240449

г). Оценка погрешности измерения при  $E=2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$   $\mu=0,24$

$$\omega = \frac{Pa^2}{D\pi^4} \sin$$

Выводы:.....



## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966г., 635 с.
2. Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Кулиев В.Р. Вариационные методы в теории пластин и оболочек. / учебное пособие ПГТУ, Пермь, 2000. 36 с.
3. Писаренко Сопротивление материалов

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.....</b>	<b>5</b>
<b>ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ.</b>	
<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ .....</b>	<b>7</b>
<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ .....</b>	<b>9</b>
<b>СИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН.....</b>	<b>18</b>
<b>ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ .....</b>	<b>22</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1</b>	
<b>НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ИЗГИБЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН .....</b>	<b>25</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2</b>	
<b>ИЗГИБ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ.....</b>	<b>29</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>34</b>

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.....</b>	<b>5</b>
<b>ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ .....</b>	<b>7</b>
<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ .....</b>	<b>9</b>
<b>СИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН.....</b>	<b>18</b>
<b>ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ .....</b>	<b>22</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1</b>	
<b>НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ИЗГИБЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН .....</b>	<b>25</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2</b>	
<b>ИЗГИБ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ.....</b>	<b>29</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>34</b>

**Кузнецова Е.В.**

**Строительная механика. Изгиб пластин**

**Учебно-методическое пособие**

Редактор И.Н. Жеганина

Лицензия ЛР № 020370

---

Подписано печать 15.03.2006.

Формат 60x90/16. Объем 2,0. Тираж 100. Заказ 27.

---

Редакционно-издательский отдел

Пермского государственного технического университета